Bachillerato de Ciencias de la Naturaleza y la Salud	
Soluciones	**Junio de 2012**

OPCIÓN A

Problema 1. a) Cuando $\alpha = 0$ el sistema es: $\begin{cases} 2x = 5 \\ x + y + z = 1 \\ x + 2y = 1 \end{cases}$, de donde se obtiene, por sustitución la solución $\left(\frac{5}{2}, -\frac{3}{4}, -\frac{3}{4}\right)$.

b). Cuando $\alpha = -1$ el sistema es: $\begin{cases} 2x + z = 5 \\ x + 2y + z = 1 \\ x + 2y + z = 1 \end{cases}$. Al haber dos ecuaciones iguales, se elimina una de ellas y el sistema es compatible e indeterminado: Si $x = \lambda$, se obtienen las soluciones $\left(\lambda, \frac{-4+\lambda}{2}, 5 - 2\lambda\right)$.

c) Resolviendo $\begin{vmatrix} 2 & 0 & \alpha^2 \\ 1 & 1-\alpha & 1 \\ 1 & 2 & \alpha^2 \end{vmatrix} = 0$, $-\alpha^3 + 3\alpha^2 - 4 = 0$, se obtiene $\alpha = -1\ y\ \alpha = 2$.

Si $\alpha = -1$ ya está resuelto. Veamos que para $\alpha = 2$ el sistema es incompatible: $\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$ y el *r(A)=2*. Ampliando la matriz: $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 9 \neq 0$ y el *r(B)=3*.

Problema2. Las rectas están definidas por: $r_1 \equiv \begin{cases} A(1,0,2) \\ \vec{u} = (2,1,-1) \end{cases}$ y $r_2 \equiv \begin{cases} B(-1,1,-1) \\ \vec{v} = (0,1,-2) \end{cases}$

a) Para determinar el punto de corte, se resuelve el sistema: $\begin{cases} 1 + 2\alpha = -1 \\ \alpha = 1 + \beta \\ 2 - \alpha = -1 - 2\beta \end{cases}$ y se obtiene el punto $P(-1,-1,3)$

b) La ecuación del plano es $\begin{vmatrix} x-1 & y & z-2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0$ y se obtiene: $-x + 4y + 2z - 3 = 0$.

c) Dado el punto $A(-1,1,-1)$ de la recta r_2 y el punto dado $C(0,0,1)$, obtenemos el vector $\overrightarrow{AC} = (1,-1,2)$.

$$d(C,r_2)=\frac{\left|\overrightarrow{AC}\times\vec{v}\right|}{|\vec{v}|}=\frac{\left\|\begin{matrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & -1 & 2\\ 0 & 1 & -2\end{matrix}\right\|}{|(0,1,-2)|}=\frac{\left|2\vec{j}+\vec{k}\right|}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}=1$$

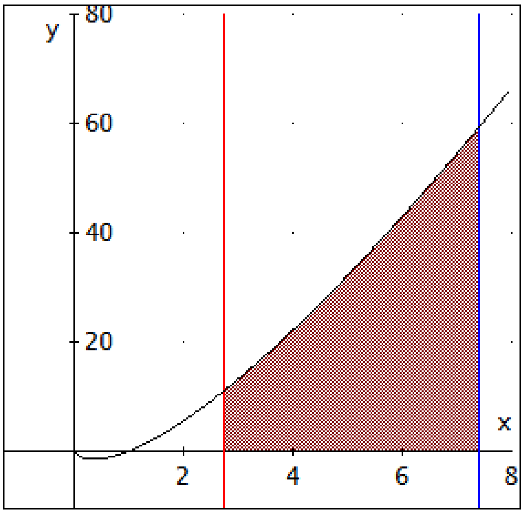
Problema3. a) Calculamos el valor para que $f'(x)=4\ln x+4=0$ que es $x=\frac{1}{e}$.

Es un mínimo ya que $f''(x)=\frac{4}{x}$ y $f''\left(\frac{1}{e}\right)=4e>0$

b) $f'(1)=4$ y la ecuación de la recta tangente es $y-0=4(x-1)$, $y=4x.-4$.

c) $\int 4x\ln x dx=2x^2-\int 2x^2\frac{1}{x}dx=2x^2\ln x-x^2=x^2(2\ln x-1)$, aplicando el método de integración por partes: $\begin{cases} u=\ln x\rightarrow du=\frac{1}{x}dx\\ dv=4xdx\rightarrow v=\int 4xdx=2x^2\end{cases}$

El área será $A=\int_e^{e^2}4x\ln x dx=x^2(2\ln x-1)\Big|_e^{e^2}=e^4\cdot 3-e^2\cdot 1=156{,}4054\,ua$.



OPCIÓN B

Problema1. a) Como $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$, el sistema no admite solución única.

Como $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ y $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0$, *r(A)=r(B)* y el sistema es compatible e indeterminado: $\begin{cases} x + 2z = 1 \\ x + y + 3z = 3 \end{cases}$ y se obtienen las soluciones: $(1-2\lambda, 2-\lambda, \lambda)$.

b) Si $B^2 = B$, se tiene $B^{-1}B^2 = B^{-1}B \Rightarrow B^{-1}BB = B^{-1}B \Rightarrow B = I \Rightarrow |B| = 1$.

c) $A^2 - 9I = O \Rightarrow A^2 = 9I \Rightarrow |A^2| = |A|^2 = 9^4|I| = 9^4 \Rightarrow |A| = 81$.

Problema2. a) La recta y el plano se cortarán en un punto cuando el sistema tenga solución única: $\begin{cases} x - 2y - 2z = 1 \\ x + 5y - z = 0 \\ 2x + y + nz = p \end{cases}$. Esto implica que el *r(A)=r(B)=3* y por tanto:

$\begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 1 & 5 & -1 \\ 2 & 1 & n \end{vmatrix} \neq 0$. Y se obtiene que $7n + 2 \neq 0 \Rightarrow n \neq -\dfrac{23}{7}$.

b) Si la recta está contenida en el plano, el sistema es compatible e indeterminado. Esto implica que el *r(A)=r(B)=2.* Como $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 7 \neq 2 \Rightarrow r(A) = 2$.

Para que *r(B)=2* debe cumplirse que $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & p \end{vmatrix} = 7p - 9 = 0 \Rightarrow p = \dfrac{9}{7}$.

Por tanto es necesario que $n = -\dfrac{23}{7}$ *y* $p = \dfrac{9}{7}$

c) Si la recta no corta al plano y no está contenido en él, el sistema es incompatible: *r(A)=2 y r(B)=3*. Por tanto $n = -\dfrac{23}{7}$ *y* $p \neq \dfrac{9}{7}$.

Problema3. a) El área del triángulo es $A_T(x)=\dfrac{2x(12-x^2)}{2}=12x-x^3$.

b) $A'_T(x)=12-3x^2=0 \Rightarrow x^2=4 \Rightarrow x=\pm 2$. $A''_T(x)=-6x \Rightarrow A''_T(2)=-12<0$

Por tanto alcanza un máximo si los puntos son $B(-2,4)$ y $C(2,4)$.

c) El área de la superficie S es $A_S=2\int_0^2 (4-x^2)dx = 2\left[4x-\dfrac{x^3}{3}\right]_0^2 = 2\left(8-\dfrac{8}{3}\right)=\dfrac{32}{3}\ ua$

d) El área total es $A=A_T+A_S=12\cdot 2-2^3+\dfrac{32}{3}=16+\dfrac{32}{3}=\dfrac{80}{3}\ ua$