

Bachillerato de Ciencias de la Naturaleza y la Salud	
Soluciones del ejercicio A	Septiembre de 2000

**Problema 1.** Resolviendo por Gauss:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & I & I \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & I-3 & I-3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & I-5 & I-5 \end{pmatrix}.$$

Si  $I = 5$  el sistema es compatible e indeterminado: tres planos que pasan por una recta.

Si  $I \neq 5$  el sistema es compatible y determinado: tres planos que se cortan en el punto  $(0,0,1)$ .

**Problema 2.** Al ser una moneda simétrica se trata de una binomial  $B\left(\frac{1}{2}, 5\right)$ .

$$p(x=0) = \binom{5}{0} \left(\frac{1}{2}\right)^0 \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32}; \quad p(x=1) = \binom{5}{1} \left(\frac{1}{2}\right)^1 \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{5}{32} \text{ y finalmente:}$$

$$p(x > 1) = 1 - p(x \leq 1) = 1 - p(x=0) - p(x=1) = \frac{13}{16}.$$

**Problema 3.** Basta sustituir las coordenadas de los puntos en las rectas correspondientes y comprobar que se cumplen las ecuaciones.

La recta  $r$  pasa por  $A(0,0,0)$  y tiene de dirección  $u(1,1,1)$ . A su vez la recta  $s$  pasa por  $B(0,5,0)$  y tiene de dirección  $v(1,0,0)$ . Obtenemos el vector  $AB(0,5,0)$  y calcu-

$$\text{lamos la distancia entre las rectas: } d = \frac{[u, v, AB]}{|u \times v|} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}} = \frac{5}{\sqrt{2}}.$$

El producto mixto da el volumen del paralelepípedo determinado por  $u, v$  y  $AB$ . El módulo del producto vectorial de  $u \times v$  da el área de su base. Por tanto la altura será el cociente entre ambos.

**Problema 4.** El área del cuadrado será  $\left(\frac{x}{4}\right)^2$  y el área del rectángulo será  $\frac{y}{6} \cdot \frac{y}{3}$ .

Como  $x+y = 100$ , el área total vendrá dada por:  $A_T = \left(\frac{x}{4}\right)^2 + \frac{1}{18}(100-x)^2$ .

Derivando e igualando a cero:  $A'_T = \frac{x}{2} - \frac{1}{9}(100-x) = 0$ ,  $x = \frac{200}{11}$ .

Si  $x=0$ , no hay cuadrado y el área total vale:  $A_T \approx 555,5$ .

Si  $x=100$ , no hay rectángulo y el área total vale:  $A_T \approx 625$  (máximo).

Si  $x = \frac{200}{11}$ , entonces  $y = \frac{900}{11}$  y el área total vale: 392,6 (mínimo).

Bachillerato de Ciencias de la Naturaleza y la Salud	
Soluciones del ejercicio B	Septiembre de 2000

**Problema 1.** El plano que pasa por el punto  $A(0,0,0)$  viene determinado además por los vectores  $u(0,2,2)$  y  $v(2,0,2)$ .

La ecuación implícita del plano será:  $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0$ , es decir  $x+y-z=0$ . La distancia

$$\text{del punto al plano es: } d(P, \mathbf{p}) = \frac{|-7|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + (-1)^2}} = \frac{7}{\sqrt{3}}$$

**Problema 2.** Resolviendo por Gauss:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3+I \\ 1 & -3 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3+I \\ 0 & -4 & -1 & -5-I \\ 0 & 1 & 4 & 5+I \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3+I \\ 0 & 1 & 4 & 5+I \\ 0 & 4 & 1 & 5+I \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3+I \\ 0 & 1 & 4 & 5+I \\ 0 & 0 & -15 & -15-3I \end{pmatrix}$$

Por tanto, expresando la solución en función del parámetro:  $\left(1 + \frac{3I}{5}, 1 + \frac{I}{5}, 1 + \frac{I}{5}\right)$  indica que es un sistema compatible y determinado para cualquier valor del parámetro.

Resolviendo el sistema:  $\begin{cases} x-3y = -2 \\ -x+3z = 2 \end{cases}$ , se obtiene la recta:  $\left(x, \frac{2+x}{3}, \frac{2+x}{3}\right)$ . Sus

puntos tienen iguales las coordenadas "y" y "z", y lo mismo le ocurre a cualquier punto P solución del sistema anterior. En consecuencia todos los puntos solución del sistema pertenecen a esta recta.

**Problema 3.** Tipificando la normal  $N(1,70;0,1)$ :

$$p(x > 1,72) = p\left(z \geq \frac{1,72 - 70}{0,1}\right) = p(z \geq 0,2) = 0,4207.$$

Al seleccionar 4 personas con probabilidad 0,4207 se trata ahora de una binomial  $B(4;0,4207)$ :

$$p(x = 1) = \binom{4}{1} 0,4207^1 \cdot 0,5793^3 = 0,3271$$

$$p(x=0) = \binom{4}{0} 0,4207^0 \cdot 0,5793^4 = 0,1126$$

$$p(x \geq 2) = 1 - p(x < 2) = 1 - p(x=0) - p(x=1) = 1 - 0,1126 - 0,3271 = 0,5603$$

**Problema 4.** Para hallar el volumen de revolución despejamos:  $y = 3\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$  y

realizamos la integral:  $V = 2\pi \int_0^a 9 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx = 18\pi \left[x - \frac{x^3}{3a^2}\right]_0^a = 12\pi a$ .

El volumen en función de "t" es  $V = 12\pi(5 + 3t)$  y al derivar  $V' = 36\pi = cte$ . Esto indica que la figura se desplaza pero no por ello varía su volumen.