Bachillerato de Ciencias y Tecnología	
Soluciones	**Julio de 2013**

Opción A

Problema 1. a) $(AB)^2 = (AB)(AB) = A(BA)B = A(AB)B = (AA)(BB) = A^2B^2$.

b) Como $A^2 = A{\cdot}A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 10 \\ 0 & -3 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 10 \\ 0 & -3 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -14 & 30 \\ 0 & -9 & 19 \end{pmatrix}$, entonces:

$$A^2 - 3A + 2I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -14 & 30 \\ 0 & -9 & 19 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 10 \\ 0 & -3 & 7 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$A^2 - 3A + 2I = 0 \rightarrow A^2 - 3A = -2I \rightarrow A(A-3I) = -2I$. Tomando determinantes:

$|A(A-3I)| = |A||A-2I| = |-2I| = -8$, lo que implica que $|A| \neq 0$ y por tanto existe A^{-1}.

c) $A^3 = A^2A = (3A-2I)A = 3A^2 - 2A = 3(3A-2I) - 2A = 7A - 6I = \alpha A + \beta I$. Y por tanto $\alpha = 7$ y $\beta = -6$.

Problema 2. a) De la recta en forma continua es: $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z-2}{-1}$, se obtienen $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y}{1}$ y $\dfrac{y}{1} = \dfrac{z-2}{-1}$, y por tanto las ecuaciones implícitas son $\begin{cases} x - 2y - 1 = 0 \\ y + z - 2 = 0 \end{cases}$.

b) Como $\vec{u} = (2,1,-1)$, $\vec{v} = (0,1,-2)$ y el vector $\overrightarrow{AB} = (-1,1,-1) - (1,0,2) = (-2,1,-3)$, se calcula el producto mixto: $\left[\overrightarrow{AB}, \vec{u}, \vec{v}\right] = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$ y por tanto las rectas son coplanarias. Como $\vec{n} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -\vec{i} + 4\vec{j} + 2\vec{k} = (-1,4,2)$, la ecuación del plano será del haz −x+4y+2z+D=0, y como $A = (1,0,2)$ es un punto del plano, se tiene que $-1 + 4{\cdot}0 + 2{\cdot}2 + D = 0$ y *D=-3*. La ecuación del plano es $-x + 4y + 2z - 3 = 0$.

c) Para hallar el punto *R* de intersección de las rectas: $\begin{cases} 1 + 2\alpha = -1 \\ \alpha = 1 + \beta \\ 2 - \alpha = -1 - 2\beta \end{cases}$ y se obtiene $\alpha = -1$, $\beta = -2$ y $R(-1,-1,3)$.

Calculamos los vectores:

$\overrightarrow{PQ}=(0,1,2)-(-1,0,1)=(1,1,1)$ y $\overrightarrow{PR}=(-1,-1,3)-(-1,0,1)=(0,-1,2)$. El área del triángulo es: $A=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PR}\right|=\frac{1}{2}\left\|\begin{matrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 1 & 1\\ 0 & -1 & 2\end{matrix}\right\|=\frac{1}{2}\left|(3,-2,-1)\right|=\frac{1}{2}\sqrt{14}$.

Problema 3. a) Las derivadas son: $f'(x)=\frac{1}{2}\frac{1}{\frac{1+x}{1-x}}\frac{2}{(1-x)^2}=\frac{1}{(1+x)(1-x)}=\frac{1}{1-x^2}$ y

$$g'(x)=\frac{1}{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}\frac{1}{2\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}\frac{-2}{(1+x)^2}=\frac{1}{\frac{1-x}{1+x}}\frac{-1}{(1+x)^2}=-\frac{1}{(1-x)(1+x)}=-\frac{1}{1-x^2}$$

b) Para $f(x)$ debe verificarse: $\frac{1+x}{1-x}>0$ y $x\neq 1$ y por tanto $D(f)=(-1,1)$.

Para $g(x)$ debe verificarse: $\frac{1-x}{1+x}>0$ y $x\neq -1$ y por tanto $D(g)=(-1,1)$.

c) La suma es: $f(x)+g(x)=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)+\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)=\frac{1}{2}\ln\left[\frac{(1+x)(1-x)}{(1-x)(1+x)}\right]=\frac{1}{2}\cdot 0=0$

Luego el recorrido de la función es $R=0$.

Opción B

Problema 1.

a) $\begin{pmatrix}7 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 7 & 1 & 1\\ 3 & 5 & 1 & 1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1 & 7 & 1 & 1\\ 3 & 5 & 1 & 1\\ 7 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1 & 7 & 1 & 1\\ 0 & -16 & -2 & -2\\ 0 & -48 & -8 & -8\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1 & 7 & 1 & 1\\ 0 & 8 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$. El sistema queda reducido a $\begin{cases}x+7y+z=1\\ 8y+z=1\end{cases}$ y la solución es: $\left(\frac{1-z}{8},\frac{1-z}{8},z\right)$.

b) y c) Como la 2ª y la 3ª columna coinciden, entonces $r(A)=r(B)$ y el sistema siempre tiene solución.

Calculando el determinante $\begin{vmatrix}\alpha & 1 & 1\\ 1 & \alpha & 1\\ 3 & 5 & 1\end{vmatrix}=\alpha^2-8\alpha+7=(\alpha-7)(\alpha-1)$ se tiene que:

$$\begin{cases}\alpha=7 \text{ o } \alpha=1\rightarrow r(A)=r(B)=2\rightarrow SCI\\ \alpha\neq 7 \text{ y } \alpha\neq 1\rightarrow r(A)=r(B)=3\rightarrow SCD\end{cases}$$

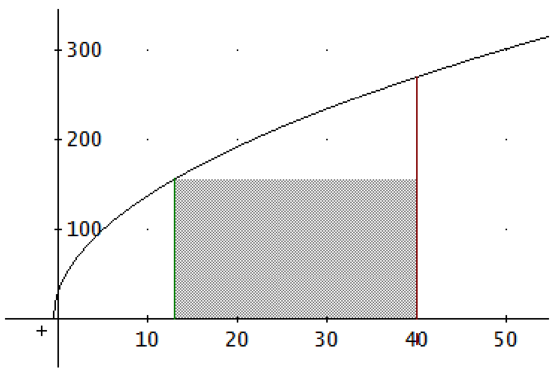
Problema 2. a) La recta r intersección de los planos: $\begin{cases} x-y=-t \\ 2x+y=1-t \end{cases}$ es $\begin{cases} x=1/3-2t/3 \\ y=1/3+t/3 \\ z=t \end{cases}$ que pasa por el punto $A\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},0\right)$ y tiene de dirección $\vec{u}=(-2,1,3)$.

La recta s pasa por el punto $B(1,2,0)$ y tiene de dirección $\vec{v}=(1,1,1)$.

b) Como $\overrightarrow{AB}=(1,2,0)-\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},0\right)=\left(\frac{2}{3},\frac{5}{3},0\right)$, las rectas se cruzan porque el producto mixto es no nulo: $\left[\overrightarrow{AB},\vec{u},\vec{v}\right]=\begin{vmatrix} 2/3 & 5/3 & 0 \\ -2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=7\neq 0$. La distancia entre las dos rectas es: $d(r,s)=\dfrac{\left|\left[\overrightarrow{AB},\vec{u},\vec{v}\right]\right|}{|\vec{u}\times\vec{v}|}=\dfrac{7}{\left\|\begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{matrix}\right\|}=\dfrac{7}{|(-2,5,-3)|}=\dfrac{7}{\sqrt{38}}$.

c) Por ser la t recta perpendicular a r y a s, su vector dirección es: $\vec{w}=\vec{u}\times\vec{v}=(-2,5,3)$ y sus ecuaciones paramétricas: $\begin{cases} x=\dfrac{41}{57}-2\lambda \\ y=-\dfrac{14}{57}+5\lambda \\ z=-3\lambda \end{cases}$.

Problema 3.



a) $A=\int_0^{40}30\sqrt{2x+1}dx=\dfrac{30}{2}\int_0^{40}2(2x+1)^{1/2}dx=10(2x+1)^{3/2}\Big|_0^{40}=7280\ u.a.$

b) El área del rectángulo es: $A_R = (40 - x) \cdot 30\sqrt{2x+1}$.

Derivando: $A_R' = 30\left(-\sqrt{2x+1} + \dfrac{40-x}{\sqrt{2x+1}}\right) = 30\left(\dfrac{-3x+39}{\sqrt{2x+1}}\right) = \dfrac{90(-x+13)}{\sqrt{2x+1}}$, se anula en $x = 13$, donde tiene un máximo, pues $A_R' > 0$ en el intervalo $(0,13)$ y $A_R' < 0$ en el intervalo $(13,40)$.

Los vértices del rectángulo son: $(13,0)$, $(13,90\sqrt{3})$, $(40,0)$ y $(40,90\sqrt{3})$.

c) El valor del área máxima es: $A = 27 \cdot 30\sqrt{27} = 2430\sqrt{3}$.