Bachillerato de Ciencias de la Naturaleza y la Salud	
Soluciones	**Junio de 2016**

OPCIÓN A

Problema 1. a) $\begin{pmatrix} a & 0 & -1 & a \\ 2 & a & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Como el determinante $\begin{vmatrix} a & 0 & -1 \\ 2 & a & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = a(a+2)$, el sistema es compatible y determinado si $a \neq 0, \quad a \neq -2$, pues r*(A)=r(B)=3*.

Para *a=0* se tiene: $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, como $\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$ y $\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$ entonces r*(A)=2 y r(B)=3*. El sistema es incompatible.

b) Para a=*-2* se tiene: $\begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, como $\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$ y $\begin{vmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0$ entonces r*(A)=2 y r(B)=2*. El sistema es compatible indeterminado. Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones: $\begin{cases} -2x - z = -2 \\ 2x - 2y + z = 1 \end{cases}$, se obtienen las soluciones: $(\lambda, 1/2, 2-2\lambda)$.

c) Para *a=-1* el sistema es compatible determinado y por el método de Gauss se obtiene: $\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ la solución $(1,1,0)$.

Problema 2. a) La recta *r* en paramétricas es: $\begin{cases} x = t \\ y = 4 + 4t \\ z = 5 + 7t \end{cases}$ y tomando el vector director de la recta *s*, la recta pedida es: $\begin{cases} x = s \\ y = 1 + 4s \\ z = 7s \end{cases}$.

b) El vector normal del plano será perpendicular a los vectores directores de las rectas *r* y *s*: $\vec{n} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 4 & 7 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (-10,-1,2)$. El plano pedido pertenecerá al haz de planos paralelos $-10x - y + 2z + D = 0$ y deberá pasar por el punto $A(0,4,5)$. Por tanto $-10\cdot 0 - 4 + 2\cdot 5 + D = 0$ y el plano es $-10x - y + 2z - 6 = 0$.

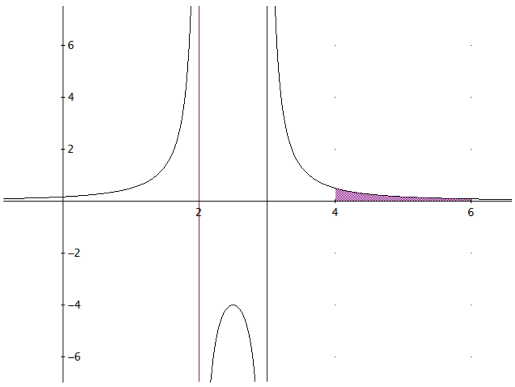
c) Si $A(1,0,-2)$ y $B(0,4,-5)$ son dos puntos de las rectas *r* y *s*, se obtiene el vector $\overrightarrow{AB} = (1,0,-2) - (0,4,-5) = (1,-4,-7)$. Distancia entre las rectas que se cruzan es:

$$d(r,s) = \frac{\left|\left[\overrightarrow{AB}, \vec{u}, \vec{v}\right]\right|}{\left|\vec{u} \times \vec{v}\right|} = \frac{\left\|\begin{matrix} 1 & -4 & -7 \\ 1 & 4 & 7 \\ 0 & 2 & 1 \end{matrix}\right\|}{\left|(-10,-1,2)\right|} = \frac{|-20|}{\sqrt{105}} = \frac{20}{\sqrt{105}}.$$

Problema 3. a) Dominio: $\Re - \{2,3\}$. Asíntotas verticales: $x = 2$ *y* $x = 3$.

Asíntota horizontal: $y = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x^2 - 5x + 6} = 0$.

b) Derivando: $y' = \dfrac{5-2x}{(x-2)(x-3)}$, se anula $x = \dfrac{5}{2}$. Como $y'(x) > 0$ si $x < 2$, es creciente en $(-\infty,2)$; $y'(x) > 0$ si $2 < x < 5/2$, es creciente; $y'(x) < 0$ si $5/2 < x < 3$, es decreciente; $y'(x) < 0$ si $(3,\infty)$, es decreciente.



c) $\dfrac{1}{x^2 - 5x + 6} = \dfrac{A}{x-2} + \dfrac{B}{x-3}$ y se tiene $1 = A(x-3) + B(x-2)$. Si $x = 3 \to B = 1$ y si $x = 2 \to A = -1$. Entonces $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2 - 5x + 6} = -\int \frac{dx}{x-2} + \int \frac{dx}{x-3} = -L|x-2| + L|x-3| + C$.

d) Se calcula la integral definida y se iguala al valor pedido del área:

$$\int_4^a \frac{dx}{x^2-5x+6} = L(x-3)-L(x.-2\Big|_4^a = L(a-3)-L(a-2)-L1+L2 = L\frac{a-3}{a-2}+L2 = L\frac{3}{2}$$

$L\dfrac{a-3}{a-2} = L\dfrac{3}{2} - L2 = L\dfrac{3}{4}$. Se quitan logaritmos: $\dfrac{a-3}{a-2} = \dfrac{3}{4}$ y se deduce que $a=6$.

OPCIÓN B

Problema 1 a) $A^{-1} = 5^{-1}A^t = \dfrac{1}{5}A^t \to A^{-1}A = I = \dfrac{1}{5}A^tA \to 5I = A^tA$. Aplicado a la matriz dada: $\begin{pmatrix} \sqrt{5} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{5} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = 5I$.

b) $|A-\lambda I| = \begin{vmatrix} \sqrt{5}-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & -2 \\ 0 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \left(\sqrt{5}-\lambda\right)\left(\lambda^2-2\lambda+5\right) = 0$. La única solución es $\lambda = \sqrt{5}$ pues $\lambda^2-2\lambda+5$ no tiene soluciones reales.

c) $B^{-1} = B^t \to |B^{-1}| = |B^t|$. Como $BB^{-1} = I \to |BB^{-1}| = |B||B^{-1}| = 1 \to |B^{-1}| = \dfrac{1}{|B|}$ se tiene: $\dfrac{1}{|B|} = |B| \to |B|^2 = 1 \to |B| = 1$ ya que $|B|>0$.

Problema 2. a) $\overrightarrow{AB} = (-1,2,0)$ y $\overrightarrow{AC} = (-1,0,3)$. El vector normal del plano σ es:

$\vec{n} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = (6,3,2)$. El plano pertenece al haz $6x+3y+2z+D=0$ y al pasar por $A(1,0,0)$, $D=-6$. El plano σ es 6x+3y+2z-6=0. Como $\dfrac{6}{6} = \dfrac{3}{3} = \dfrac{2}{2} \neq \dfrac{-12}{-6}$, los planos son paralelos.

b) $A = \dfrac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{CD}\right| = \left\|\begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{matrix}\right\| = \dfrac{1}{2}|(6,3,2)| = \dfrac{1}{2}\sqrt{6^2+3^2+2^2} = \dfrac{7}{2}$.

c) Un punto del plano π es $P(0,0,6)$. $\overrightarrow{AP}=(-1,0,6)$. El volumen del tetraedro es:

$V=\frac{1}{6}\left\|\left[\overrightarrow{AP},\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\right\|=\frac{1}{6}\left\|\begin{vmatrix}-1 & 0 & 6\\ -1 & 2 & 0\\ -1 & 0 & 3\end{vmatrix}\right\|=\frac{1}{6}\cdot 6=1$. El volumen no depende del punto *P* escogido pues la altura del tetraedro es la distancia entre los planos paralelos.

Problema3. a) $I=300x+900\cdot\frac{23-5x}{10-x}=\frac{300x^2+1500x-20700}{x-10}$ con $0<x<\frac{23}{5}$.

b) Derivando e igualando a cero $I'(x)=\frac{300x^2-6000x+5700}{(x-10)^2}=0$ se obtiene $300x^2+1500x-20700=0$ que se anula en $x=1 \wedge x=19$. Como $x=19$ queda fuera del dominio de la función, el único valor posible es $x=1$. Como $I'>0\ si\ x<1$ y $I'<0\ si\ x>1$, en $x=1$ está el máximo. Por tanto debe vender 1 tonelada de acero de baja calidad y 2 toneladas de acero de alta calidad.

c) El ingreso máximo será $I=300\cdot 1+900\cdot 2=2100$ euros.