Bachillerato de Ciencias de la Naturaleza y la Salud	
Soluciones del ejercicio A	**Junio de 2006**

Problema 1. Resolvemos el sistema por Gauss:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & \alpha \\ 2 & 6 & -11 & 2 \\ 1 & -2 & 7 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & \alpha \\ 0 & 2 & -5 & 2-2\alpha \\ 0 & -4 & 10 & 1-\alpha \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & \alpha \\ 0 & 2 & -5 & 2-2\alpha \\ 0 & 0 & 0 & 5-5\alpha \end{pmatrix}$$

a) Si $\alpha \neq 1$ el sistema es incompatible y si $\alpha = 1$ el sistema es compatible e indeterminado, pues $r(A) = r(B) = 2 < 3$.

b) Como $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ se obtienen las soluciones: $\left(1-2z, \frac{5}{2}z, z\right)$.

c) Cuando $\alpha = 1$ los tres planos pasan por una recta (la solución anterior), por tanto, pertenecen a un haz de planos. Si $\alpha \neq 1$ el primer plano corta a los otros dos, que son paralelos entre sí.

Problema 2. a) Si $\begin{cases} x+y-z=5 \\ 2x+y-2z=2 \end{cases}$ se obtiene la recta $r \equiv (x,y,z) = (-3+t, 8, t)$.

Como $\overrightarrow{PQ} = (2,2,1)$, se tiene la recta $s \equiv (x,y,z) = (3+2s, 10+2s, 5+s)$.

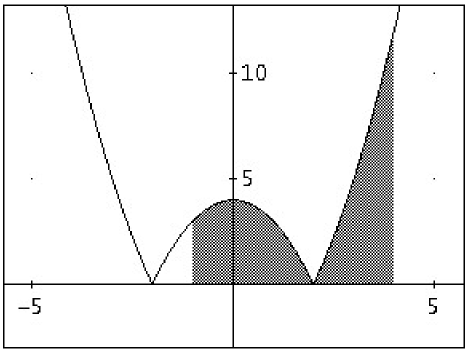
b) Igualando las ecuaciones de las dos rectas: $\begin{cases} -3+t = 3+2s \\ 8 = 10+2s \\ t = 5+s \end{cases}$ se obtiene $s = -1$ y

$t = 4$, que definen el punto $H(1,8,4)$. Si $\cos\alpha = \dfrac{|(1,0,1)\cdot(2,2,1)|}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{9}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ y $\alpha = 45^\circ$.

c) $\overrightarrow{PM} = (t-6, -2, t-5)$ y $A = \dfrac{1}{2}\left|\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PM}\right| = \dfrac{1}{2}\left\| \begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 2 & 1 \\ t-6 & -2 & t-5 \end{matrix} \right\| = 3$. Se obtienen los valores $t = 2$ y $t = 6$ que definen los puntos $M(-1,8,2)$ y $N(3,8,6)$.

Problema 3. b) La función tiene un punto anguloso. Como $f(-1) = 5$, $f(4) = 12$ y $f(2) = 0$, el máximo está en $P(4,12)$ y el mínimo en $Q(2,0)$.

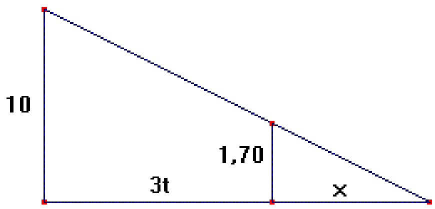
c) $\int_{-1}^{2}(-x^2+4)dx+\int_{2}^{4}(x^2-4)dx=-\frac{x^3}{3}+4x\Big|_{-1}^{2}+\frac{x^3}{3}-4x\Big|_{2}^{4}=\frac{11}{3}$.



Problema 4. Por la semejanza de triángulos se obtiene: $\frac{1{,}70}{10}=\frac{x}{3t+x}$.

a) Como $3t=5$ se tiene $\frac{1{,}70}{10}=\frac{x}{5+x}$ y resulta $x=1{,}02\ m$.

b) Despejando en la primera expresión $x=f(t)$ se tiene $x=0{,}61t$. Luego la sombra crece a velocidad constante de $0{,}61\ m/s$.



Bachillerato de Ciencias de la Naturaleza y la Salud	
Soluciones del ejercicio B	**Junio de 2006**

Problema 1. a) Como $|T| = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & -3 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$ tiene inversa. Calculando los menores complementarios: $T_{11} = -1$; $T_{12} = 0$; $T_{13} = 1$; $T_{21} = -2$; $T_{22} = 1$; $T_{31} = -1$; $T_{32} = -1$; $T_{33} = -2$ y por tanto: $T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

b) Si $A = T^{-1}BT$, entonces $TAT^{-1} = TT^{-1}BTT^{-1} = IBI = B$. $|B| = |T||A||T^{-1}| = |A| = 2$.

c) $B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & -3 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Problema 2. a) El punto medio es $P(3,-2,7)$ y $d(P,C) = |\overrightarrow{PC}| = 3\sqrt{2}$. El área del triángulo es $A = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \frac{1}{2}\left\| \begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 4 & -4 \\ 0 & 6 & -3 \end{matrix} \right\| = \frac{1}{2} \cdot |(12,-6,-12)| = 9$.

b) $\overrightarrow{AB} = (-2,4,-4)$ $\overrightarrow{AC} = (0,6,-3)$ $\pi \equiv \begin{vmatrix} x-4 & y+4 & z-9 \\ -2 & 4 & -4 \\ 0 & 6 & -3 \end{vmatrix} = 0 \to 2x - y - 2z + 6 = 0$.

$\overrightarrow{LM} = (-1,1,-1)$ $\overrightarrow{LN}(2,-1,1)$ $\pi' \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-4 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -y - z + 5 = 0$.

c) La recta intersección de los planos es $\begin{cases} x = 2 \\ y = 5 - t \\ z = t \end{cases}$ y el ángulo de los dos planos es

$\cos\alpha = \frac{|(2,-1,-2)\cdot(0,-1,-1)|}{3\cdot\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2}}$ y $\alpha = 45^{\circ}$.

Problema 3. a) La función $y = \ln x$ es continua en $[1, e]$ y derivable en $(1, e)$ y por tanto se le puede aplicar el TVM de Lagrange:

Existe al menos un $c \in (1, e)$ tal que $f'(c) = \dfrac{f(e) - f(1)}{e - 1} = \dfrac{1}{c}$.

b) De donde se obtiene $c = e - 1$ y el punto es $P(e - 1, \ln(e - 1))$.

c) La pendiente es $\dfrac{1}{c} = \dfrac{1}{e - 1}$.

Problema 4. a) El coste del marco es $C = 16x + 25y$ siendo el área $A = xy = 1$.

Despejando y sustituyendo se obtiene $C = 16x + \dfrac{25}{x}$. Derivando e igualando a cero:

$C' = 16 - \dfrac{25}{x^2} = 0$ se obtiene $x = 1{,}25\ m$ e $y = 0{,}8\ m$. Como $C'' = \dfrac{50}{x^3}$, corresponde a un mínimo pues $C''(1{,}25) > 0$.

b) El coste total será $C = 16 \cdot 1{,}25 + 25 \cdot 0{,}8 = 40$ €.