| Bachillerato de Ciencias de la Naturaleza y la Salud | |
|---|---|
| **Soluciones** | **Julio de 2016** |

## OPCIÓN A

**Problema 1.** Aplicando el método de Gauss:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ -3 & 2 & 3 & -2 \\ 2 & 0 & -5 & -4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 5 & 9 & 4 \\ 0 & -2 & -9 & -8 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 5 & 9 & 4 \\ 0 & 3 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

Se tiene: $y = -\frac{4}{3}$, $5 \cdot \left( \frac{-4}{3} \right) + 9z = 4 \to z = \frac{32}{27}$, $x + \left( \frac{-4}{3} \right) + 2 \cdot \frac{32}{27} = 2 \to x = \frac{26}{27}$.

b) El determinante del sistema es: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & 3 \\ 2 & \alpha & -5 \end{vmatrix} = -9\alpha - 27$. Si $\alpha = -3$ se tiene

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ -3 & 2 & 3 & -2 \\ 2 & -3 & -5 & -4 \end{pmatrix}$ y $r(A) = 2 \neq r(B) = 3$ ya que $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & -2 \\ 2 & -3 & 4 \end{vmatrix} = -20 \neq 0$. Por tanto el sistema es incompatible.

c) Si $\alpha \neq -3$ el sistema es compatible determinado pues $r(A) = 3 = r(B)$. Aplicando la regla de Cramer: $\Delta_x = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 3 \\ -4 & \alpha & -5 \end{vmatrix} = -10\alpha - 26$, $\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -3 & 2 & 3 \\ -2 & -4 & -5 \end{vmatrix} = 36$,

$\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & -2 \\ -2 & \alpha & -4 \end{vmatrix} = -4\alpha - 32$, $\Delta = -9\alpha - 27$. Por tanto: $x = \frac{-10\alpha - 26}{-9\alpha - 27} = \frac{10\alpha + 26}{9\alpha + 27}$,

$y = \frac{36}{-9\alpha - 27} = \frac{-4}{\alpha + 3}$, $z = \frac{-4\alpha - 32}{-9\alpha - 27} = \frac{4\alpha + 32}{9\alpha + 27}$.

**Problema 2.** a) $\overrightarrow{AB} = (1,0,-2)$ y $\overrightarrow{AC} = (0,1,-3)$. El vector normal del plano es: $\vec{n} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix} = (2,3,1)$. El plano pertenece al haz $2x + 3y + z + D = 0$ y al pasar por el punto $A$: $2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 + 1 + D = 0$, será $2x + 3y + z - 1 = 0$.

b) $\overrightarrow{AD} = (1,2,1)$ y se calcula el producto mixto: $\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right] = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 7 \neq 0$.

Como no es nulo, los vectores no son coplanarios.

c) El vector $\overrightarrow{AB} = (2,-1,0)$, siendo *A* y *B* los puntos de las rectas *r* y *s*. Por tanto:

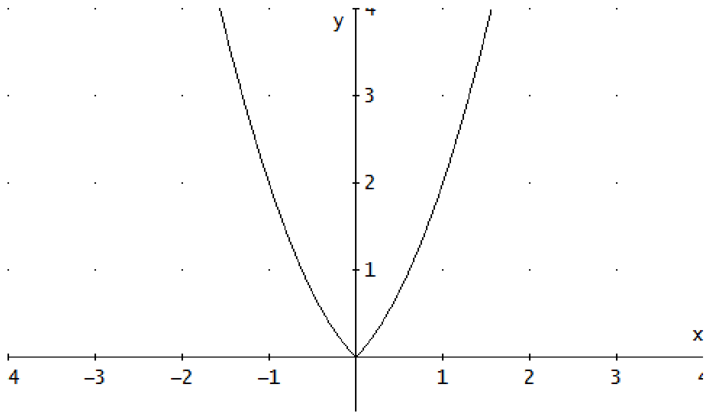
$d(D,\pi) = \dfrac{|2\cdot 1 + 3\cdot 2 + 0 - 1|}{\sqrt{4+9+1}} = \dfrac{8}{\sqrt{14}}$. El tetraedro: $V = \dfrac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right]\right| = \dfrac{7}{6}$.

**Problema 3.** a) $f(x) = \begin{cases} x^2 - x & x \le 0 \\ x^2 + x & x > 0 \end{cases}$. La función se anula en $x = 1$ (fuera del dominio), $x = 0$, $x =´ -1$ (fuera del dominio). El único punto de corte es $(0,0)$.

b) Como $f(-x) = (-x)^2 + |-x| = x^2 + |x| = f(x)$ la función es par y por tanto simétrica respecto del eje Y. se anula en $x = 1$.

c) $y' = \begin{cases} 2x - 1 & x < 0 \\ 2x + 1 & x > 0 \end{cases}$. La derivada se anula en $x = 1/2$ (fuera del dominio), $x =´ -1/2$ (fuera del dominio). Como: $(-\infty, 0)$ $y' < 0$ decreciente; $(0, \infty)$ $y' > 0$ creciente, tiene un mínimo en $(0,0)$.

d)




e) $\displaystyle\int_{-1}^{0} f(x)dx = \int_{-1}^{0} (x^2 - x)dx = \left.\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right|_{-1}^{0} = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}$

$\displaystyle\int_{0}^{2} f(x)dx = \int_{0}^{2} (x^2 + x)dx = \left.\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right|_{0}^{2} = \frac{8}{3} + 2 = \frac{14}{3}$

## OPCIÓN B

**Problema 1** a) $\left|A\cdot 2B^2\right| = |A|\cdot\left|2B^2\right| = |A|\cdot 2^3|B|^2 = 8\cdot(-1)\cdot 5^2 = -200$.

$$\left|A\cdot 2B^2\right|\cdot\left|(3A)^{-1}\right| = -200\cdot\frac{1}{|3A|} = \frac{-200}{3^3|A|} = \frac{-200}{27\cdot(-1)} = \frac{200}{27}.$$

b) $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|}adj(A)^t = \dfrac{1}{-1}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}^t = -\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

$\left[(BA)^{-1}\cdot B\right]^{-1} = B^{-1}\cdot(BA) = B^{-1}BA = IA = A$.

c) $A+B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

$$(A+B)^{-1} = \frac{1}{|A+B|}adj(A+B)^t = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -3 & 3 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \\ 12 & -9 & -3 \end{pmatrix}^t = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -3 & -2 & 12 \\ 3 & 2 & -9 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

$AX + BX = (A+B)X = 3I \rightarrow (A+B)^{-1}(A+B)X = (A+B)^{-1}\cdot 3I \rightarrow X = 3(A+B)^{-1} \rightarrow$

$$(A+B)^{-1} = 3\cdot\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -3 & -2 & 12 \\ 3 & 2 & -9 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 12 \\ 3 & 2 & -9 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

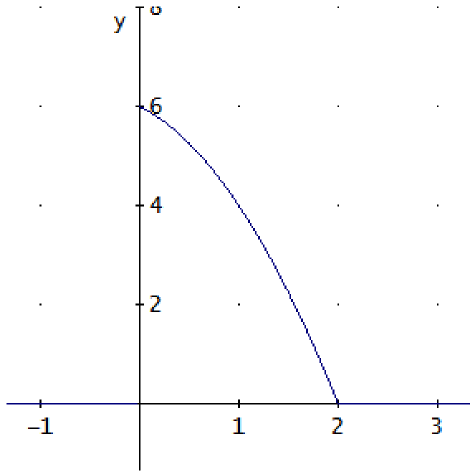
**Problema 2.** a) Pasa por el punto $(1,2,3)$: $a+2b+3=0$. Perpendicular a $\pi$: $(a,b,1)\cdot(1,1,1) = a+b+1=0$. Resolviendo el sistema: $a=1$ y $b=-2$.

b) Pasa por el punto $(0,1,1)$: $b+1=0$. Por tanto $b=-1$. Si $d(P,\sigma) = \dfrac{|a+1|}{\sqrt{a^2+1}} = 1$ se deduce $|a+1| = \sqrt{a^2+1} \rightarrow (a+1)^2 = a^2+1 \rightarrow a = \dfrac{1}{2}$.

c) $\vec{n} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ a & b & 1 \end{vmatrix} = (1-b, a-1, b-a) = (3,2,5)$. Por tanto $a=3$ y $b=-2$.

Si $r:\begin{cases} x+y+z=1 \\ 3x-2y+z=0 \end{cases}$ tomando $x=0$ y resolviendo el sistema de ecuaciones se obtiene el punto $\left(0,\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$.

**Problema 3**. a)




Si $x=0$ entonces $y=6$. Si $y=0$ entonces $-x^2-x+6=0 \rightarrow x=-3 \wedge x=2$. La solución $x=-3$ se desestima pues no pertenece al dominio de la función.

b). $P(x)=y\cdot x=(-x^2-x+6)\cdot x=-x^3-x^2+6x$.

$P'(x)=-3x^2-2x+6=0 \rightarrow x=-1{,}78 \wedge x=1{,}12$. La solución $x=-1{,}78$ se desestima pues no pertenece al dominio de la función.

En $(0,1.12)$ $P'(x)>0$ creciente; En $(1.12,2)$ $P'(x)<0$ decreciente. Tiene un máximo en $(1.12,4.06)$

c) $\int_0^2 (-x^2-x+6)dx = -\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+6x\Big|_0^2 = -\frac{8}{3}-2+12=\frac{22}{3}$.