Bachillerato de Ciencias de la Naturaleza y la Salud	
Soluciones	**Septiembre de 2011**

Opción A

Problema 1. a) $B = A - kI = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} - k\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -k & -2 \\ 1 & 3-k \end{pmatrix}$. Para que exista la matriz inversa: $|B| = \begin{vmatrix} -k & -2 \\ 1 & 3-k \end{vmatrix} = k^2 - 3k + 2 = (k-1)(k-2) \neq 0$. Hay matriz inversa si $k \neq 1,2$.

b) Si $k = 3$, $B = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B^{-1} = \frac{1}{|B|}(A^*)^t = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1/2 & -3/2 \end{pmatrix}$.

c) Si $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -6 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$, se tiene:

$\alpha\begin{pmatrix} -2 & -6 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = -2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -2\alpha & -6\alpha - 2\beta \\ 3\alpha + \beta & 7\alpha + 3\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ y por la igualdad de matrices se obtiene $\alpha = 1 \; y \; \beta = -3$.

d) $P^2 = (I - M)(I - m) = I - 2M + M^2 = 1 - 2M + M = 1 - M = P$

$$MP = M(I - M) = M - M^2 = M - M = 0$$
$$PM = (I - M)M = M - M^2 = M - M = 0$$

Problema 2. a) El vector $\vec{v}_r = (1,2,1)$ y el vector $\vec{v}_s = (-2,1,3)$ pues la recta *s* en paramétricas es: $\begin{cases} x = 1 - 2s \\ y = s \\ z = 2 + \alpha + 3s \end{cases}$. Las rectas no son paralelas: $\frac{1}{-2} \neq \frac{2}{1} \neq \frac{1}{3}$ y por tanto se cortan: $\begin{cases} 3 + t = 1 - 2s \\ -1 + 2t = s \\ 2 + t = 2 + \alpha + 3s \end{cases}$ para $t = 0, s = -1, \alpha = 3$, en el punto $P(3,-1,2)$.

b) La ecuación del plano viene determinada por los vectores dirección de las rectas y el punto P: $\begin{vmatrix} x-3 & y+1 & z-2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0$ y es en forma general $x - y + z - 6 = 0$.

c) El vector normal del plano es el director de la recta $\vec{n} = (1,2,1)$ y al pasar por el punto *(1,2,1)*: $x + 2y + z + D = 0$; $1 + 2 \cdot 2 + 1 + D = 0$; $D = -6$; $x + 2y + z - 6 = 0$.

Problema 3. a) dominio $D = \Re$ y recorrido $R = [0, \infty)$.

b) $y' = (2x - x^2)e^{-x} = x(2-x)e^{-x}$, que se anula en *x=0* y *x=2*.

$y'' = (x^2 - 4x + 2)e^{-x}$ y se tiene que:

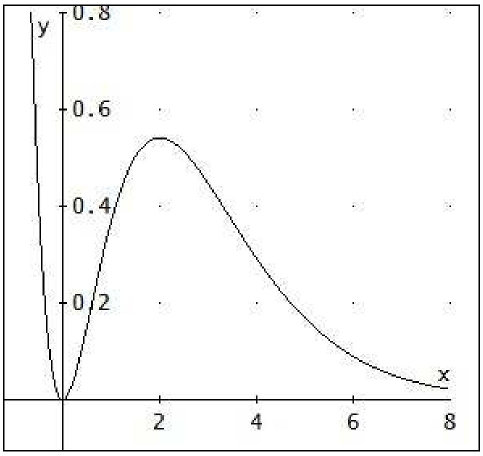
$y''(0) > 0$ mínimo en $(0,0)$ y $y''(2) < 0$ máximo en $(2, 4e^{-2})$.

c) $(-\infty, 0)$ $y' < 0$, decreciente; $(0,2)$ $y' > 0$, creciente; $(2, \infty)$ $y' < 0$, decreciente.

d) $y'' = (x^2 - 4x + 2)e^{-x}$, se anula en $x = 2 - \sqrt{2}$ y en $x = 2 + \sqrt{2}$.

Como en $(-\infty, 2-\sqrt{2})$ $y'' > 0$, $(2-\sqrt{2}, 2+\sqrt{2})$ $y'' < 0$, $(2+\sqrt{2}, \infty)$ $y'' > 0$, entonces los puntos donde se anula la 2ª derivada son puntos de inflexión.

e) $\lim_{x\to\infty} x^2 e^{-x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{e^x} = 0$, aplicando la regla de L'Hôpital.



<u>Opción B</u>

Problema 1. a) $\left|\frac{1}{2}T\right| = \left(\frac{1}{2}\right)^3 |T| = \frac{1}{8}\sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{8}$.

b) $\left|M^4\right| = |M|^4 = 6^4 01296$, pues $|M| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 6$.

c) como $\left|T^{-1}\right| = \frac{1}{|T|}$, se tiene que $\left|TM^3T^{-1}\right| = |T||M|^3 \frac{1}{|T|} = |M|^3 = 6^3 = 216$.

Problema 2. a) Sustituyendo el punto *(1,1,0)* en la ecuación del plano:

$(2+2\alpha)\cdot 1 + 1 + \alpha \cdot 0 - 2 - 6\alpha = 0$, se obtiene $\alpha = \frac{1}{4}$. Sustituyendo este valor en la familia de planos se obtiene $10x + 4y + z - 14 = 0$.

b) El vector normal de la familia de planos dependientes de α es $(2+2\alpha,1,\alpha)$ y vector $\vec{v}=(4,1,1)$ de la recta *r* que tiene la siguiente expresión en paramétricas: $\begin{cases} x=4t \\ y=t \\ z=t \end{cases}$ deben ser perpendiculares. Por tanto se debe cumplir $(4,1,1)\cdot(2+2\alpha,1,\alpha)=0$

Se obtiene $\alpha=-1$ y al sustituir el valor se obtiene el plano: $y-z+4=0$.

c) El vector normal del plano y el vector director de la recta han de ser paralelos:

$\frac{2+2\alpha}{4}=\frac{1}{1}=\frac{\alpha}{1}$. Al ser $\alpha=1$, se obtiene el plano: $4x+y-z-8=0$

Problema 3. a) La función es la distancia entre el punto fijo $A(0,9)$ y el punto $B\left(x,\frac{36-x^2}{2}\right)$ de la parábola: $f(x)=\frac{1}{2}\sqrt{x^4-32x^2+324}$ con $x\in[-6,6]$

b) $f'(x)=\frac{1}{2}\frac{4x^3-64x}{\sqrt{x^4-32x^2+324}}=\frac{x^3-16x}{\sqrt{x^4-32x^2+324}}=\frac{x(x-4)(x+4)}{\sqrt{(x^2-16)^2+68}}$.

Se anula *x=0,-4,4.* Y como:

$(-6,-4)$ $y'<0$ decreciente; $(-4,0)$ $y'>0$ creciente

$(0,4)$ $y'<0$ decreciente; $(4,\infty)$ $y'>0$ creciente

Presenta los mínimos relativos en $f(-4)=f(4)=\sqrt{17}$

c) Añadiendo los valores $f(0)=9$, $f(-6)=f(6)=\sqrt{117}$

Se observa que la mayor distancia es $\sqrt{117}$ y la menor distancia es 9.

d) $\int_{-6}^{6}\left(\frac{36-x^2}{2}\right)dx=2\int_{0}^{6}\left(18-\frac{x^2}{2}\right)dx=2\left(18x-\frac{x^3}{6}\right)\Big|_0^6=144$