Bachillerato de Ciencias de la Naturaleza y la Salud	
Soluciones	**Junio de 2007**

Bloque 1: ÁLGEBRA LINEAL

P.1.1. a) $|3\cdot B(x)| = 3|B(x)| = 3\begin{vmatrix} x+2 & 4 & 6 \\ 2x+3 & 3 & 6 \\ 4x+4 & 2 & 6 \end{vmatrix} = 162$. Por Sarrus $18x = 162$ y $x = 9$.

b) Como $|C(y)| = \begin{vmatrix} 3y+5 & 7 & 12 \\ 2y+3 & 3 & 6 \\ 3y+4 & 2 & 6 \end{vmatrix} = 0$ para cualquier valor de *y* no tiene inversa.

P.1.2. a) La matriz del sistema es: $\begin{pmatrix} 1 & \alpha & 1 & 9 \\ 3 & 5 & 1 & 9 \\ \alpha & 1 & 1 & 9 \end{pmatrix}$.

Como $\begin{vmatrix} 1 & \alpha & 1 \\ 3 & 5 & 1 \\ \alpha & 1 & 1 \end{vmatrix} = (\alpha - 1)(\alpha - 7)$ se tiene: $\begin{cases} \alpha \neq 1 \ y \ \alpha \neq 7 & r(A) = r(B) = 3 \quad SCD \\ \alpha = 1 & r(A) = r(B) = 2 \quad SCI \\ \alpha = 7 & r(A) = r(B) = 2 \quad SCI \end{cases}$

b) Por Gauss: $\begin{pmatrix} 1 & 7 & 1 & 9 \\ 3 & 5 & 1 & 9 \\ 7 & 1 & 1 & 9 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 7 & 1 & 9 \\ 0 & -16 & -2 & -18 \\ 0 & -48 & -6 & -54 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 7 & 1 & 9 \\ 0 & -16 & -2 & -18 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

se obtiene: $x = \lambda,\ y = \lambda,\ z = 8 - 8\lambda$.

Bloque 2: GEOMETRÍA

P.2.1. a) Las rectas en parámetricas: $r: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = \frac{1}{2} - 3t \\ z = \frac{3}{2} + 3t \end{cases}$ $s: \begin{cases} x = 3 - 2s \\ y = -\frac{3}{2} + s \\ 1 + 4s \end{cases}$. Resolviendo el sistema: $\begin{cases} 1 + 2t = 3 - 2s \\ \frac{1}{2} - 3t = -\frac{3}{2}s \end{cases}$ se obtiene $t = \frac{1}{2}\ y\ s = \frac{1}{2}$ y por tanto $P(2,-1,3)$.

b) Los vectores son $\vec{u} = (2,-3,3)$ y $\vec{v} = (-2,1,4)$. Por tanto, para calcular el ángulo que forman las rectas: $\cos\alpha = \frac{|(2,-3,3)\cdot(-2,1,4)|}{\sqrt{22}\cdot\sqrt{21}} = \frac{5}{\sqrt{462}}$ y $\alpha \approx 75'55^{\circ}$.

c) $\begin{vmatrix} x-1 & y-\frac{1}{2} & z-\frac{3}{2} \\ 2 & -3 & 3 \\ -2 & 1 & 4 \end{vmatrix}$ =0 y la ecuación del plano es $-15x-14y-4z+28=0$.

P.2.2. a) Si $A(-2.0,1)$ es un punto de la recta **r**, $\vec{u}=(3,-2,4)$ y $Q(3,-1,4)$ el punto exterior, $d(Q,r)=\dfrac{\left|\overrightarrow{AQ}\times\vec{u}\right|}{|\vec{u}|}=\dfrac{\left\|\begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 5 & -1 & 3 \\ 3 & -2 & 4 \end{matrix}\right\|}{|(3,-2,4)|}=\dfrac{|(2,-11,-7)|}{|(3,-2,4)|}=\dfrac{\sqrt{174}}{\sqrt{29}}=\sqrt{6}$.

b) Porque los vectores $\vec{u}=(3,-2,4)$, $\vec{v}=(1,-1,1)$ y $\overrightarrow{AQ}=(5,-1,3)$ son linealmente independientes: $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 5 & -1 & 3 \end{vmatrix}\neq 0$.

c) $d(r,s)=\dfrac{\left|\left[\vec{u},\vec{v},\overrightarrow{AQ}\right]\right|}{|\vec{u}\times\vec{v}|}=\dfrac{\left\|\begin{matrix} 3 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 5 & -1 & 3 \end{matrix}\right\|}{\left\|\begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \end{matrix}\right\|}=\dfrac{|-10|}{|(2,1-1)|}=\dfrac{10}{\sqrt{6}}$.

Bloque 3: ANÁLISIS

P.3.1. a) Asíntota oblicua: $m=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)\cdot x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{12x^3-8x^2+9x-5}{6x^3-7x^2+2x}=2$.

$b=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}-2x\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^2+5x-5}{6x^2-7x+2}=1$. La ecuación es $y=2x+1$.

Como $6x^2-7x+2=6\left(x-\dfrac{2}{3}\right)\left(x-\dfrac{1}{2}\right)$, las asíntotas verticales son $x=\dfrac{1}{2}$ y $x=\dfrac{2}{3}$.

b) $H(x)=\displaystyle\int\frac{12x^3-8x^2+9x-5}{6x^2-7x+2}dx=\int(2x+1)dx+\int\frac{12x-7}{6(x-1/2)(x-3/2)}dx$.

Aplicando descomposición fracciones: $\dfrac{A}{x-1/2}+\dfrac{B}{x-3/2}=\dfrac{12x-7}{(x-1/2)(x-3/2)}$ se obtienen los valores $A=B=6$.

$$H(x) = x^2 + x + \frac{1}{6}\left(\int \frac{6}{x-1/2}dx + \int \frac{6}{x-3/2}dx\right) = x^2 + x + \ln|x-2/3| + \ln|x-1/2| + C.$$

$H(1) = 2 + \ln(1/3) + \ln(1/2) + C = 1$. Y por tanto $C = -1 + \ln 3 + \ln 2 = \ln 6 - 1$.

P.3.2. a) Si $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ se tiene que $y' = 3x^2 + 2ax + b$. Se debe cumplir:

$\begin{cases} y'(2) = 12 + 4a + b = 0 \\ y'(4) = 48 + 8a + b = 0 \end{cases}$. Resolviendo el sistema: $y = x^3 - 9x^2 + 24x + c$.

b) En el punto de inflexión la derivada 2ª se anula: $y'' = 6x - 18 = 0$. Luego se presenta en $x = 3$. Como además ha de ser un punto del eje OX: $y(3) = 18 + c = 0$.

Luego la función será: $y = x^3 - 9x^2 + 24x - 18$.

<u>Bloque 3: RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS</u>

P.4.1. $y = 100x + 250\dfrac{40-5x}{10-x}$. Derivando: $y' = 100 - \dfrac{2500}{(10-x)^2}$ e igualando a cero:

$(10-x)^2 = 25$ tiene de soluciones $x = 15$ (no válida) por superar la producción máxima y $x = 5$. Derivando de nuevo y sustituyendo el valor obtenido:

$y'' = \dfrac{5000}{(10-x)^3}$, $y''(5) < 0$ que corresponde a un máximo.

P.4.2. $A = 2x \cdot y = 2x(12 - x^2) = 24x - 2x^3$. Derivando e igualando a cero: $y' = 24 - 6x^2 = 0$, se tiene $x = 2$. Volviendo a derivar: $y'' = -12x$ y como $y''(2) < 0$ corresponde a un máximo Por tanto el cartel medirá 4x8.