Bachillerato de Ciencias de la Naturaleza y la Salud	
Soluciones del ejercicio A	**Junio de 2005**

Problema 1. Resolviendo el sistema por reducción se obtiene:

$$\begin{cases} 2AX - 3AY = B \\ AX - AY = C \end{cases} \rightarrow \begin{cases} AX = 3C - B \\ AY = 2C - B \end{cases} \rightarrow \begin{cases} X = A^{-1}(3C - B) \\ Y = A^{-1}(2C - B) \end{cases}$$ y además $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

Sustituyendo:

$$X = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \left[3\begin{pmatrix} -17 & -30 \\ 10 & 18 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -18 & 0 \\ 11 & 1 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} -4 & -5 \\ 5 & 16 \end{pmatrix}$$

$$Y = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \left[2\begin{pmatrix} -17 & -30 \\ 10 & 18 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -18 & 0 \\ 11 & 1 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 4 & 10 \end{pmatrix}$$

Problema 2. a) Sustituyendo las ecuaciones de la recta *u* en el plano:

$y + y - 12m = 0$, se obtiene el punto $A(1,6m,6m)$.

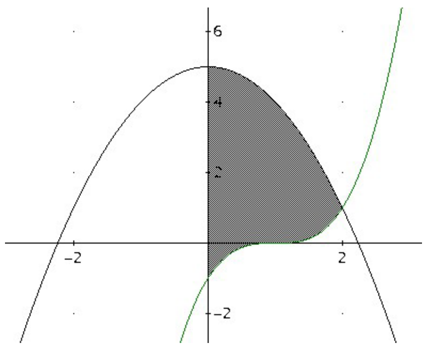
De manera análoga se obtienen los puntos: $B(2,8m,4m)$ y $C(3,9m,3m)$.

b) Como $\overrightarrow{AB} = (1,2m,-2m)$ y $\overrightarrow{AC} = (2,3m,-3m)$, el área del triángulo será:

$$\frac{1}{2}\left\| \begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2m & -2m \\ 2 & 3m & -3m \end{matrix} \right\| = 1$$. Por tanto. $|(0,-m,-m)| = 2$, $\sqrt{2m^2} = 2$, $m = \pm\sqrt{2}$.

Problema 3. Se resuelve el sistema $\begin{cases} y = (x-1)^3 \\ y = 5 - x^2 \end{cases}$ para hallar el punto de corte de las curvas: $x^3 - 2x^2 + 3x - 6 = (x-2)(x^2+3)$.

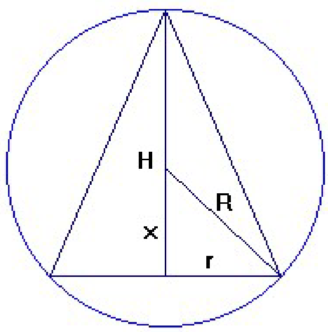
Se calcula la integral definida: $\int_0^2 \left[5 - x^2 - (x-1)^3\right] dx = 5x - \frac{x^2}{3} - \frac{(x-1)^3}{4}\Big|_0^2 = \frac{22}{3}$



Problema 4. En la figura, que es una sección del cono inscrito en la esfera, se observa que: $H = x + R$ y $R^2 = x^2 + r^2$, siendo *H* la altura del cono, *r* el radio de la base y *R* el radio de la esfera. Por tanto, el volumen del cono será: $V = \frac{1}{3}\pi r^2 H = \frac{1}{3}\pi(R^2 - x^2)(x + R) = \frac{1}{3}\pi(R^2 x + R^3 - x^3 - Rx^2)$.

Igualando la derivada a cero: $V' = \frac{1}{2}\pi(R^2 - 3x^2 - 2xR) = 0$, se obtienen los valores: $x = R/3 \; y \; x = -R$. Calculando la derivada segunda y sustituyendo el valor $x = R/3$, se obtiene: $V''(x) = \frac{1}{3}\pi(-6x - 2R)$ y $V''(R/3) < 0$ y por tanto es el valor con el que se obtiene el volumen máximo.

Sustituyendo ese valor se obtiene: $H = \frac{4}{3}R$, $r = \frac{2\sqrt{3}}{3}R$ y el volumen del cono será: $V = \frac{32}{81}\pi R^3$. Si dividimos este volumen entre el de la esfera $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ se obtiene que $\frac{V_{cono}}{V_{esfera}} = \frac{8}{27} < \frac{3}{10}$ y por tanto nunca alcanza el 30% del volumen de la esfera.



Bachillerato de Ciencias de la Naturaleza y la Salud	
Soluciones del ejercicio B	**Junio de 2005**

Problema 1. Resolvemos el sistema por Gauss:

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 & 1 \\ 1 & \alpha & \alpha & \alpha \\ 1 & \alpha^2 & \alpha^2 & \alpha^2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 & 1 \\ 0 & 0 & \alpha-\alpha^2 & \alpha-1 \\ 0 & \alpha^2-\alpha & 0 & \alpha^2-1 \end{pmatrix}$$

Si $\alpha = 0$ el sistema es incompatible.

Si $\alpha = 1$ el sistema es compatible e indeterminado y la solución es $(1-y-z, y, z)$.

Si $\alpha \neq 0 \; y \; \alpha \neq 1$ el sistema es compatible y determinado y la solución es:

$$y = \frac{\alpha^2-1}{\alpha^2-\alpha} = \frac{\alpha+1}{\alpha}, \; z = \frac{\alpha-1}{\alpha-\alpha^2} = -\frac{1}{\alpha}, \; x = 1-\alpha y-\alpha^2 z = 1-\alpha\frac{\alpha+1}{\alpha}+\alpha^2\frac{1}{\alpha} = 0$$

Problema 2. Las proyecciones sobre el plano al ser puntos de la recta son del tipo $P(t,4,1)$; pero como son proyecciones ortogonales, el vector que une el origen con P es un vector normal del plano $\vec{n}(t,4,1)$.

Las ecuaciones de los planos pedidos serán de la forma $tx+4y+z+D=0$ y como el punto $Q(-7,2,-3)$ pertenece al plano, se cumple: $-7t+4\cdot 2-3+D=0$ y $D=7t-5$ y por tanto, los planos pedidos serán del tipo: $tx+4y+z+7t-5=0$.

Como el punto Q está en el plano, el vector $\overrightarrow{PQ}$ será ortogonal al vector $\overrightarrow{PO}$ y por tanto $(t+7,2,4)\cdot(t,41)=0$. Se obtiene la ecuación $t^2+7t+12=0$, cuyas soluciones $t=-3 \; y \; t=-4$ dan los planos: $-3x+4y+z-26=0$ y $-4x+4y+z-33=0$.

Problema 3. La función tiene que ser continua en $x=0$. Para ello calculamos los límites laterales aplicando la regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}(x\cdot\ln x + a) = \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\ln x}{x}+a\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1/x}{-1/x^2}+a\right) = a$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}\left(\frac{sen\pi x}{x}\right) = \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\pi\cos\pi x}{1}\right) = \pi$$

Para que la función sea continua tiene que tener límite y coincidir con el valor de la función en dicho punto: $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to a^-} f(x) = f(0)$ y $a=b=\pi$.

Problema 4. La función $C(t) = t(0{,}2948 + 0{,}04253t - 0{,}00035t^2)$ se anula en $t = -6{,}58$, en $t = 0$ y en $t = 128{,}1$. Por tanto el período de tiempo en que actúa es aproximadamente durante 128 minutos.

Como $C'(t) = 0{,}29483 + 0{,}08506t - 0{,}00105t^2$ se anula en $t = -3{,}33$ y $t = 84{,}34$ son los posibles mínimo y máximo de la función.

Además $C''(t) = 0{,}08506 - 0{,}021t$, y $C''(84{,}34) < 0$ y por tanto el máximo de concentración se produce a los 84,34 minutos.

Los valores negativos obtenidos de *t* no tienen sentido al ser un problema que describe una situación real.