| Bachillerato de Ciencias de la Naturaleza y la Salud | |
|---|---|
| **Soluciones** | **Junio de 2008** |

## Bloque 1: ÁLGEBRA LINEAL

**P.1.1.** a) La matriz del sistema es: $\begin{pmatrix} \alpha & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \alpha & 1 \end{pmatrix}$.

Como $\begin{vmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 1 & 1 & \alpha \end{vmatrix} = (\alpha-1)^2(\alpha+2)$ se tiene: $\begin{cases} \alpha \neq 1 \; y \; \alpha \neq -2 \quad r(A)=r(B)=3 \quad SCD \\ \alpha = 1 \quad r(A)=r(B)=1 \quad SCI \\ \alpha=-2 \quad r(A)=2, r(B)=3 \quad SI \end{cases}$

b) Utilizando la regla de Cramer se obtienen la soluciones del SCD:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 1 & 1 & \alpha \end{vmatrix}}{(\alpha-1)^2(\alpha+2)} = \frac{1}{\alpha+2}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{(\alpha-1)^2(\alpha+2)} = \frac{1}{\alpha+2}, \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 1 & 1 & \alpha \end{vmatrix}}{(\alpha-1)^2(\alpha+2)} = \frac{1}{\alpha+2}$$

c) Si $\alpha = 0$, el sistema es compatible y determinado con soluciones: $x = y = z = \frac{1}{2}$.

**P.1.2.** a) $A^2 = \begin{pmatrix} 17 & 29 \\ -10 & -17 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 17 & 29 \\ -10 & -17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -I$. $A^3 = A^2 \cdot A = -IA = -A$.

b) $(A+I)^3 = I + 3A + 3A^2 + A^3 = I + 3A - 3I - A = -2I + 2A = \alpha I + \beta A$. Por tanto: $\alpha = -2 \; y \; \beta = 2$.

## Bloque 2: GEOMETRÍA

**P.2.1.** a) El punto genérico de la recta es $C(5+t, t, -2-2t)$. Si $d(A,C) = d(B,C)$ y como $d(A,C) = \sqrt{(3+t)^2 + (t-1)^2 + (-3-2t)^2}$, $d(B,C) = \sqrt{(4+t)^2 + t^2 + (-1-2t)^2}$ se obtiene $t = -1/2$ y el punto de la recta es $C(9/2, -1/2, -1)$.

b) El área del triángulo es $\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{CA} \times \overrightarrow{CB}\right| = \frac{1}{2}\left\| \begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -5/2 & 3/2 & 2 \\ -7/2 & 1/2 & 0 \end{matrix} \right\| = \frac{\sqrt{114}}{4}$.

**P.2.2.** a) $y = -z, \; x = 1 - 2z$ y por tanto $r \equiv \begin{cases} x = 1-2t \\ y = -t \\ z = t \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} 2s \\ 1+s \\ 3-s \end{cases}$.

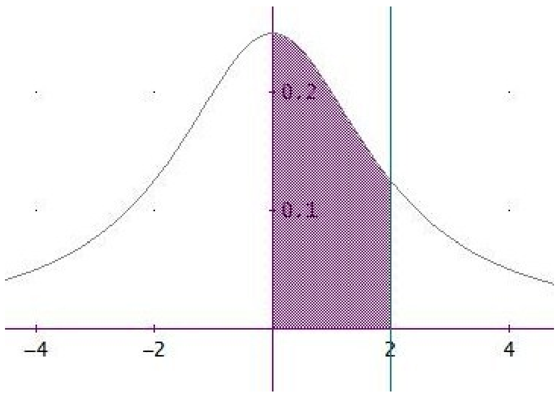
b) Los vectores dirección de las rectas son proporcionales: $\frac{-2}{2}=\frac{-1}{1}=\frac{1}{-1}$ y como el punto $P(1,0,0)$ de la recta *r* no pertenece a la recta *s*, las rectas son paralelas estrictas.

c) $d(r,s)=d(P,s)=\dfrac{\left|\overrightarrow{QP}\times\vec{v}\right|}{\left|\vec{v}\right|}=\dfrac{\left\|\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & -1 & -3\\ 2 & 1 & -1\end{vmatrix}\right\|}{\left|(2,1,-1)\right|}=\dfrac{\sqrt{50}}{6}=\sqrt{\dfrac{25}{3}}$, siendo $Q(0,1,3)\in s$ y $\vec{v}$ el vector director de la recta s.

## Bloque 3: ANÁLISIS

**P.3.1.** a) $\int_0^2\frac{dx}{4+x^2}=\frac{1}{2}\int_0^2\frac{1/2}{1+(x/2)^2}dx=\frac{1}{2}arctg\left(\frac{x}{2}\right)\Big|_0^2=\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{8}$.

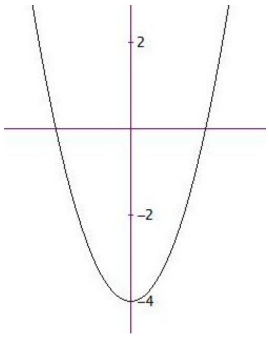
b) Si $\int_0^\alpha\frac{dx}{4+x^2}=2\int_\alpha^2\frac{dx}{4+x^2}$, se deduce $\frac{1}{2}arctg\left(\frac{x}{2}\right)\Big|_0^\alpha=arctg\left(\frac{x}{2}\right)\Big|_\alpha^2$, $\frac{3}{2}arctg\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{\pi}{4}$, $arctg\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{\pi}{6}$, $\frac{\alpha}{2}=tg\left(\frac{\pi}{6}\right)$, y por tanto $\alpha=\frac{2\sqrt{3}}{3}$.




**P.3.2.** a) La gráfica es una parábola: Puntos de corte en $x=-2\ y\ x=2$. Derivando $y'=2x$ y $y''=2>0$ por tanto el vértice $V(0,4)$ es un mínimo.

*b)* $g(x)=\ln(x^2-4)$, tiene de dominio $D=(-\infty,-2)\cup(2,\infty)$.

c) $g'(x)=\frac{2x}{x^2-4}$ se anula en $x<-2\ g'(x)<0\quad x=0$. Entonces si $x<-2\ g'(x)<0$ es decreciente y si $x>2\ g'(x)>0$ es creciente.




## Bloque 4: RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

**P.4.1.** La superficie de la hoja es $S = (x+4)(y+2)$ y la superficie escrita $xy = 18$.

Despejando y sustituyendo: $S = 26 + 2x + \frac{72}{x}$. Derivando: $S' = -\frac{72}{x^2} + 2x$ y se anula en $x = 6$. Como $S'' = \frac{144}{x^3}$ y $S''(6) > 0$ es un mínimo. Las dimensiones de la hoja son de 10 cm y 5 cm y la superficie impresa es de 18 cm$^2$.

**P.4.2.** Si *x* es la base mayor e *y* la altura se tiene: $sen\alpha = \frac{y}{40}$, $\cos\alpha = \frac{x-20}{40}$.

El área del trapecio es: $A = \frac{20+x}{2}y = 800(1+\cos\alpha)sen\alpha$, después de sustituir y simplificar. $A' = 800(-sen^2\alpha + (1+\cos\alpha)\cos\alpha) = 800(-1+2\cos^2\alpha + \cos\alpha)$. Igualando a cero y resolviendo la ecuación se obtiene $\cos\alpha = \frac{1}{2}$ como solución válida y $\alpha = \frac{\pi}{6} = 60^{\circ}$. Volviendo a derivar: $A''(\alpha) = 800(-4sen\alpha{\cdot}\cos\alpha - sen\alpha)$ y $S''(\pi/6) < 0$, que corresponde a un máximo. Las dimensiones del trapecio son $x = 20 + 40{\cdot}\cos\frac{\pi}{6} = 40$ e $y = 40{\cdot}sen\frac{\pi}{6} = 20\sqrt{3}$. Por tanto el área es $A = 600\sqrt{3}$.