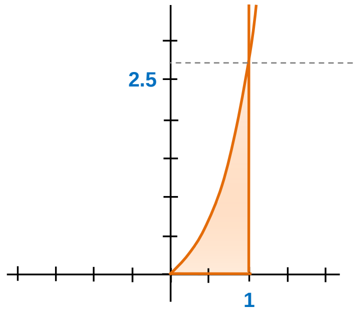
Universidad de Castilla la Mancha – Reserva-1 - 2.001

Primer Bloque

A.- Dada la función $y = x\,e^x$ y las rectas $x = 1$ e $y = 0$.

a) Dibuja la gráfica de la función para $x \geq 0$ y la de las rectas
b) Señala el recinto plano comprendido entre las tres gráficas anteriores
c) Calcula el área del recinto plano señalado



$$A = \int_0^1 x\cdot e^x\,dx \rightarrow \text{Por partes} \rightarrow \begin{cases} x = u \rightarrow dx = du \\ e^x\,dx = dv \rightarrow e^x = v \end{cases} \rightarrow \int_0^1 x\cdot e^x\,dx = x\,e^x - \int_0^1 e^x\,dx = [x\cdot e^x]_0^1 - [e^x]_0^1 =$$

$$= \left(1e^1 - 0\,e^0\right) - \left(e^1 - e^0\right) = e - e + 1 \rightarrow \mathbf{A = 1\ u^2}$$

B.- Dadas las rectas: $r \equiv \begin{cases} x = 2 - 3\lambda \\ y = 3 + 5\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x = 1 - \mu \\ y = 2\mu \\ z = 5 \end{cases}$

a) Estudia la posición relativa de las rectas r y s
b) En el caso de que r y s se corten, calcula las coordenadas del punto de corte

$$\left.\begin{array}{l} r \equiv \begin{cases} x = 2 - 3\lambda \\ y = 3 + 5\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \rightarrow \begin{array}{l} \mathbf{\vec{d_r} = (-3, 5, 1)} \\ \mathbf{R = (2, 3, 0)} \end{array} \\ s \equiv \begin{cases} x = 1 - \mu \\ y = 2\mu \\ z = 5 \end{cases} \rightarrow \begin{array}{l} \mathbf{\vec{d_s} = (-1, 2, 0)} \\ \mathbf{S = (1, 0, 5)} \end{array} \end{array}\right\} \rightarrow |A| = \begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 5 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \rightarrow \mathbf{R(A) = 2} \rightarrow |A^*| = \begin{vmatrix} -3 & -1 & 1-2 \\ 5 & 2 & 0-3 \\ 1 & 0 & 5-0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -3 \\ -1 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \mathbf{R(A^*) = 2}$$

$$R(A) = R(A^*) = 2 \rightarrow \mathbf{S.C.D} \rightarrow \mathbf{Se\ cortan} \rightarrow \begin{cases} 2 - 3\lambda = 1 - \mu \\ 3 + 5\lambda = 2\mu \\ \mathbf{\lambda = 5} \end{cases} \rightarrow \mathbf{\mu = 14} \rightarrow \mathbf{P\ (-13, 28, 5)}$$

Segundo Bloque

A.- Resuelve: $\int \frac{x^2 - x + 1}{x^3 + x}\,dx$

$$\int \frac{x^2 - x + 1}{x^3 + x}\,dx = \int \frac{x^2 - x + 1}{x(x^2 + 1)}\,dx = \int \frac{A}{x}\,dx + \int \frac{Bx + C}{(x^2 + 1)}\,dx$$

$$\frac{x^2 - x + 1}{x(x^2 + 1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{(x^2 + 1)} = \frac{A(x^2 + 1) + x(Bx + C)}{x(x^2 + 1)} \rightarrow \begin{cases} x = 0 \rightarrow \mathbf{A = 1} \\ x = 1 \rightarrow 2A + B + C = 1 \\ x = 2 \rightarrow 5A + 4B + 2C = 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} B + C = -1 \\ 4B + 2C = -2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \mathbf{B = 0} \\ \mathbf{C = -1} \end{cases}$$

$$\int \frac{x^2 - x + 1}{x^3 + x}\,dx = \int \frac{1}{x}\,dx - \int \frac{1}{(x^2 + 1)}\,dx = \mathbf{Ln\,x + arc.tg\,x + K}$$

B.- Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) Halla paso a paso la inversa de la matriz A

b) Resuelve la siguiente ecuación matricial $A \cdot X - B = A \cdot B$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \rightarrow \neq 0 \rightarrow \exists\, A^{-1} \rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|}\left(A^d\right)^t$$

$$A^d = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \left(A^d\right)^t = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow A^{-1} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \mathbf{A^{-1}} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{-½} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{1} & \mathbf{½} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{½} \end{pmatrix}$$

$$AX - B = AB \rightarrow AX = AB + B \rightarrow A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot AB + A^{-1} \cdot B \rightarrow X = B + A^{-1} \cdot B \rightarrow \mathbf{X = B \cdot (I + A^{-1})}$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & -½ \\ -1 & 1 & ½ \\ 0 & 0 & ½ \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & -½ \\ -1 & 2 & ½ \\ 0 & 0 & ^3/_2 \end{pmatrix} \rightarrow \mathbf{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{0} & \mathbf{-2} \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{^3/_2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{^3/_2} \end{pmatrix}$$

Tercer Bloque

A.- Dada la función $f(x) = \begin{cases} x + b & \text{si } x < 0 \\ ax^2 + 3 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ determina a y b para que f(x) sea continua y no derivable en x = 0

Para que sea continua: $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0) \begin{cases} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = b \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 3 \\ f(0) = 3 \end{cases} \rightarrow \mathbf{b = 3} \rightarrow \mathbf{f(x)} = \begin{cases} \mathbf{x + 3} & \textbf{si } \mathbf{x < 0} \\ \mathbf{ax^2 + 3} & \textbf{si } \mathbf{x \geq 0} \end{cases}$

Para que no sea derivable: $\lim\limits_{x \to 0^+} f'(x) \neq \lim\limits_{x \to 0^-} f'(x) \rightarrow \mathbf{f'(x)} = \begin{cases} \mathbf{1} & \textbf{si } \mathbf{x < 0} \\ \mathbf{2ax} & \textbf{si } \mathbf{x \geq 0} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x \to 0^-} f'(x) = 1 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f'(x) = 0 \end{cases} \rightarrow$ **No derivable: x = 0**

Por tanto, para $\forall\, \mathbf{a} \in \mathbb{R}$ y b = 3, la función es continua y no derivable en x=0.

B.- Discute y resuelve (en los casos que sea posible) el siguiente sistema: $\begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = 1 \\ x + y + az = 1 \end{cases}$

$$|A| = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = a^3 - 3a + 2 \rightarrow a^3 - 3a + 2 = 0 \rightarrow \text{Ruffini} \rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ a = -2 \end{cases} \rightarrow \forall\, \mathbf{a} \in \mathbb{R} - \{\mathbf{-2, 1}\} \rightarrow \mathbf{R\,(A) = 3} \rightarrow \mathbf{R\,(A^*) = 3}$$

$$a = 1 \rightarrow |A^*| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \mathbf{R\,(A^*) = 1} \rightarrow \mathbf{R\,(A) = 1}$$

$$a = -2 \rightarrow |A^*| = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \rightarrow \mathbf{R\,(A^*) = 3} \rightarrow \mathbf{R\,(A) = 1}$$

Según Roché-Frobenius: $\begin{cases} \forall\, \mathbf{a} \in \mathbb{R} - \{\mathbf{-2, 1}\} \rightarrow \mathbf{R\,(A) = R\,(A^*) =} \textbf{ nº incógnitas: S.C.D} \\ \mathbf{a = 1} \rightarrow \mathbf{R\,(A) = R\,(A^*) \neq} \textbf{ nº incógnitas: S.C.I} \\ \mathbf{a = -2} \rightarrow \mathbf{R\,(A) \neq R\,(A^*)}\textbf{: S.I} \end{cases}$

Por Kramer: $\begin{cases} x = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix}}{a^3 - 3a + 2} = \dfrac{a^2 - 2a + 1}{(a-1)^2\,(a+2)} = \dfrac{(a-1)^2}{(a-1)^2\,(a+2)} \rightarrow \mathbf{x = \dfrac{1}{a+2}} \\ y = \dfrac{\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix}}{a^3 - 3a + 2} = \dfrac{a^2 - 2a + 1}{(a-1)^2\,(a+2)} = \dfrac{(a-1)^2}{(a-1)^2\,(a+2)} \rightarrow \mathbf{y = \dfrac{1}{a+2}} \\ z = \dfrac{\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{a^3 - 3a + 2} = \dfrac{a^2 - 2a + 1}{(a-1)^2\,(a+2)} = \dfrac{(a-1)^2}{(a-1)^2\,(a+2)} \rightarrow \mathbf{z = \dfrac{1}{a+2}} \end{cases} \rightarrow \text{Soluc.} \left(\mathbf{\dfrac{1}{a+2}, \dfrac{1}{a+2}, \dfrac{1}{a+2}}\right)$

Cuarto Bloque

A.- Enuncia la regla de L'Hôpital y calcula el siguiente límite: $\lim_{x\to 1}\frac{x^3-3x+2}{x^4-2x^2+1}$

Sean f(x) y g(x) funciones continuas en [a, b], derivables en (a, b), que cumplen $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0$, siendo $x_0 \in (a, b)$, y tales que $g'(x) \neq 0$ para todo valor de x en el intervalo (a, b). Entonces, si $f(x_0) = g(x_0) = 0$ y existe el $\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$, se tiene que también existe el límite $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$ y, además, estos límites son iguales:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-3x+2}{x^4-2x^2+1} = \frac{1^3-3+2}{1^4-2+1} = \frac{\mathbf{0}}{\mathbf{0}} \xrightarrow{\text{L' Hopital}} \lim_{x\to 1}\frac{3x^2-3}{4x^3-4x} = \lim_{x\to 1}\frac{3-3}{4-4} = \frac{\mathbf{0}}{\mathbf{0}}$$

$$\xrightarrow{\text{L' Hopital}} \lim_{x\to 1}\frac{6x}{12x^2-4} = \lim_{x\to 1}\frac{6}{12-4} = \frac{6}{8} = \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}}$$

B.- Dadas las rectas $s \equiv \frac{x}{4} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z}{2}$ y $r \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y-a}{a-1} = \frac{z-3}{3}$

a) Calcula el valor de a para que las rectas r y s sean perpendiculares

En el caso de que r y s se corten:

b) Calcula las coordenadas del punto de intersección de las rectas r y s

c) Halla la ecuación del plano que determinan las rectas r y s

Si r y s son perpendiculares, el producto escalar de sus vectores directores es nulo:

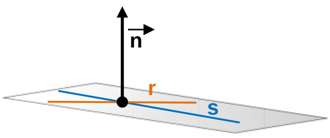
$$\left.\begin{array}{l} s \equiv \frac{x}{4} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z}{2} \to \begin{array}{c}\vec{d_s} = (4,-2,2) = \mathbf{(2,-1,1)} \\ \mathbf{S = (0, 1, 0)}\end{array} \\ r \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y-a}{a-1} = \frac{z-3}{3} \to \begin{array}{c}\vec{d_r} = \mathbf{(1, a-1, 3)} \\ \mathbf{R = (1, a, 3)}\end{array}\end{array}\right\} \to \vec{d_s}\cdot\vec{d_r} = \mathbf{0} \to (4,-2,2)\cdot(1,a-1,3) = 0 \to 4-2a+2+6 = 0 \to \mathbf{a = 6}$$

Estudiamos la posición relativa de las rectas:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & a-1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \to \forall\, \mathbf{a} \in \mathbb{R} : \mathbf{R(A) = 2} \to |A^*| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1-0 \\ -1 & a-1 & a-1 \\ 1 & 3 & 3-0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & a-1 & a-1 \\ 1 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 0 \to \forall\, \mathbf{a} \in \mathbb{R} : \mathbf{R(A^*) = 2}$$

$$\forall\, \mathbf{a} \in \mathbb{R} : \mathbf{R(A^*) = R(A) = 2 : S.I \to Se\ cortan}$$

$$\mathbf{a = \frac{3}{2}} \to \left.\begin{array}{l} s \equiv \begin{cases} x = 2\lambda \\ y = 1-\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \\ r \equiv \begin{cases} x = 1+\mu \\ y = a + (a-1)\mu \\ z = 3+3\mu \end{cases}\end{array}\right\} \to \begin{cases} 2\lambda = 1+\mu \\ 1-\lambda = a + (a-1)\mu \\ \lambda = 3+3\mu \end{cases} \to \begin{cases} 2\lambda - \mu = 1 \\ -\lambda + \mu(a-1) = a-1 \\ \lambda - 3\mu = 3 \end{cases} \to \mathbf{\mu = -1} \to \mathbf{\lambda = 0} \to \mathbf{P\ (0, 1, 0)}$$



$$\begin{array}{c} P \\ \vec{d_r} \\ \vec{d_s} \end{array} \to \begin{vmatrix} x-0 & y-1 & z-0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & a-1 & 3 \end{vmatrix} = 0 \to \mathbf{x(-2-a) - 5y + z(2a-2) + 5 = 0}$$