| Bachillerato de Ciencias de la Naturaleza y la Salud | |
|---|---|
| **Soluciones del ejercicio A** | **Septiembre de 2006** |

**Problema 1.** a) El determinante: $\begin{vmatrix} \lambda+2 & -1 & 1 \\ 3 & \lambda+6 & -3 \\ 5 & 5 & \lambda-2 \end{vmatrix} = \lambda^3+6\lambda^2+9\lambda = \lambda(\lambda+3)^2$

Por tanto la solución *(0,0,0)* se verifica si $\lambda \neq 0 \ y \ \lambda \neq -3$.

b) Si $\lambda = 0$, el sistema resulta ser: $\begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ 3x + 6y - 3z = 0 \\ 5x + 5y - 2z = 0 \end{cases}$. Resolviendo por Gauss:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 6 & -3 & 0 \\ 5 & 5 & -2 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 6 & 3 & -3 & 0 \\ 5 & 5 & -2 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 15 & 3 & 0 \\ 0 & 15 & 3 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 15 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

se obtiene como solución *(x,-3x,-5x)*.

Si $\lambda = -3$, $\begin{cases} -x - y + z = 0 \\ 3x + 3y - 3z = 0 \\ 5x + 5y + z = 0 \end{cases}$. Y por Gauss: $\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & -3 & 0 \\ 5 & 5 & 1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \end{pmatrix}$

Se obtiene como solución *(-y,y,0)*.

c) Si $\lambda = -3$ se obtienen los dos planos coincidentes y el tercero corta a esos dos en una recta que pasa por el origen de coordenadas.

**Problema 2.** a) Resolviendo el sistema $\begin{cases} 2x - 2y - z = 9 \\ 4x - y + z = 42 \end{cases}$ se obtienen las ecuaciones paramétricas de la recta *r*: $\left( \dfrac{25-t}{2}, 8-t, t \right)$. Como un vector director de la recta *s* es *(1,-4,1)* sus ecuaciones pararmétricas son: *(1+s,3-4s,-4+s)*.

b) Como los vectores de las rectas no son proporcionales las rectas se cruzan o se cortan. Como el sistema $\begin{cases} 12{,}5 - 0{,}5t = 1 + s \\ 8 - t = 3 - 4s \\ t = -4 + s \end{cases}$ es incompatible las rectas se cruzan.

c) $\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & -2 & 2 \\ 1 & -4 & 1 \end{vmatrix} = (2{,}1{,}2)$ es un vector dirección de la perpendicular común. El vector que une dos puntos genéricos de las rectas debe ser paralelo a este vector:

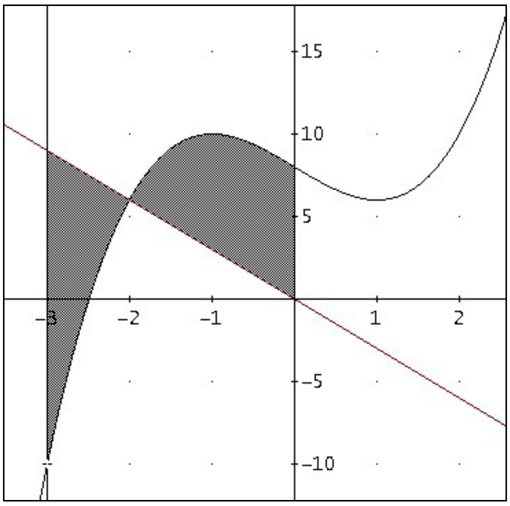
$\frac{1+s-(12{,}5-0{,}5t)}{2}=\frac{3-4s-(8-t)}{1}=\frac{-4+s-t}{2}$. Este sistema da como soluciones: *s=1* y *t=5*. Sustituyendo el valor de de *s* en la recta correspondiente se obtiene le punto *P(2,-1,-3).*

**Problema 3.** a) $f'(x)=3x^2-3$ que se anula en $x=3\ y\ x=-3$**.** Por tanto el posible máximo absoluto estará en: $f(-3)=-10$, $f(0)=8$, $f(-1)=10$. Luego el máximo absoluto se alcanza en el punto *(-1,10)*.

b) Resolviendo la ecuación: $x^3-3x+8=-3x$, se obtiene el punto de corte *(-2,6).*

c) $\int_{-3}^{2}\left[-3x-(x^3-3x+8)\right]dx+\int_{-2}^{0}\left[x^3-3x+8-(-3x)\right]dx=\int_{-3}^{2}(-x^3+8)dx+\int_{-2}^{0}(x^3-8)dx$

Y se obtiene aplicando la regla de Barrow: $-\frac{x^4}{4}+8x\Big|_{-3}^{2}+\frac{x^4}{4}\Big|_{-2}^{0}=\frac{33}{4}+12=\frac{81}{44}$.




**Problema 4.** a) Como $r=1{,}8t$, la superficie quemada, en función del tiempo, es: $S=\pi\cdot r^2=\pi\cdot(1{,}8t)^2=3{,}24\cdot\pi\cdot t^2$.

b) La velocidad de crecimiento es: $v=S'=6{,}48\cdot\pi\cdot t$. El radio es de *45 m* en el instante $t=\frac{45}{1{,}8}=25$ *min*. Entonces la velocidad de crecimiento del área quemada en ese instante es: $v(25)=6{,}48\cdot\pi\cdot 25\approx 509$ *m²/min*.

| Bachillerato de Ciencias de la Naturaleza y la Salud | |
|---|---|
| **Soluciones del ejercicio B** | **Septiembre de 2006** |

**Problema 1.** a) $\left|A^3\right| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & -3 \end{vmatrix} = -1$. Calculando los adjuntos correspondientes se obtiene: $(A^3)^{-1} = -\begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ -6 & -7 & -4 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -4 & -2 \\ 6 & 7 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

b) Si $XA^3 = BA^2$, entonces $X = BA^2(A^3)^{-1}$ y sustituyendo las diferentes matrices se obtiene: $X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & -4 & -2 \\ 6 & 7 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 2 \end{pmatrix}$.

c) $A^2A = A^3$, multiplicando por la inversa *A*: $A^2AA^{-1} = A^3A^{-1}$ y $A^2I = A^2 = A^3A^{-1}$.
Multiplicando por la inversa de $A^3$: $(A^3)^{-1}A^2 = (A^3)^{-1}A^3A^{-1} = A^{-1}$.

Sustituyendo se obtiene: $A^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & -4 & -2 \\ 6 & 7 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

**Problema 2.** a) El plano que tiene como vectores dirección *(-2,2,1)* y *(2,1,2)* es $\begin{vmatrix} x-11 & y-1 & z-2 \\ -2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 3x + 6y - 6z - 27 = 0$ y simplificando: *x+2y-2z-9=0*.

La recta, resolviendo el sistema $\begin{cases} x + y + z = 15 \\ 2x - 7y + 2z = 3 \end{cases}$ es en paramétricas: *(15-t,3,t)*.

b) El punto de intersección se obtiene sustituyendo un punto genérico de la recta en la ecuación del plano: $15 - t + 2{\cdot}3 - 2t - 9 = 0$. Como *t=4*, el punto es el *(11,3,4)*.

El ángulo $\alpha$ se obtiene $sen\alpha = \dfrac{\left|(1,2,-2)\cdot(-1,0,1)\right|}{3\cdot\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ y corresponde a 45º.

c) $d(P,\pi) = \dfrac{\left|15 - t + 6 - 27 - 9\right|}{3} = \dfrac{\left|12 - 3t\right|}{3} = 3$. Resolviendo la ecuación, se obtienen los puntos: $t = 1 \rightarrow M(14,3,1)$ y $t = 7 \rightarrow N(8,3,7)$.

**Problema 3.** a) $y' = a + \cos x$. Si pasa por el origen: $0 = a + b + sen0$ y *b=0*. Si la recta tangente en el origen es horizontal: $y'(0) = a + \cos 0 = 0$ y *a=-1*.

b) $g(0)=0$, $g(\pi)=-2<0$ y $g(\frac{\pi}{4})=\frac{\sqrt{2}-1}{2}>0$. Como la función es continua en el intervalo $\left[\frac{\pi}{4},\pi\right]$ y cambia de signo en los extremos del intervalo, hay un punto del interior del intervalo en que se anula. Por tanto hay dos puntos en el intervalo $[0,\pi]$ que se anula.

c) Los puntos son *(0,0)* y $\left(\frac{\pi}{2},0\right)$ pues $g(0)=0$ y $g(\frac{\pi}{2},0)=0$.

**Problema 4.** a) si la distancia al poste más bajo es *x*, la distancia al poste más alto es *5-x* y la función de la longitud total es $f(x)=\sqrt{9+x^2}+\sqrt{16+(5-x)^2}$ .

b) Derivando e igualando a cero: $f'(x)=\frac{2x}{2\sqrt{9+x^2}}-\frac{2(5-x)}{2\sqrt{16+(5-x)^2}}=0$ que simplificando da la ecuación $7x^2+90x-225=0$ cuya solución válida es $x=\frac{15}{7}$. Entonces la otra distancia es $5-x=\frac{20}{7}$. Se comprueba que las pendientes son iguales, en valor absoluto: $m_1=\frac{3}{15/7}=\frac{7}{5}$ y $m_2=\frac{4}{20/7}=\frac{7}{5}$.

La longitud mínima es: $f(15/7)=\sqrt{9+(15/7)^2}+\sqrt{16+(20/7)^2}\approx 8{,}6\ m$ .