Bachillerato de Ciencias de la Naturaleza y la Salud	
Soluciones del ejercicio A	**Septiembre de 2004**

Problema 1. Si $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ se obtienen las ecuaciones siguientes: $\begin{cases} x+2z = x+3y \\ y+2t = 2x+4y \\ 3x+4z = z+3t \\ 3y+4t = 2z+4t \end{cases}$ que se reducen al $\begin{cases} x+z-t=0 \\ 2x+3y-2t=0 \\ 3y-2z=0 \end{cases}$ y al resolverlo por Gauss:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ se obtiene como solución todas las matrices del tipo $\begin{pmatrix} t-z & 2z/3 \\ z & t \end{pmatrix}$.

Problema 2. a) Como el vector dirección de la recta es el vector normal del plano se verifica: x-2y+z+D=0 y sustituyendo el punto P(-2,4,-3) en la ecuación se obtiene D=13 y por tanto el plano x-2y+z+13=0.

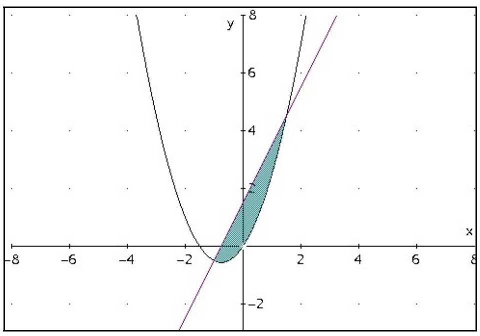
b) Si P(-2,4,-3), Q(1,2,0) y $\vec{u} = (1,-2,1)$ se obtiene la distancia del punto a la recta

$$d(P,r) = \frac{\left|\vec{u}\times\overrightarrow{PQ}\right|}{|\vec{u}|} = \frac{\left\|\begin{matrix} \vec{i} & \vec{i} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & -2 & 3 \end{matrix}\right\|}{|(1,-2,1)|} = \frac{|(-4,0,4)|}{\sqrt{6}} = \frac{4}{\sqrt{3}}$$

Problema 3. a) Si y=x^2+mx, su derivada es y'=2x+m. Entonces si y'(-3/4)=0 se obtiene m=3/2. Y como la derivada segunda y''(-3/4)=2>0, tendrá un mínimo.

b)

Como $f(x) = x^2 + \frac{3}{2}x$ y su derivada es $f'(x) = 2x + \frac{3}{2}$ se trata de calcular el área limitada por ambas funciones.



Para ello se calcula a integral definida:

$$\int_{-1}^{3/2}\left[2x+\frac{3}{2}-\left(x^2+\frac{3}{2}x\right)\right]dx=\int_{-1}^{3/2}\left(-x^2+\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}\right)dx=\frac{125}{48}.$$

Los límites de integración son las soluciones del sistema $\begin{cases} y=x^2+\frac{3}{2}x \\ y=2x+\frac{3}{2} \end{cases}$

Problema 4. a) la función que da el número de bacterias en función del tiempo es $P=10{\cdot}2^t$ y por tanto al cabo de 10 días, $P(10)=10{\cdot}2^{10}=10.240$ bacterias.

b) Como la derivada es constante en el intervalo $0\le t\le 10$, se trata de una función lineal $P=at+b$ en ese intervalo.

Resolviendo el sistema $\begin{cases} P(0)=a{\cdot}0+b=500 \\ P(3)=a{\cdot}3+b=1100 \end{cases}$ se obtiene la función P(t)=200t+500 y por tanto, al cabo de 10 días, P(10)=2500 bacterias.

Bachillerato de Ciencias de la Naturaleza y la Salud	
Soluciones del ejercicio B	**Septiembre de 2004**

Problema 1. a) Calculamos la matriz inversa mediante determinantes:

$|A| = -8 \neq 0$, $|A_{11}| = 6, |A_{12}| = 6, |A_{13}| = 2$, $|A_{21}| = -2, |A_{22}| = -2, |A_{23}| = -2$,

$|A_{31}| = 4, |A_{32}| = 12, |A_{33}| = 8$. Por tanto la matriz inversa es $A^{-1} = -\frac{1}{8}\begin{pmatrix} 6 & -2 & 4 \\ 6 & -2 & 12 \\ 2 & -2 & 8 \end{pmatrix}$

b) $B = A(A+4I) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 3 & -5 & 6 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 6 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$.

c) Como $A(A+4I) = -4I$ se puede expresar de la forma $A \cdot \left(-\frac{1}{4}(A+4I)\right) = I$ y por tanto $A^{-1} = -\frac{1}{4}(A+4I) = -\frac{1}{4}A - I$. Luego x=-1/4 e y =-1. Además $A^2 + 4A = -4I$ y entonces $A_2 = -4A - 4I$. Por tanto z=t=-4.

Problema 2. a) Como $\overrightarrow{BC} = (0,-1,1)\ y\ \overrightarrow{BD} = (2,0,2)$, el área del triángulo será:

$$A = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BD}\right| = \frac{1}{2}|(-2,2,2)| = \sqrt{3} .$$

b) Como $\overrightarrow{BA} = (1,-1,0)$, el volumen del tetraedro será:

$$V = \frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}\right]\right| = \frac{1}{6}\left\|\begin{matrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{matrix}\right\| = \frac{2}{3}.$$

c) El vector (-2,2,2) obtenido anteriormente es un vector normal del plano así como el (-1,1,1). El plano pedido pertenece al haz de planos paralelos -x+y+z+D=0. Al pasar por B(1,0,0) se obtiene D=-1 y el plano –x+y+z-1=0. La distancia será:

$$d = \frac{|-1+0+0-1|}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} .$$

Problema 3. a) Hacemos la descomposición adecuada para obtener dos integrales inmediatas:

$$\int \frac{4x+11}{(x+1)^2+1}dx = \int \frac{4x+4}{(x+1)^2+1}dx + \int \frac{7}{(x+1)^2}dx = 2\int \frac{2(x+1)}{(x+1)^2+1}dx + 7\int \frac{1}{(x+1)^2+1}dx = .$$

$$2\ln[(x+1)^2+1] + 7arctg(x+1) .$$

b) $\int_0^{\sqrt{3}-1} \frac{4x+11}{(x+1)^2+1}dx = 2\ln 4 + 7arctg\sqrt{3} - 2\ln 2 - 7arctg1 = 2\ln 2 + \frac{7\pi}{12}$.

Problema 4. Por Pitágoras $y = \sqrt{x^2 + (16-x)^2}$. Derivando la expresión e igualando a cero: $y' = \frac{2x - 2(16-x)}{2\sqrt{x^2+(16-x)^2}} = \frac{2x-16}{\sqrt{x^2+(16-x)^2}} = 0$ se obtiene x=8 y el lado del cuadrado será $y = \sqrt{8^2+8^2} = 8\sqrt{2}$. Para comprobar que es un mínimo observamos que en el intervalo $(0,8)$ $y' < 0$ (decreciente) y en el $(8,16)$ $y' > 0$ (creciente).