Bachillerato de Ciencias de la Naturaleza y la Salud	
Soluciones del ejercicio A	**Septiembre de 2007**

Bloque 1: ÁLGEBRA LINEAL

P.1.1. a) El determinante: $\begin{vmatrix} 6 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -50 \neq 0$ y por *tanto r(A)=r(B)=3* y el sistema es siempre compatible y determinado independientemente del parámetro.

b) Resolviendo por Cramer se tiene:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 6 \\ \alpha & 3 & 2 \end{vmatrix} = 10\alpha - 50,\ \Delta_y = \begin{vmatrix} 6 & 5 & 2 \\ 3 & 3 & 6 \\ 1 & \alpha & 2 \end{vmatrix} = 30 - 30\alpha,\ \Delta_z = \begin{vmatrix} 6 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & \alpha \end{vmatrix} = 15\alpha - 20$$

Por tanto $x = \frac{10\alpha - 50}{-50} = \frac{5-\alpha}{5}$, $y = \frac{30-30\alpha}{-50} = \frac{3\alpha - 3}{5}$, $z = \frac{15\alpha - 20}{-50} = \frac{4 - 3\alpha}{10}$.

c) $\frac{5-\alpha}{5} + \frac{3-3\alpha}{5} + \frac{4-3\alpha}{10} = 1$, lo que significa $\alpha = 2$

P.1.2. a) $\begin{pmatrix} 6 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $\begin{cases} 6x + 4y = \alpha x \\ -x + y = \alpha y \end{cases}$, $\begin{cases} (6-\alpha)x + 4y = 0 \\ -x + (1-\alpha)y = 0 \end{cases}$. Para que el sistema tenga una única solución el determinante del sistema no ha de ser nulo:

$\begin{vmatrix} 6-\alpha & 4 \\ -1 & 1-\alpha \end{vmatrix} = \alpha^2 - 7\alpha + 10 = (\alpha - 2)(\alpha - 5)$. Si $\alpha \neq 2$ *ó* $\alpha \neq 5$ el sistema homogéneo tiene como única solución (0,0).

b) $\begin{cases} 4x + 4y = 0 \\ -x - y = 0 \end{cases}$, es un sistema compatible indeterminado con soluciones (x, x).

Bloque 2: GEOMETRÍA

P.2.1. a) $d(Q,\pi) = \frac{|2\cdot 2 + 1 + 3\cdot 3 - 1|}{\sqrt{4+1+9}} = \frac{13}{\sqrt{14}}$.

b) $P_1(1/2,0,0)$, $P_2(0,1,0)$, $P_3(0,0,1/3)$ son los puntos de corte con los ejes. Los vectores $\overrightarrow{P_1P_2} = (-1/2,1,0)$ y $\overrightarrow{P_1P_3} = (-1/2,0,1/3)$ caracterizan el triángulo.

El área del triángulo es $\frac{1}{2}\left\| \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1/2 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1/3 \end{vmatrix} \right\| = \frac{\sqrt{14}}{12}$.

c) El volumen del tetraedro es $\frac{1}{6}\left[\overrightarrow{P_1P_2},\overrightarrow{P_1P_3},\overrightarrow{P_1Q}\right]=\frac{1}{6}\left\|\begin{matrix}-1/2 & 1 & 0\\ -1/2 & & 1/3\\ 3/2 & 1 & 3\end{matrix}\right\|=\frac{13}{66}$.

P.2.2. a) $\cos\alpha=\frac{|n\cdot n'|}{|n|\cdot|n'|}=\frac{|(1,2,1)\cdot(2,1,-1)|}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{6}}=\frac{1}{2}$ y entonces $\alpha=60^{\circ}$.

b) $\begin{cases}x+2y=3-t\\ 2x+y=6+t\end{cases}$ y resolviendo el sistema indeterminado $\begin{cases}x=3+t\\ y=-t\\ z=t\end{cases}$

c) $\frac{|x+2y+z+3|}{\sqrt{6}}=\frac{|2x+y-z-6|}{\sqrt{6}}$, que da origen a dos planos bisectores, $\begin{cases}x-y-2z-9=0\\ x+y-1=0\end{cases}$ que siempre son ortogonales.

Bloque 3: ANÁLISIS

P.3.1. a) $\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{4x^2+2x+10}{(x+1)(x^2+5)}$ tiene una asíntota vertical: $x=-1$, que es donde no está definida y una asíntota horizontal: $y=0$. Pues $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=0$.

b) $H(x)=\int\frac{f(x)}{g(x)}dx=\int\frac{Ax+B}{x^2+5}dx+\int\frac{C}{x+1}dx=\int\frac{2}{x^2+5}dx+\int\frac{2}{x+1}dx$ consecuencia de obtener mediante $4x^2+2x+10=(Ax+B)(x+1)+C(x^2+5)$ los coeficientes. Por tanto $H(x)=\frac{2}{\sqrt{5}}arctg\left(\frac{x}{\sqrt{5}}\right)+2\ln|x+1|+C$. Si $H(0)=\frac{2}{\sqrt{5}}arctg0+2\ln 1+C=0$, resulta que la primitiva pedida es $H(x)=\frac{2}{\sqrt{5}}arctg\left(\frac{x}{\sqrt{5}}\right)+2\ln|x+1|$.

P 3.2. a) $f'(x)=-\frac{4}{x^2}$, $f'(2)=-1$ y $P(2,2)$. Por tanto la ecuación de la recta tangente es $y-2=-1(x-2)$, es decir $y=-x+4$. La ecuación de la recta normal es $y-2=1(x-2)$, es decir $y=x$.

b) Las rectas tangentes, para un punto genérico $P(x_0,y_0)$, tienen de ecuación $y-y_0=-\frac{4}{x_0{}^2}(x-x_0)$. Como las tangentes deben pasar por el punto $P(4,-8)$, se debe cumplir la ecuación $-8-y_0=-\frac{4}{x_0^{\;2}}(4-x_0)$. Además, se cumplirá la ecuación $y_0=\frac{4}{x_0}$. Resolviendo el sistema se obtienen los puntos $M(-1,4)$ y $N(-2,2)$.

Bloque 4: RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

P.4.1. Calculando el límite del cociente de las dos sucesiones:

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2+n\sqrt[4]{n^3}}{n^2-2n+10}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{n^{7/4}+2}{n^2-2n+10}=0$, debido a los exponentes de las potencias de mayor grado. En consecuencia, cuando n es grande, A procesa los datos con menos operaciones que B.

P 4.2. a) El punto más próximo es el origen de coordenadas. Cualquier otro punto del segmento está más alejado por ser la hipotenusa de un triángulo rectángulo frente a un cateto. En este caso la distancia es $d=2$.

b) La distancia entre el surtidor $P(0,2)$ y un punto de la parábola $Q(x,4-x^2)$ es $d(x)=\sqrt{x^2+(2-x^2)^2}$. Los valores que hacen mínima $d(x)$ serán los mismos que hacen mínimo $d(x)^2$. Derivando esta función e igualando a cero:

$4x^3-6x=0$, se obtienen las soluciones: $x=-\frac{\sqrt{6}}{2},\frac{\sqrt{6}}{2},0$. Sustituyendo estos valores en la función se obtiene el mínimo en $x=-\frac{\sqrt{6}}{2}\ y\ \frac{\sqrt{6}}{2}$ con valor $d=\frac{\sqrt{7}}{2}$.

c) Aunque debemos considerar también el tramo rectilíneo, la distancia mínima está en los dos puntos de la parábola obtenidos antes.