



Universidad de Castilla La Mancha – Septiembre – 2013

Opción A

Problema 1.- Una partícula de masa 10^{-2} kg vibra con movimiento armónico simple de periodo π s a lo largo de un segmento de 20 cm de longitud. Determinar:

- Su velocidad y su aceleración cuando pasa por el punto medio del segmento.
- Su velocidad y su aceleración en los extremos.
- El valor de la fuerza restauradora cuando su elongación es 8 cm.

Se trata de un movimiento armónico simple. Suponemos que la partícula empieza a vibrar desde el origen de coordenadas, como puede verse en la figura.

$$x = A \operatorname{sen}(\omega t)$$

La amplitud será igual a la mitad del recorrido completo a lo largo del segmento:

$$A = \frac{l}{2} = \frac{0.2}{2} \rightarrow A = 0.1 \text{ m}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{\pi} \rightarrow \omega = 2 \text{ rad/s}$$

$$x = A \operatorname{sen}(\omega t \pm \delta) \rightarrow x = 0.1 \operatorname{sen}(2t)$$

La partícula se encuentra en el punto medio del segmento cuando $\omega t = 0$ y cuando $\omega t = \pi$, para valores de $\omega t > \pi$ se repiten posiciones, velocidades y aceleraciones. Por lo que consideramos las dos primeras posiciones.

La velocidad es la derivada de la elongación con respecto al tiempo:

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = 0.2 \cos(\omega t) \rightarrow \begin{cases} v_1 = 0.2 \cos(0) \rightarrow v_1 = 0.2 \text{ m/s} \\ v_2 = 0.2 \cos(\pi) \rightarrow v_2 = -0.2 \text{ m/s} \end{cases}$$

La aceleración es la derivada de la velocidad con respecto al tiempo:

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = -0.4 \operatorname{sen}(\omega t) \rightarrow \begin{cases} a_1 = -0.4 \operatorname{sen}(0) \rightarrow a_1 = a_2 = 0 \text{ m/s}^2 \\ a_2 = -0.4 \operatorname{sen}(\pi) \end{cases}$$

La partícula se encuentra en los extremos del segmento cuando $\omega t = \frac{\pi}{4}$ y cuando $\omega t = \frac{3\pi}{4}$,

$$v(t) = 0.2 \cos(\omega t) \rightarrow \begin{cases} v_1 = 0.2 \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \rightarrow v_1 = 0.141 \text{ m/s} \\ v_2 = 0.2 \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) \rightarrow v_2 = -0.141 \text{ m/s} \end{cases}$$

$$a(t) = -0.4 \operatorname{sen}(\omega t) \rightarrow \begin{cases} a_1 = -0.4 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) \rightarrow a_1 = -0.2828 \text{ m/s}^2 \\ a_2 = -0.4 \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{4}\right) \rightarrow a_2 = 0.2828 \text{ m/s}^2 \end{cases}$$

La fuerza restauradora tiene la expresión:

$$F = -k \cdot x \rightarrow k = m \cdot \omega^2 \rightarrow k = 10^{-2} \cdot 2^2 \rightarrow k = 4 \cdot 10^{-2} \text{ N/m} \rightarrow F = -4 \cdot 10^{-2} \cdot 0.08 \rightarrow F = -3.2 \cdot 10^{-3} \text{ N}$$

Problema 2.- Una esfera conductora de 1 cm de radio tiene una carga de +6 nanoculombios (nC). A 100 metros de distancia hay otra esfera conductora de radio 2 cm cuyo potencial es +1800 V.

- Calcular el potencial de la primera esfera y la carga de la segunda.
- Calcular el potencial y el campo eléctrico en el punto medio de la distancia entre las dos esferas. Indicar mediante un diagrama el sentido del campo.
- Si las dos esferas se conectan mediante un conductor ideal que no almacena carga y que permite el libre paso de cargas de una a otra, ¿cuál es la carga final de cada esfera?

Constante de la ley de Coulomb: $k = 9 \cdot 10^9 \text{ N m}^2 \text{ C}^{-2}$; $1 \text{ nC} = 10^{-9} \text{ C}$.

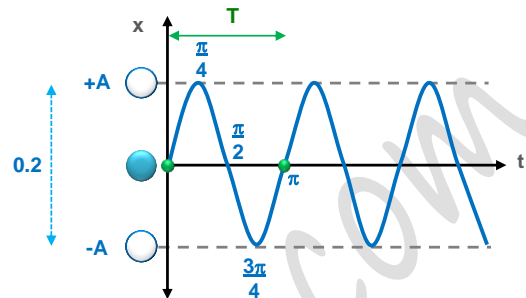
Las dos esferas se comportan como cargas puntuales.

El potencial de la primera esfera será:

$$V_1 = k \frac{q_1}{r_1} = 9 \cdot 10^9 \frac{6 \cdot 10^{-9}}{10^{-2}} \rightarrow V_1 = 5400 \text{ V}$$

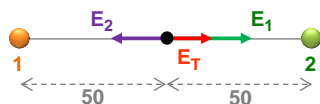
La carga de la segunda esfera:

$$V_2 = k \frac{q_2}{r_2} \rightarrow q_2 = \frac{V_2 r_2}{k} = \frac{1800 \cdot 2 \cdot 10^{-2}}{9 \cdot 10^9} \rightarrow q_2 = 4 \cdot 10^{-9} \text{ C} = 4 \text{ nC}$$



El potencial en el punto medio:

$$V_m = V_1 + V_2 \rightarrow V_m = k \left(\frac{q_1}{r_1} + \frac{q_2}{r_2} \right) = 9 \cdot 10^9 \left(\frac{6 \cdot 10^{-9}}{50} + \frac{4 \cdot 10^{-9}}{50} \right) \rightarrow V_m = 1.8 V$$



El campo eléctrico total será:

$$E_T = E_1 - E_2$$

$$\vec{E}_T = \vec{E}_1 - \vec{E}_2 = k \frac{q_1}{R^2} \vec{i} - k \frac{q_2}{R^2} \vec{i} = 9 \cdot 10^9 \left(\frac{6 \cdot 10^{-9}}{50^2} - \frac{4 \cdot 10^{-9}}{50^2} \right) \vec{i} \rightarrow \vec{E}_T = 7.2 \cdot 10^{-3} \vec{i} N/C$$

$$F_e = k \frac{q_1 \cdot q_2}{R^2} \rightarrow q_2 = \frac{F R^2}{k q_1} = \frac{0.025 \cdot 6^2}{9 \cdot 10^9 \cdot 2 \cdot 10^{-5}} \rightarrow q_1 = +5 \cdot 10^{-6} C$$

Por tanto, el campo eléctrico en el punto medio:

$$\vec{E}_T = \vec{E}_1 - \vec{E}_2 = k \frac{q_1}{R^2} \vec{i} - k \frac{q_2}{R^2} \vec{i} = 9 \cdot 10^9 \left(\frac{2 \cdot 10^{-5}}{3^2} - \frac{5 \cdot 10^{-5}}{3^2} \right) \vec{i} \rightarrow \vec{E}_T = 1.5 \cdot 10^4 \vec{i} N/C$$

Si las dos esferas se ponen en contacto a través de un conductor ideal, pasarán cargas de una a otra hasta igualarse los potenciales de ambas, situación de equilibrio electrostático. Por otro lado, la carga total permanece constante:

$$\begin{cases} q'_1 + q'_2 = q_T \\ V_1 = V_2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} q'_1 + q'_2 = 10 nC \\ k \frac{q'_1}{R_1} = k \frac{q'_2}{R_2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} q'_1 + q'_2 = 10 \\ \frac{q'_1}{1} = \frac{q'_2}{2} \end{cases} \rightarrow q'_1 = 3.33 nC \rightarrow q'_2 = 6.66 nC$$

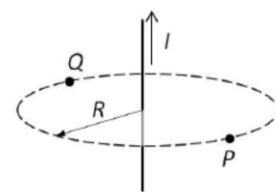
Cuestión 1.- Un planeta gigante tiene dos pequeños satélites que describen órbitas circulares de $2 \cdot 10^5$ km y $1.6 \cdot 10^6$ km de radio, respectivamente. El satélite más cercano tarda 2 días en completar una órbita. Calcular el periodo orbital del satélite más lejano, justificando la respuesta.

Según la tercera ley de Kepler: los cubos de las distancias de los planetas a la estrella son proporcionales a los cuadrados de los periodos de revolución:

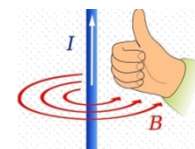
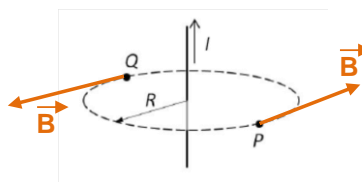
$$T^2 = k R^3 \rightarrow \begin{cases} T_1^2 = k R_1^3 \\ T_2^2 = k R_2^3 \end{cases} \rightarrow \frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{k R_1^3}{k R_2^3} \rightarrow T_2 = \sqrt{\frac{R_2^3}{R_1^3}} T_1 \rightarrow T_2 = \sqrt{\frac{(1.6 \cdot 10^6)^3}{(2 \cdot 10^5)^3}} 2 \text{ días} \rightarrow T_2 = 45.2 \text{ días}$$

Cuestión 2.- Un conductor rectilíneo muy largo conduce una corriente I en el sentido indicado en la figura.

- Indicar mediante un esquema cuál es la dirección y el sentido del campo magnético en los puntos P y Q, justificando la respuesta.
- Se sabe que el módulo del campo magnético en P y en Q es igual a $4 \cdot 10^{-3} T$ cuando $R = 10$ cm ¿Cuál sería el módulo del campo magnético si R fuese igual a 50 cm?



La dirección del campo magnético en ambos puntos es tangente a la circunferencia de la figura y el sentido, según la regla de la mano derecha, el antihorario.



El módulo del campo magnético es igual a:

$$|\vec{B}| = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}$$

Es decir, el módulo campo magnético es inversamente proporcional a la distancia, por lo que el $|\vec{B}|$ a 5 cm de distancia será 5 veces menor que a 10 cm de distancia:

$$|\vec{B}_{50}| = \frac{|\vec{B}_{10}|}{5} = \frac{4 \cdot 10^{-3}}{5} \rightarrow |\vec{B}_{50}| = 8 \cdot 10^{-4} T$$



Cuestión 3.- Un microscopio electrónico emplea electrones acelerados mediante una diferencia de potencial de 2500 voltios. ¿Cuál es la longitud de onda de estos electrones?
Constante de Planck $6.63 \cdot 10^{-34}$ J·s; masa del electrón $9.1 \cdot 10^{-31}$ kg; carga del electrón $-1.6 \cdot 10^{-19}$ C.

La longitud de onda de los electrones la podemos calcular a partir de la relación de De Broglie:

$$\lambda = \frac{h}{m v}$$

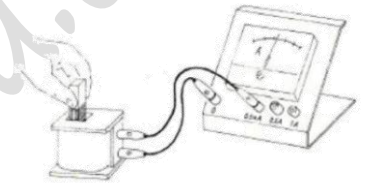
Para calcular la velocidad nos valemos del dato de que son acelerados por una diferencia de potencial de 2500 V, por lo que energía cinética será:

$$W = q \Delta V = \Delta E_c \rightarrow -q \Delta V = \frac{1}{2} m v^2 \rightarrow v = \sqrt{\frac{-2 q \Delta V}{m}} = \sqrt{\frac{-2 (-1.6 \cdot 10^{-19}) 2500}{9.1 \cdot 10^{-31}}} \rightarrow v = 2.96 \cdot 10^7 \text{ m/s}$$

Por lo que la longitud de onda será:

$$\lambda = \frac{h}{m v} = \frac{6.63 \cdot 10^{-34}}{9.1 \cdot 10^{-31} \cdot 2.96 \cdot 10^7} \rightarrow \lambda = 2.46 \cdot 10^{-11} \text{ m}$$

Cuestión Experimental.- Una bobina formada por un estrecho arrollamiento de espiras de cable conductor se conecta a un amperímetro cuyo cero está en el centro de la escala (ver figura). Un estudiante toma un imán y alternativamente lo introduce y lo retira del hueco central de la bobina. Al hacerlo, observa que la aguja del amperímetro se mueve alternativamente a la derecha y a la izquierda del centro de la escala. Explicar razonadamente este fenómeno.



El campo magnético del imán en reposo dentro de la bobina produce un flujo magnético a través de dicha bobina. Este flujo magnético es igual a:

$$\phi = N \cdot B \cdot S$$

Este flujo magnético es constante a través de cualquier área ya que al estar el imán en reposo, el campo magnético en cada punto es constante y no varía con el tiempo. Por tanto, la fuerza electromotriz será nula:

$$\varepsilon = -\frac{d\phi}{dt} \rightarrow \varepsilon = 0$$

Al ser la derivada de una constante cero.

El que la fem sea nula significa que a lo largo del cable de la bobina, no se induce ningún campo eléctrico capaz de poner en movimiento las cargas que le dan al cobre su propiedad de buen conductor de la corriente eléctrica. Por lo que el amperímetro no registrará el paso de ninguna corriente.

Si hay un imán dentro del hueco de la bobina, el campo magnético del imán origina un flujo magnético no nulo que será mayor cuanto más potente sea el imán.

- Si el imán está quieto, el flujo magnético será constante, independientemente de la potencia del imán, por lo que la fem será nula y las cargas libres del hilo conductor de la bobina permanecen inmóviles y, por tanto, el amperímetro no registrará lectura alguna.
- Si el imán se mueve, el flujo magnético será variable con el tiempo con lo que la fem no será nula. Por tanto, se generará una corriente eléctrica que será registrada por el amperímetro.

Opción B

Problema 1.- Un pequeño meteorito de masa 10 kg es atraído por un planeta de masa 10^{24} kg y radio 5000 km. Considerando que cuando el meteorito se encontraba a gran distancia su velocidad inicial era despreciable, se pide:

- a) La fuerza de atracción entre planeta y meteorito cuando la distancia al planeta es 10^6 km.
- b) La velocidad del meteorito cuando se encuentra a 1000 km por encima de la superficie.
- c) La energía cinética del meteorito en el momento del impacto contra la superficie.

Constante de gravitación $G = 6.67 \cdot 10^{-11}$ N m² kg⁻².

La expresión de la fuerza de atracción gravitatoria es:

$$|\vec{F}_g| = G \frac{m \cdot M}{R^2} = 6.67 \cdot 10^{-11} \frac{10 \cdot 10^{24}}{(10^9)^2} \rightarrow |\vec{F}_g| = 6.67 \cdot 10^{-4} \text{ N}$$

Cuando el meteorito se encuentra a 1000 km de la superficie planetaria, su energía total es igual a la suma de su energía potencial gravitatoria y de su energía cinética, que es igual a cero:

$$E_T = 0 \rightarrow E_C + E_P = 0 \rightarrow \frac{1}{2} m v^2 + \left(-G \frac{m \cdot M}{R}\right) = 0 \rightarrow v = \sqrt{\frac{2 \cdot G \cdot M}{R}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 6.67 \cdot 10^{-11} \cdot 10^{24}}{5 \cdot 10^6 + 10^6}} \rightarrow v = 4715 \text{ m/s}$$

Cuando el meteorito impacta contra la superficie planetaria su energía total sigue siendo nula:

$$E_T = 0 \rightarrow E_C + E_P = 0 \rightarrow E_C + \left(-G \frac{m \cdot M}{R}\right) = 0 \rightarrow E_C = G \frac{m \cdot M}{R} = 6.67 \cdot 10^{-11} \frac{10 \cdot 10^{24}}{5 \cdot 10^6} \rightarrow E_C = 1.33 \cdot 10^8 \text{ Jul}$$

Problema 2.- Un electrón parte del reposo y es acelerado mediante una diferencia de potencial de 200 V. Posteriormente penetra perpendicularmente en un campo magnético uniforme de 10^{-3} T con la velocidad adquirida. Determinar:

- La energía cinética del electrón. Expresar el resultado en eV y en julios.
- El periodo y radio de la órbita del electrón dentro del campo magnético.
- Si en lugar de emplear un electrón este experimento se realizase con un protón entrando en el campo magnético con la misma velocidad con la que entra el electrón, ¿cuál sería el periodo y el radio de la órbita del protón? (la masa del protón es 1836 veces mayor que la del electrón, y su carga es la misma en valor absoluto pero de signo contrario).

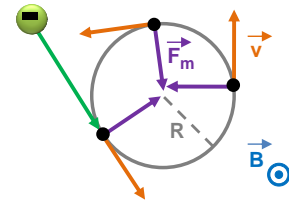
Masa del electrón = $9.1 \cdot 10^{-31}$ kg; carga del electrón = $-1.6 \cdot 10^{-19}$ C.

La energía del electrón es igual al trabajo que se realiza sobre él cuando es acelerado (en sentido opuesto a las líneas del campo eléctrico) por una diferencia de potencial de 200V:

$$E_C = W \rightarrow E_C = -q \Delta V = -(-1.6 \cdot 10^{-19}) \cdot 200 \rightarrow E_C = 3.2 \cdot 10^{-17} \text{ Jul} \cdot \frac{1 \text{ eV}}{1.6 \cdot 10^{-19}} = 200 \text{ eV}$$

La fuerza magnética cambia la trayectoria del electrón, haciendo que realice un MCU en sentido antihorario (visto desde arriba), como puede verse en la figura. Esto es debido a que al ser la carga del electrón de signo negativo, la \vec{F}_m tiene el sentido que se aprecia en la figura (perpendicular al producto vectorial del vector velocidad por el vector campo magnético):

$$\vec{F}_m = -e \vec{v} \times \vec{B}$$



Como se aprecia en la figura la \vec{F}_m actúa como fuerza centrípeta (perpendicular al vector \vec{v}), no cambiando el módulo de la velocidad, sólo su sentido. Por tanto la fuerza magnética tiene igual módulo que la fuerza centrípeta:

$$|\vec{F}_m| = |\vec{F}_c| \rightarrow q v B \text{ sen } \theta = m \frac{v^2}{R} \rightarrow R = \frac{m v}{q B \text{ sen } 90} = \frac{9.1 \cdot 10^{-31} \cdot 8.39 \cdot 10^6}{1.6 \cdot 10^{-19} \cdot 10^{-3}} \rightarrow R = 4.77 \cdot 10^{-2} \text{ m}$$

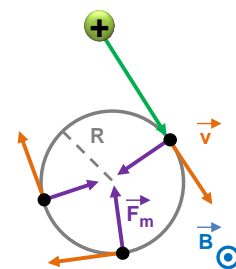
$$E_C = \frac{1}{2} m v^2 \rightarrow v = \sqrt{\frac{2 E_C}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 3.2 \cdot 10^{-17}}{9.1 \cdot 10^{-31}}} \rightarrow v = 8.39 \cdot 10^6 \text{ m/s}$$

El electrón describe un MCU por lo que el módulo de la velocidad es constante y la órbita es circular, por lo que su longitud es $2\pi R$. Como el periodo es el tiempo que invierte en dar una vuelta completa:

$$T = \frac{2 \pi R}{v} = \frac{2 \pi 4.77 \cdot 10^{-2}}{8.39 \cdot 10^6} \rightarrow T = 3.57 \cdot 10^{-8} \text{ s}$$

Si en vez de un electrón, hubiera penetrado de la misma forma un protón en el mismo campo magnético y con la misma velocidad, el sentido de la órbita sería el horario (visto desde arriba). Ya que al ser la carga del protón de signo positivo, el vector \vec{F}_m tiene el sentido que se aprecia en la figura, opuesto al que tenía en el caso anterior, aunque sigue siendo perpendicular al producto vectorial del vector velocidad por el vector campo magnético:

$$\vec{F}_m = +p \vec{v} \times \vec{B}$$



En cuanto al radio será 1836 veces mayor que el de la órbita del electrón, puesto que el radio es directamente proporcional a la masa y el protón es 1836 veces más pesado que el electrón:

$$R = \frac{m v}{q B \text{ sen } 90} = 1836 R_e = 1836 \cdot 4.77 \cdot 10^{-2} \rightarrow R_p = 87.6 \text{ m}$$

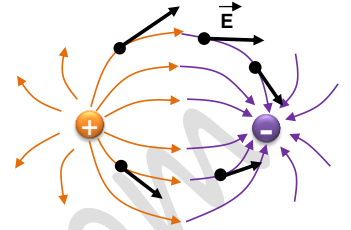


Lo mismo ocurre con el periodo, ya que éste es directamente proporcional al radio:

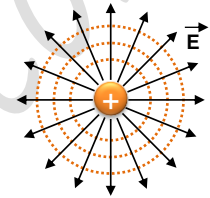
$$T = \frac{2\pi R}{v} = 1836 T_e \rightarrow T_e = 6.56 \cdot 10^{-5} \text{ s}$$

Cuestión 1.- ¿Es posible que dos líneas del campo eléctrico se corten? ¿Es posible que dos superficies equipotenciales se corten? Explicar razonadamente.

El vector campo eléctrico es un vector tangente a la línea de campo eléctrico que pasa por cada punto. Si dos líneas de campo distintas se cortaran en un mismo punto, habría en él dos tangentes distintas; ello querría decir que en ese punto el campo eléctrico tiene dos valores distintos (en dirección, módulo y sentido), lo cual es imposible. Por lo tanto, no es posible que dos líneas de campo se corten en ningún punto.



Si dos superficies equipotenciales (todos sus puntos tienen el mismo potencial) diferentes se cortaran entre sí, tendrían puntos comunes, en cada uno de los cuales habría dos potenciales distintos. Como además el campo eléctrico es perpendicular a la superficie equipotencial en cada punto del espacio, si dichas superficies tuviesen puntos comunes, habría dos campos eléctricos distintos en cada uno de esos puntos comunes, lo cual como hemos dicho anteriormente es imposible. Por tanto, dos superficies equipotenciales no pueden cortarse.



Cuestión 2.- Si comparamos dos isótopos radiactivos, cuyas constantes de desintegración son λ_1 y λ_2 , siendo $\lambda_1 > \lambda_2$, ¿cuál de ellos se desintegra más rápidamente? Contestar razonadamente.

Según la ley de decaimiento radiactivo:

$$N = N_0 \cdot e^{-\lambda t}$$

Si partimos del mismo número de núcleos radiactivos (N_0), el número final de núcleos radiactivos (N) sólo dependerá del tiempo transcurrido y de la constante de desintegración (λ). Si el tiempo transcurrido es el mismo para los dos isótopos:

$$\uparrow \lambda \rightarrow \downarrow e^{-\lambda t} \rightarrow \downarrow N$$

Por tanto, si $\lambda_1 > \lambda_2$, podemos concluir que el **isótopo 1 es el que se desintegra más rápidamente** (tendrá menor N).

Cuestión 3.- Una lámpara de sodio emite luz amarilla cuya longitud de onda en el vacío es $589 \cdot 10^{-9} \text{ m}$. La luz se transmite por una fibra óptica de cuarzo cuyo índice de refracción es $n = 1,4580$. ¿Cuál es la longitud de onda y la velocidad de propagación a través de la fibra óptica? Velocidad de la luz en el vacío $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$.

Primero calculamos la frecuencia a partir de la velocidad de la luz en el vacío y la longitud de onda en el vacío:

$$c = \lambda_0 \cdot f \rightarrow f = \frac{c}{\lambda_0} = \frac{3 \cdot 10^8}{589 \cdot 10^{-9}} \rightarrow f = 5.09 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$$

Cuando la luz pasa de un medio a otro de distinto índice de refracción, sólo permanece constante su frecuencia. La velocidad y la longitud de onda cambian según:

$$v = \lambda \cdot f$$

Por otro lado el índice de refracción viene dado por:

$$n = \frac{c}{v} = \frac{\lambda_0 \cdot f}{\lambda \cdot f} \xrightarrow{f=\text{cte}} n = \frac{\lambda_0}{\lambda}$$

Por tanto, la longitud de onda a través de la fibra óptica será:

$$n = \frac{\lambda_0}{\lambda} \rightarrow \lambda = \frac{\lambda_0}{n} = \frac{589 \cdot 10^{-9}}{1.458} \rightarrow \lambda = 404 \cdot 10^{-9} \text{ m} = 404 \text{ nm}$$

Y la velocidad de propagación en el mismo material:

$$v = \lambda \cdot f = 404 \cdot 10^{-9} \cdot 5.09 \cdot 10^{14} \rightarrow v = 2.06 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

Cuestión Experimental.- En el laboratorio de Física se quiere determinar la constante elástica de un muelle, y para hacerlo se toman las masas m indicadas en la tabla y se cuelgan del muelle, midiendo el tiempo invertido en 5 oscilaciones (tiempos t de la segunda columna de la tabla). Explicar de qué forma deben tratarse los datos y calcular cuál es la constante elástica del muelle estudiado

m (gr)	t (s)
90	5.4
120	6.2
150	7.1
180	7.8

La constante elástica del muelle la podemos calcular a partir de la expresión del periodo de oscilación del resorte:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \rightarrow k = 4\pi^2 \frac{m}{T^2}$$

El periodo de oscilación lo calculamos dividiendo el tiempo de cada resorte entre las 5 oscilaciones que dan. Por último, la constante elástica del resorte será la media aritmética de las constantes elásticas calculadas para cada masa:

m (kg)	t(s)	$T = \frac{t}{5 \text{ oscilaciones}}$	k(N/m)
0.09	5.4	1.08	3.05
0.12	6.2	1.24	3.08
0.15	7.1	1.42	2.94
0.18	7.8	1.56	2.92

$$k = \frac{3.05 + 3.08 + 2.94 + 2.92}{4} \rightarrow k = 3 \text{ N/m}$$