Bachillerato de Ciencias de la Naturaleza y la Salud	
Soluciones del ejercicio A	**Junio de 2003**

Problema 1. a) La matriz B ampliada es: $\begin{pmatrix} l & 0 & 2 & 0 \\ 0 & l & -1 & l \\ 1 & 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$.

El determinante de la matriz de los coeficientes A vale $\begin{vmatrix} l & 0 & 2 \\ 0 & l & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = l(l+1)$.

Si λ=0 se tiene $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ y como rango(A)=rango(B)=2<3 , el sistema es compatible e indeterminado.

Si λ=-1 se tiene $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ y como rango(A)=2 y rango(B)=3, el sistema es incompatible.

Si $l \neq 0 \; y \; l \neq -1$ entonces el rango(A)=rango(B)=3 y el sistema es compatible y determinado.

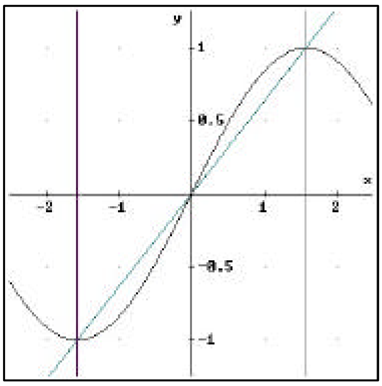
b) Si λ=0 el sistema es $\begin{cases} 2z = 0 \\ -z = 0 \\ x+3y+z = 5 \end{cases}$ que da como solución (5-3t,t,0).

Si Si $l \neq 0 \; y \; l \neq -1$ se resuelve por Cramer:

$\Delta x = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 \\ l & l & -1 \\ 5 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -4l$ $\quad \Delta y = \begin{vmatrix} l & 0 & 2 \\ 0 & l & -1 \\ 1 & 5 & 1 \end{vmatrix} = l^2 + 3l$ $\quad \Delta z = \begin{vmatrix} l & 0 & 0 \\ 0 & l & l \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 2l^2$ y por tanto la solución es $\left(\frac{-4}{l+1}, \frac{l+3}{l+1}, \frac{2l}{l+1} \right)$

Problema 2. a) El área será por la simetría, el doble del área encerrada entre la curva y la recta en el intervalo [0,π/2]:

$A_1 = \int_0^{p/2} senxdx = [-\cos x]_0^{p/2} = 1$ y $A_2 = \int_0^{p/2} (2/p)xdx = \left[\frac{x^2}{p}\right]_0^{p/2} = \frac{p}{4}$. Por tanto el área pedida es $A = 2(A_1 - A_2) = 2 - \frac{p}{2}$.



b) Se integra por partes $\int xsenxdx = \left\{\begin{matrix} u = x \to u' = 1 \\ v' = senx \to v = -\cos x \end{matrix}\right\} = -x\cos x + \int \cos xdx = -x\cos x + senx$

Por tanto el resultado será: $\frac{2}{p}[-x\cos x + senx] + k$

Problema 3. Los valores de las medias, desviaciones típicas y covarianza:

$$\begin{cases} \overline{x} = 1{,}69 \\ s_x = 0{,}11 \end{cases}, \quad \begin{cases} \overline{y} = 80{,}25 \\ s_y = 6{,}83 \end{cases}, \quad s_{xy} = 0{,}69 .$$

a) Utilizando la recta de regresión de “y sobre x”: $y - 80{,}25 = \frac{0{,}69}{0{,}11^2}(x - 1{,}69)$ y sustituyendo *x=1,72* se obtiene como peso esperado *y(1,72)=81,96*.

b) Utilizando la recta de regresión de “x sobre y”: $x - 1{,}69 = \frac{0{,}69}{6{,}83^2}(y - 80{,}25)$ y sustituyendo *x=80* se obtiene como peso esperado *y(80)=1,70*. Al ser muy fuerte la correlación se podía haber utilizado la primera recta de regresión sin cometer un error apreciable.

Problema 4. a) Las ecuaciones de las rectas en paramétricas son:

$$r \equiv \begin{cases} x = 3 + 2l \\ y = 6 + l \\ z = 7 - 2l \end{cases} \qquad r' \equiv \begin{cases} x = 4 - m \\ y = 7/2 - m/2 \\ z = m \end{cases}$$

Como sus vectores dirección (2,1,-2) y (-1,1/2,1) son proporcionales y el punto (3,6,7) de *r* no pertenece a *r’,* las rectas son paralelas.

b) Se coge un punto P=(3,3,1) de r’, y entonces se verifica

$$d(r,r') = d(r,P) = \frac{\left|\overrightarrow{AP}\ x\ \vec{u}\right|}{\left|\vec{u}\right|} = \frac{\left|(12,12,6)\right|}{\left|(2,1,-2)\right|} = \frac{12\left|(2,2,-1)\right|}{3} = 6$$

c) El triángulo tiene de base $\left|\vec{AB}\right| = \left|(4,2,-4)\right| = 6$ y altura $d(r,r')$, $A = \frac{6 \cdot 6}{2} = 18$.

Bachillerato de Ciencias de la Naturaleza y la Salud	
Soluciones del ejercicio B	**Junio de 2003**

Problema 1. a) Resolviendo el sistema de ecuaciones matriciales se obtiene:

$$X = C + 2Y = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad Y = \frac{1}{5}(B - 2C) = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

b) $(2X+Y)X - (2X+Y)(2Y) = (2X+Y)(X-2Y) = BC = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Problema 2. En el triángulo cada lado igual vale $30 - \dfrac{x}{2}$. La altura del triángulo vale $h = \sqrt{\left(30 - \dfrac{x}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{x}{2}\right)^2} = \sqrt{900 - 30x}$. El área será $A(x) = \dfrac{x\sqrt{900-30x}}{2}$.

La función $f(x) = \dfrac{x^2(900-30x)}{4} = 225x^2 - \dfrac{15}{2}x^3$ con $x \in (0,30)$.

Se busca donde la derivada se anula $f'(x) = 450x - \dfrac{45}{2}x^2$ =0, es decir en $\begin{cases} x = 0 \\ x = 20 \end{cases}$

Mediante la derivada segunda, $f''(x) = 450 - 45x$, vemos que en x=20 se presenta el máximo al ser $f''(20) < 0$.

Problema 3. Se trata de una binomial B(5,1/6).

a) $p(x=2) = \binom{5}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^3 = 0{,}16$

b) $p(x \le 1) = p(x=0) + p(x=1) = \binom{5}{0}\left(\frac{1}{6}\right)^0\left(\frac{5}{6}\right)^5 + \binom{5}{1}\left(\frac{1}{6}\right)^1\left(\frac{5}{6}\right)^4 = 0{,}40 + 0{,}40 = 0{,}80$

c) $p(x > 2) = 1 - p(x \le 2) = 1 - p(x=0) - p(x=1) - p(x=2) = 1 - 0{,}80 - 0{,}16 = 0{,}04$

Problema 4. a) La ecuación de la recta es $\begin{cases} x = 2+t \\ y = 2 \\ z = 4+t \end{cases}$ y la ecuación del plano es

$\begin{vmatrix} x-3 & y & z \\ 2 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$, es decir, $x-2y+2z-3=0$. Como el producto escalar de los vectores de la recta y el plano vale $(1,0,1)\cdot(1,-2,2)=3\neq 0$, la recta y el plano no son paralelos.

b) Sustituyendo la ecuación de la recta en el plano, 2+t -2·2+2(4+t)-3=0 se obtiene t=-1, y por tanto el punto de intersección es P(1,2,3).

Como $sen a = \frac{|(1,-2,2)\cdot(1,0,1)|}{\sqrt{2}\sqrt{9}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, el ángulo es $\alpha=45^{o}$.

c) Sustituyendo en la fórmula de la distancia de un punto a un plano, las coordenadas genéricas de un punto de la recta, se obtiene $\frac{|3t+1|}{3}=4$, que da origen a las ecuaciones $\begin{cases} 3t+1=12 \\ 3t+1=-12 \end{cases}$ de soluciones $\begin{cases} t=3 \to S=(5,2,7) \\ t=-5 \to T=(-3,2,-1) \end{cases}$.