

OPCIÓN DE EXAMEN Nº 1

1) Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ c & 1 & b \\ -1 & c & a \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 13 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$, con **a**, **b** y **c** números reales.

a) [1,75 PUNTOS] Calcule los valores de **a**, **b** y **c** para que $AB = C$.

b) [1,5 PUNTOS] Calcule la inversa de A cuando **a = 0**, **b = 1**, **c = -1**

a)

$$\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ c & 1 & b \\ -1 & c & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2+a+5b \\ 2c+1+5b \\ -2+c+5a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a+5b=11 \\ 5b+2c=4 \\ 5a+c=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 & | & 11 \\ 0 & 5 & 2 & | & 4 \\ 5 & 0 & 1 & | & 2 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 & | & 11 \\ 0 & 5 & 2 & | & 4 \\ 0 & -25 & 1 & | & -53 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 & | & 11 \\ 0 & 5 & 2 & | & 4 \\ 0 & 0 & 11 & | & -33 \end{pmatrix} \Rightarrow 11c = -33 \Rightarrow c = -\frac{33}{11} = -3 \Rightarrow 5b + 2 \cdot (-3) = 4 \Rightarrow 5b - 6 = 4 \Rightarrow 5b = 10 \Rightarrow b = \frac{10}{5} = 2$$

$$a + 5 \cdot 2 = 11 \Rightarrow a = 1 \Rightarrow \text{Solución} \Rightarrow (a, b, c) = (1, 2, -3)$$

b) Una matriz tiene inversa si su determinante no es nulo

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 2 = 3 \neq 0 \Rightarrow \text{Existe } A^{-1} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \text{adj } A'$$

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{adj } A' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \quad \mathbf{2)}$$

$$\text{Sea la función dada por } f(x) = \begin{cases} -3x+3 & \text{si } x < 1 \\ ax^2 + bx + 3 & \text{si } 1 \leq x < 3 \\ \sqrt{x^2 - 5} & \text{si } 3 < x \end{cases}$$

1) [1 PUNTO] Calcule **a** y **b** para que la función f sea continua en todo R.

2) [2,5 PUNTOS] Si **a = 1** y **b = 2**, calcule el área encerrada bajo la gráfica de **f(x)** entre las rectas **y = 0**, **x = 0** y **x = 3**

1) Estudiaremos la continuidad de **f** en **x = 1** y **x = 3**

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = (-3) \cdot 1 + 3 = 0 \\ f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + 3 = a + b + 3 \Rightarrow f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \Rightarrow 3 + a + b = 0 \Rightarrow a + b = -3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(3) = \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = a \cdot 3^2 + b \cdot 3 + 3 = 9a + 3b + 3 \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \sqrt{3^2 - 5} = \sqrt{4} = 2 \Rightarrow f(3) = \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) \Rightarrow 3 + 9a + 3b = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a + b = -3 \\ 9a + 3b = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -9a - 9b = 27 \\ 9a + 3b = -1 \end{cases} \Rightarrow -6b = 26 \Rightarrow b = -\frac{26}{6} = -\frac{13}{3} \Rightarrow a - \frac{13}{3} = -3 \Rightarrow a = -3 + \frac{13}{3} = \frac{4}{3}$$

Continuación del problema 2 de la Opción de Examen nº 1

2)

$$f(x) = \begin{cases} -3x+3 & \text{si } x < 1 \\ x^2 + 2x + 3 & \text{si } 1 \leq x < 3 \\ \sqrt{x^2 - 5} & \text{si } 3 < x \end{cases}$$

$$\text{Puntos de corte con OX} \Rightarrow y = 0 \Rightarrow \begin{cases} -3x+3 = 0 \Rightarrow 3x = 3 \Rightarrow x = 1 \notin (-\infty, 1) \\ x^2 + 2x + 3 = 0 \Rightarrow \Delta = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = -8 < 0 \Rightarrow \text{Sin puntos de corte} \\ \sqrt{x^2 - 5} = 0 \Rightarrow x^2 - 5 = 0 \Rightarrow x^2 = 5 \Rightarrow x = \pm\sqrt{5} \Rightarrow \notin (3, \infty) \end{cases}$$

$$\text{Si } x = \frac{1}{2} \in (0, 1) \Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) = -3 \cdot \frac{1}{2} + 3 = \frac{3}{2} > 0 \Rightarrow f(x) \text{ es positiva}$$

$$\text{Si } x = 2 \in (1, 3) \Rightarrow f(2) = 2^2 + 2 \cdot 2 + 3 = 11 > 0 \Rightarrow f(x) \text{ es positiva}$$

$$A = \int_0^1 (-3x+3) dx + \int_1^3 (x^2 + 2x + 3) dx = -3 \cdot \frac{1}{2} \cdot [x^2]_0^1 + 3 \cdot [x]_0^1 + \frac{1}{3} \cdot [x^3]_1^3 + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot [x^2]_1^3 + 3 \cdot [x]_1^3$$

$$A = -\frac{3}{2} \cdot (1^2 - 0^2) + 3 \cdot (1 - 0) + \frac{1}{3} \cdot (3^3 - 1^3) + (3^2 - 1^2) + 3 \cdot (3 - 1) = -\frac{3}{2} + 3 + \frac{26}{3} + 8 + 6$$

$$A = -\frac{3}{2} + 17 + \frac{26}{3} = \frac{-9 + 102 + 52}{6} = \frac{145}{6} u^2$$

3) Considere los puntos $A = (1, 1, 1)$, $B = (0, -1, 1)$ y $C = (2, -1, 2)$ en \mathfrak{R}^3

1) [1,5 PUNTOS] Calcule P , la proyección ortogonal del punto A sobre la recta BC .

2) [1 PUNTO] Calcule la distancia de A a la recta BC .

3) [0,75 PUNTOS] Compruebe que $|\overrightarrow{CA}|^2 - |\overrightarrow{AB}|^2 = |\overrightarrow{CP}|^2 - |\overrightarrow{PB}|^2$.

1) Hallaremos un plano π que conteniendo al punto A es perpendicular a la recta BC , siendo su vector director el de la recta que es perpendicular al vector \overrightarrow{AG} , G el punto generador del plano, y cuyo producto escalar es nulo y la ecuación del plano.

La intersección de la recta BC con el plano hallado nos determinará el punto P

$$\overrightarrow{BC} = (2, -1, 2) - (0, -1, 1) = (2, 0, 1) \Rightarrow \overrightarrow{BC} = \begin{cases} x = 2\lambda \\ y = -1 \\ z = 1 + \lambda \end{cases}$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{AG} = (x, y, z) - (1, 1, 1) = (x-1, y-1, z-1) \\ \overrightarrow{BC} = (2, 0, 1) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{BC} \perp \overrightarrow{AG} \Rightarrow \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AG} = 0 \Rightarrow$$

$$(2, 0, 1) \cdot (x-1, y-1, z-1) = 0 \Rightarrow 2 \cdot (x-1) + (z-1) = 0 \Rightarrow \pi \equiv 2x + z - 3 = 0$$

$$\text{Intersección} \Rightarrow 2 \cdot 2\lambda + (1 + \lambda) - 3 = 0 \Rightarrow 4\lambda + 1 + \lambda - 3 = 0 \Rightarrow 5\lambda - 2 = 0 \Rightarrow 5\lambda = 2 \Rightarrow \lambda = \frac{2}{5}$$

$$P \begin{cases} x = 2 \cdot \frac{2}{5} \\ y = -1 \\ z = 1 + \frac{2}{5} \end{cases} \Rightarrow P\left(\frac{4}{5}, -1, \frac{7}{5}\right)$$

Continuación del problema 3 de la Opción de Examen nº 1

2) Es la distancia del punto **A** al punto **P**, o sea el modulo del vector **AP**

$$\overrightarrow{AP} = \left(\frac{4}{5}, -1, \frac{7}{5}\right) - (1, 1, 1) = \left(-\frac{1}{5}, -2, \frac{2}{5}\right)$$

$$d(A, \overline{BC}) = d(A, P) = |\overrightarrow{AP}| = \sqrt{\left(-\frac{1}{5}\right)^2 + (-2)^2 + \left(\frac{2}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{25} + 4 + \frac{4}{25}} = \sqrt{\frac{1+100+4}{25}} = \frac{\sqrt{105}}{5} u$$

3)

$$\left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (0, -1, 1) - (1, 1, 1) = (-1, -2, 0) \Rightarrow |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2 + 0^2} = \sqrt{5} \\ \overrightarrow{CA} = (1, 1, 1) - (2, -1, 2) = (-1, 2, -1) \Rightarrow |\overrightarrow{CA}| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + (-1)^2} = \sqrt{6} \\ \overrightarrow{CP} = \left(\frac{4}{5}, -1, \frac{7}{5}\right) - (2, -1, 2) = \left(-\frac{6}{5}, 0, -\frac{3}{5}\right) \Rightarrow |\overrightarrow{CP}| = \sqrt{\left(-\frac{6}{5}\right)^2 + 0^2 + \left(-\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{\sqrt{45}}{5} \Rightarrow \\ \overrightarrow{PB} = (0, -1, 1) - \left(\frac{4}{5}, -1, \frac{7}{5}\right) = \left(-\frac{4}{5}, 0, -\frac{2}{5}\right) \Rightarrow |\overrightarrow{PB}| = \sqrt{\left(-\frac{4}{5}\right)^2 + 0^2 + \left(-\frac{2}{5}\right)^2} = \frac{\sqrt{20}}{5} \end{array} \right.$$

$$|\overrightarrow{CA}|^2 - |\overrightarrow{AB}|^2 = |\overrightarrow{CP}|^2 - |\overrightarrow{PB}|^2 \Rightarrow (\sqrt{6})^2 - (\sqrt{5})^2 = \left(\frac{\sqrt{45}}{5}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{20}}{5}\right)^2 \Rightarrow 6 - 5 = \frac{45}{25} - \frac{20}{25} \Rightarrow 1 = \frac{25}{25}$$

Igualdad comprobada

OPCIÓN DE EXAMEN Nº 2

1) Considere el sistema de ecuaciones dependiente de un parámetro:

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 3a \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & -3a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

1) [3,25 PUNTOS] Estudie el comportamiento del sistema dependiendo del valor del parámetro $a \in \mathbb{R}$. Calcule todas sus soluciones cuando el sistema sea compatible.

$$|A| = \begin{vmatrix} a & 0 & 3a \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & -3a \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} a & 3a \\ -1 & -3a \end{vmatrix} = 2 \cdot (-3a^2 + 3a) = (-6)(a^2 - a) = (-6)a(a-1) \Rightarrow$$

$$\text{Si } |A| = 0 \Rightarrow (-6)a(a-1) = 0 \Rightarrow a(a-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a - 1 = 0 \Rightarrow a = 1 \end{cases}$$

$\forall a \in \mathbb{R} - \{0, 1\} \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow \text{rang}(A) = 3 = \text{Número de incógnitas} \Rightarrow \text{Sistema Compatible Deter min ado}$

Si $a = 0$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right) \Rightarrow \text{rang}(A) = 2 \neq \text{rang}(A/B) = 3 \Rightarrow \text{Sistema Incompatible}$$

Si $a = 1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & -3 & -1 \end{array} \right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -8 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \text{rang}(A) = \text{rang}(A/B) = 2 < \text{Número de incógnitas} \Rightarrow$$

Sistema Compatible In det er min ado

Cuando es Sistema Compatible Deter min ado

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a & 0 & 3a & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & -3a & -1 \end{array} \right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 3a - 3a^2 & 1 - a \\ 0 & 2 & 1 - 9a & 2 \\ -1 & 0 & -3a & -1 \end{array} \right) \Rightarrow (3a - 3a^2)z = 1 - a \Rightarrow 3a(1 - a)z = 1 - a \Rightarrow z = \frac{1}{3a} \Rightarrow$$

$$2y + (1 - 9a) \cdot \frac{1}{3a} = 2 \Rightarrow 2y = 2 - \frac{1 - 9a}{3a} \Rightarrow 2y = \frac{6a - 1 + 9a}{3a} \Rightarrow y = \frac{15a - 1}{6a} \Rightarrow -x - 3a \cdot \frac{1}{3a} = -1 \Rightarrow$$

$$-x - 1 = -1 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow \text{Solución} \Rightarrow (x, y, z) = \left(0, \frac{15a - 1}{6a}, \frac{1}{3a} \right)$$

Continuación del problema 1 de la Opción de Examen nº 2

Quando $a = 1$ es Sistema Compatible Indeterminado

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -8 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow x + 3z = 1 \Rightarrow x = 1 - 3z \Rightarrow 2y - 8z = 2 \Rightarrow 2y = 2 + 8z \Rightarrow y = 1 + 4z \Rightarrow$$

Solución $\Rightarrow (x, y, z) = (1 - 3\lambda, 1 + 4\lambda, \lambda)$

2) Sea $f(x) = \frac{x}{x^2 + 4}$

1) [2,5 PUNTOS] Estudie el dominio de f , corte con los ejes, simetrías respecto del eje **OY**, y respecto del origen, intervalos de crecimiento y decrecimiento, extremos locales y asíntotas de la función $f(x)$.

2) [1 PUNTO] Dibuje un esbozo de la gráfica de f

1)

$x^2 + 4 = 0 \Rightarrow x^2 = -4 \Rightarrow x = \pm\sqrt{-4} \Rightarrow$ Sin solución en $\mathfrak{R} \Rightarrow Dom(f) = \forall x \in \mathfrak{R}$

Corte con el eje **OY** $\Rightarrow x = 0 \Rightarrow f(0) = \frac{0}{0^2 + 4} = \frac{0}{4} = 0$

Corte con el eje **OX** $\Rightarrow y = 0 \Rightarrow 0 = \frac{x}{x^2 + 4} \Rightarrow x = 0$

$f'(x) = \frac{(x^2 + 4) - 2x \cdot x}{(x^2 + 4)^2} = \frac{x^2 + 4 - 2x^2}{(x^2 + 4)^2} = \frac{4 - x^2}{(x^2 + 4)^2} = \frac{(2 - x)(2 + x)}{(x^2 + 4)^2} \Rightarrow$ Creciente $\Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow$

$\frac{(2 - x)(2 + x)}{(x^2 + 4)^2} > 0 \Rightarrow \begin{cases} 2 - x > 0 \Rightarrow -x > -2 \Rightarrow x < 2 \\ 2 + x > 0 \Rightarrow x > -2 \\ (x^2 + 4)^2 > 0 \Rightarrow \forall x \in \mathfrak{R} \end{cases}$

$f(-x) = \frac{-x}{(-x)^2 + 4} = -\frac{x}{x^2 + 4} = -f(x) \Rightarrow$ Simétrico respecto al origen

| | | | | |
|--|-----------|-----------|----------|----------|
| | $-\infty$ | -2 | 2 | ∞ |
| $x > -2$ | (-) | (+) | (+) | |
| $x < 2$ | (+) | (+) | (-) | |
| $(x^2 + 4)^2 > 0$ | (+) | (+) | (+) | |
| Solución | (-) | (+) | (-) | |

Creciente $\forall x \in \mathfrak{R} / -2 < x < 2$

Decreciente $\forall x \in \mathfrak{R} / (x < -2) \cup (x > 2)$

Mínimo relativo $x = -2 \Rightarrow f(-2) = \frac{-2}{(-2)^2 + 2^2} = -\frac{2}{8} = -\frac{1}{4}$ **de Decrecimiento pasa a Crecimiento**

Máximo relativo $x = 2 \Rightarrow f(2) = \frac{2}{2^2 + 2^2} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$ **de Crecimiento pasa a Decrecimiento**

Continuación del problema 2 de la Opción de Examen nº 2**Asíntotas verticales**

No existen asíntotas verticales

Asíntotas horizontales

$$y = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x^2 + 4} = \frac{\infty}{\infty} = \frac{\text{Aplicando L'Hopital}}{\infty} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2x} = \frac{1}{\infty} = 0 \Rightarrow$$

Existe asíntota horizontal, $y = 0$, cuando $x \rightarrow \infty$

$$y = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x^2 + 4} = \frac{\infty}{\infty} = \frac{\text{Aplicando L'Hopital}}{-\infty} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{2x} = \frac{1}{-\infty} = 0 \Rightarrow$$

Existe asíntota horizontal, $y = 0$, cuando $x \rightarrow -\infty$ **Asíntotas oblicuas**

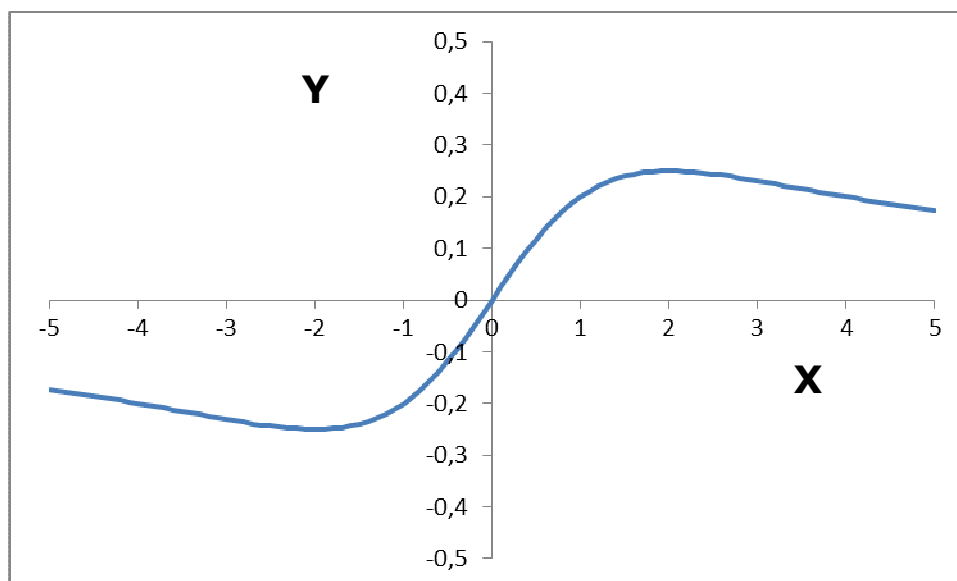
$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x}{x^2 + 4}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x^3 + 4x} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x}{x^3}}{\frac{x^3}{x^3} + \frac{4x}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x^2}}{1 - \frac{4}{x^2}} = \frac{\frac{1}{\infty}}{1 + \frac{1}{\infty}} = \frac{0}{1 + 0} = 0$$

No existe asíntota oblicua cuando $x \rightarrow \infty$

$$m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{x}{x^2 + 4}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x^3 + 4x} = \frac{-\infty}{-\infty} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{x}{x^3}}{\frac{x^3}{x^3} + \frac{4x}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{1}{x^2}}{1 - \frac{4}{x^2}} = \frac{\frac{1}{\infty}}{1 + \frac{1}{\infty}} = \frac{0}{1 + 0} = 0$$

No existe asíntota oblicua cuando $x \rightarrow -\infty$

2)



3.- Sean $\mathbf{P} = (1, -1, 1)$, $\mathbf{Q} = (0, 1, 3)$, $\mathbf{R} = (1, 2, 2)$ tres puntos de \mathbf{R}^3 .

1) [1 PUNTO] Calcule un vector \mathbf{v} con la misma dirección y sentido que \overrightarrow{PQ} y con el mismo módulo que \overrightarrow{QR} .

2) [1 PUNTO] ¿Están los puntos \mathbf{P} , \mathbf{Q} y \mathbf{R} alineados? En caso negativo, calcule el área del triángulo \mathbf{PQR} .

3) [1'25 PUNTOS] Calcule una recta perpendicular a \overrightarrow{PQ} que pase por el punto \mathbf{R}

1)

$$\begin{cases} \overrightarrow{PQ} = (0, 1, 3) - (1, -1, 1) = (-1, 2, 2) \\ \overrightarrow{QR} = (1, 2, 2) - (0, 1, 3) = (1, 1, -1) \end{cases} \Rightarrow |\overrightarrow{QR}| = \sqrt{1^2 + 1^2 + (-1)^2} = \sqrt{3}$$

$$\text{Vector unitario } \overrightarrow{PQ} \Rightarrow |\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 2^2} = \sqrt{9} = 3 \Rightarrow \|\overrightarrow{PQ}\| = \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) \Rightarrow$$

$$\vec{v} = \sqrt{3} \cdot \|\overrightarrow{PQ}\| = \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$$

b) El vector \mathbf{PQ} es igual o proporcional al vector \mathbf{PR} si los puntos están alineados

2)

$$\begin{cases} \overrightarrow{PQ} = (-1, 2, 2) \\ \overrightarrow{PR} = (1, 2, 2) - (1, -1, 1) = (0, 3, 1) \end{cases} \Rightarrow \frac{-1}{0} \neq \frac{2}{3} \Rightarrow \text{Los puntos no están alineados}$$

El área del triángulo que forman los dos vectores, que tienen el mismo origen, es la mitad del módulo de su producto vectorial

$$A = \frac{1}{2} |\overrightarrow{PQ} \wedge \overrightarrow{PR}| \Rightarrow \overrightarrow{PQ} \wedge \overrightarrow{PR} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 2\vec{i} - 3\vec{k} - 6\vec{i} + \vec{j} = -4\vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k} \Rightarrow$$

$$|\overrightarrow{PQ} \wedge \overrightarrow{PR}| = \sqrt{(-4)^2 + 1^2 + (-3)^2} = \sqrt{26} \Rightarrow A = \frac{1}{2} |\overrightarrow{PQ} \wedge \overrightarrow{PR}| = A = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{26} = \frac{\sqrt{26}}{2} u^2$$

3) Se hallará un plano π que contenga el punto \mathbf{R} , que tendrá como vector director el vector \mathbf{PQ} que al ser perpendicular al vector \mathbf{RG} , donde \mathbf{G} es el punto genérico del plano, siendo el producto escalar de ambos nulo y la ecuación que se quería hallar.

Una vez hallado una recta \mathbf{s} que tenga como vector director \mathbf{PQ} , hallaremos su punto de intersección \mathbf{T} con el plano hallado, el vector \mathbf{RT} es el director de la recta pedida y con uno de los puntos (\mathbf{R} o \mathbf{T}) queda definida la recta \mathbf{t} .

$$\begin{cases} \overrightarrow{PQ} = (-1, 2, 2) \\ \overrightarrow{RG} = (x, y, z) - (1, 2, 2) = (x-1, y-2, z-2) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{PQ} \perp \overrightarrow{RG} \Rightarrow \overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{RG} = 0 \Rightarrow$$

$$(-1, 2, 2) \cdot (x-1, y-2, z-2) = -(x-1) + 2 \cdot (y-2) + 2 \cdot (z-2) = 0 \Rightarrow -x + 2y + 2z - 7 = 0 \Rightarrow$$

$$\pi \equiv x - 2y - 2z + 7 = 0 \Rightarrow$$

$$\text{Intersección} \Rightarrow \text{Siendo} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{PQ} = (-1, 2, 2) \\ P(1, -1, 1) \end{cases} \Rightarrow s \equiv \begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = -1 + 2\lambda \\ z = 1 + 2\lambda \end{cases} \Rightarrow (1 - \lambda) - 2(-1 + 2\lambda) - 2(1 + 2\lambda) + 7 = 0$$

$$1 - \lambda + 2 - 4\lambda - 2 - 4\lambda + 7 = 0 \Rightarrow -9\lambda + 8 = 0 \Rightarrow 9\lambda = 8 \Rightarrow \lambda = \frac{8}{9}$$

Continuación del problema 3 de la Opción de Examen nº 2

3) Continuación

$$T \begin{cases} x = 1 - \frac{8}{9} \\ y = -1 + 2 \cdot \frac{8}{9} \\ z = 1 + 2 \cdot \frac{8}{9} \end{cases} \Rightarrow T\left(\frac{1}{9}, \frac{7}{9}, \frac{25}{9}\right) \Rightarrow \overrightarrow{RT} = \left(\frac{1}{9}, \frac{7}{9}, \frac{25}{9}\right) - (1, 2, 2) = \left(-\frac{8}{9}, -\frac{11}{9}, \frac{7}{9}\right) \equiv (8, 11, -7) \Rightarrow$$

$$t \equiv \begin{cases} x = 1 + 8\mu \\ y = 2 + 11\mu \\ z = 2 - 7\mu \end{cases}$$