

Bachillerato de Ciencias de la Naturaleza y la Salud	
EJERCICIO A	Septiembre de 2006

Problema 1. Dado el sistema de ecuaciones con un parámetro real λ e incógnitas

$$x, y, z, \begin{cases} (\lambda + 2)x - y + z = 0 \\ 3x + (\lambda + 6)y - 3z = 0 \\ 5x + 5y + (\lambda - 2)z = 0 \end{cases} \text{ se pide:}$$

- Calcular para qué valores de λ el sistema sólo admite la solución $(x, y, z) = (0, 0, 0)$.
- Para cada valor de λ que hace indeterminado el sistema, obtener todas sus soluciones.
- Explicar la posición relativa de los tres planos definidos por cada una de las ecuaciones del sistema cuando $\lambda = 3$.

Problema 2. En el espacio se consideran:

- La recta r intersección de los planos de ecuaciones implícitas $2x - 2y - z = 9$ y $4x - y + z = 42$.
- Y la recta s que pasa por los puntos $(1, 3, -4)$ y $(3, -5, -2)$. Se pide:
 - Calcular las ecuaciones paramétricas de la recta r y de la recta s .
 - Justificar que las rectas r y s se cruzan.
 - Calcular un vector direccional de la recta t , perpendicular común a las rectas r y s y calcular el punto P de intersección de las rectas s y t .

Problema 3. Dadas las funciones $f(x) = x^3 - 3x + 8$ y $g(x) = -3x$, se pide:

- Calcular el máximo absoluto de la función $f(x)$ en el intervalo $[-3, 0]$.
- Calcular el punto de corte de la curva $y = f(x)$ y la recta $y = g(x)$.
- Hallar el área encerrada por $f(x)$, $g(x)$ y las rectas $x = -3$ y $x = 0$.

Problema 4. Un incendio se extiende en forma circular uniformemente. El radio del círculo quemado crece a velocidad constante de $1,8 \text{ m/min}$.

- Obtener el área quemada en función del tiempo t transcurrido desde el comienzo del incendio.
- Calcular la velocidad de crecimiento del área del círculo quemado en el instante en que el radio alcanza 45 m .

Bachillerato de Ciencias de la Naturaleza y la Salud	
EJERCICIO B	Septiembre de 2006

Problema 1. A es una matriz 3×3 tal que $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ y

$$A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}. \text{ Se pide:}$$

- Calcular el determinante de la matriz A^3 y la matriz inversa de A^3 .
- Calcular la matriz fila $X = (x, y, z)$ que es solución de la ecuación matricial $XA^3 = BA^2$, donde B es la matriz fila $B = (1, 2, 3)$.
- Calcular la matriz inversa de A .

Problema 2. En el espacio se consideran:

- El plano π que pasa por los puntos $(1, 1, 2)$, $(5, 7, 5)$ y $(7, -1, -2)$.
- Y la recta r intersección de los planos de ecuaciones implícitas $x + y + z = 15$ y $2x - 7y + 2z = 3$.

- Calcular la ecuación paramétrica de r y la ecuación implícita del plano π .
- Calcular el punto P intersección de r y π y el ángulo α que determinan r y π .
- Calcular los puntos M y N de la recta r cuya distancia al plano π es igual a 3 u.l.

Problema 3. a) Obtener la derivada de la función $f(x) = ax + b + \operatorname{sen} x$. Calcular a y b si $O = (0, 0)$ es un punto de la curva $y = ax + b + \operatorname{sen} x$, cuya recta tangente en $O = (0, 0)$ es el eje OX .

- Justificar que la función $g(x) = -\frac{2}{\pi}x + \operatorname{sen} x$ se anula en dos puntos del intervalo $[0, \pi]$ y calcular esos dos puntos.

Problema 4. Dos postes de 3 m y 4 m se hallan clavados verticalmente en el suelo. Sus bases distan 5 m y, en el segmento que los une, hay un punto P que dista x

metros de la base del poste más bajo. El extremo superior de cada poste se une con P mediante un segmento rectilíneo de cable. Se pide:

- a) Obtener la expresión $f(x)$ de la longitud total del cable utilizado en ambos segmentos.
- b) Demostrar que esa longitud total del cable es mínima cuando son iguales los valores absolutos de las pendientes de los dos segmentos considerados.