

OPCIÓN DE EXAMEN Nº 1

Ejercicio 1.- Sea A una matriz de la forma $A = \begin{pmatrix} -x+1 & -1 \\ x & x+1 \end{pmatrix}$, con $x \in \mathfrak{R}$. Sea $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ la matriz identidad.

1) [2 puntos] Calcule los valores de x para los cuales se verifica la igualdad $A \cdot (A - I) = A - I$.

2) [1'25 puntos] Calcule los valores de x para los cuales A tiene inversa. Calcule la inversa de A cuando $x = 2$.

a)

$$A(A-I) \cdot (A-I)^{-1} = (A-I) \cdot (A-I)^{-1} \Rightarrow AI = I \Rightarrow A = I \Rightarrow \begin{pmatrix} -x+1 & -1 \\ x & x+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ -1 \neq 0 \end{cases}$$

No tiene solución

b) Tiene inversa una matriz, cuando su matriz no es nula

$$|A| = \begin{vmatrix} -x+1 & -1 \\ x & x+1 \end{vmatrix} = (x+1)(1-x) + x = 1 - x^2 + x \Rightarrow \text{Si } |A| = 0 \Rightarrow -x^2 + x + 1 = 0 \Rightarrow x^2 - x - 1 = 0 \Rightarrow$$

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1) = 1 + 4 = 5 \Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \\ x = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

$$\forall x \in \mathfrak{R} - \left\{ \frac{1 - \sqrt{5}}{2}, \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right\} \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow \text{Existe } A^{-1} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \text{adj } A^t$$

$$\text{Si } x = 2 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -3 + 2 = -1 \Rightarrow A^t = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{adj } A^t = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$A^{-1} = \frac{1}{(-1)} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2.- Se quiere construir un depósito (sin techo) con forma de prisma recto de base cuadrada y lados rectángulos. El depósito debe albergar un volumen de 2000 m^3 . Sabemos que el coste de materiales de la base es de 50 €/m^2 , el coste de materiales de las cuatro paredes es de 100 €/m^2 . Además, el coste de construcción es un coste fijo de 20000 € .

1) [0,5 PUNTOS] Escriba la función $c(l)$ de coste total en función del lado de la base l .

2) [1,5 PUNTOS] ¿Para qué valor de l es el coste total mínimo? ¿Cuánto es este coste?

3) [0,5 PUNTOS] ¿Qué ocurre con el coste cuando el lado l de la base del depósito tiende a infinito? ¿Y cuando tiende a cero?

4) [1 PUNTO] Usando solo los datos obtenidos de los apartados anteriores, haga un esbozo de la gráfica de la curva $c(l)$ en el dominio $l \in (0, \infty)$

Siendo L el lado de la base cuadrada y H la altura del prisma

a)

$$\begin{cases} 2000 = L^2 H \Rightarrow H = \frac{2000}{L^2} \\ c(L) = 50 \cdot L^2 + 4 \cdot LH \cdot 100 + 20000 \end{cases} \Rightarrow c(L) = 50 \cdot L^2 + 4 \cdot L \cdot \frac{2000}{L^2} \cdot 100 + 20000$$

$$c(L) = 50 \cdot L^2 + \frac{800000}{L} + 20000 = \frac{50L^3 + 20000L + 800000}{L} = 50 \cdot \frac{L^3 + 400L + 16000}{L}$$

Continuación del Ejercicio 2 de la opción de Examen nº 1

b)

$$c'(L) = \frac{dc(L)}{dL} = 50 \cdot \frac{(3L^2 + 400)L - (L^3 + 400L + 16000)}{L^2} = 50 \cdot \frac{3L^3 + 400L - L^3 - 400L - 16000}{L^2}$$

$$c'(L) = \frac{dc(L)}{dL} = 50 \cdot \frac{2L^3 - 16000}{L^2} = 100 \cdot \frac{L^3 - 8000}{L^2} \Rightarrow c'(L) = 0 \Rightarrow 100 \cdot \frac{L^3 - 8000}{L^2} = 0 \Rightarrow L^3 - 8000 = 0 \Rightarrow$$

$$L^3 = 8000 \Rightarrow L = \sqrt[3]{8000} = 20 \Rightarrow c''(L) = \frac{d^2c(L)}{dL^2} = 100 \cdot \frac{3L^2L^2 - 2L(L^3 - 8000)}{L^4} = 100 \cdot \frac{3L^3 - 2L^3 + 16000}{L^3}$$

$$c''(L) = 100 \cdot \frac{L^3 + 16000}{L^3} \Rightarrow c''(20) = 100 \cdot \frac{20^3 + 16000}{20^3} = 100 \cdot \frac{8000 + 16000}{8000} = \frac{24000}{80} = 600 > 0 \Rightarrow \text{Mínimo}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} L = 20 \text{ m} \\ H = \frac{2000}{20^2} = \frac{2000}{400} = 5 \text{ m} \Rightarrow c(20) = 50 \cdot \frac{20^3 + 400 \cdot 20 + 16000}{20} = 50 \cdot \frac{8000 + 8000 + 16000}{20} = 50 \cdot \frac{32000}{20} \end{array} \right.$$

$$c(20) = 50 \cdot 1600 = 80000 \text{ €}$$

c)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} c(L) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[50 \cdot \frac{L^3 + 400L + 16000}{L} \right] = \frac{\infty}{\infty} = 50 \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{L^3 + 400L + 16000}{L} = \text{Utilizando L'Hopital} \Rightarrow =$$

$$= 50 \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3L^2 + 400}{1} = 50 \cdot \infty = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} c(L) = \lim_{x \rightarrow 0} \left[50 \cdot \frac{L^3 + 400L + 16000}{L} \right] = 50 \cdot \frac{0^3 + 400 \cdot 0 + 16000}{0} = \frac{50 \cdot 16000}{0} \Rightarrow \text{Sin solución}$$

Ejercicio 3

Sea π el plano $\pi \equiv x - y + z = 0$. Sea r la recta $r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z+1}{2}$

1) [0,75 PUNTOS] Describa la posición relativa de π y r .

2) [1 PUNTO] Calcule el ángulo formado por π y r (si no posee calculadora, puede dejar indicado el resultado final).

3) [1,5 PUNTOS] Dé un ejemplo de una recta que corte a r , una recta que sea paralela y distinta de r y una recta que se cruce con r . Al menos una de esas rectas debe darse mediante sus ecuaciones implícitas (generales).

1) Una recta y un plano son paralelos, y sus vectores directores perpendiculares si el producto escalar de estos es nulo, en caso de no ser nulo se cortan en un punto

$$\begin{cases} \vec{v}_\pi = (1, -1, 1) \\ \vec{v}_r = (2, -1, 2) \end{cases} \Rightarrow \vec{v}_\pi \cdot \vec{v}_r = (1, -1, 1) \cdot (2, -1, 2) = 2 + 1 + 2 = 5 \neq 0 \Rightarrow$$

La recta y el plano se cortan en un punto

2)

Siendo α el ángulo que forman

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{|\vec{v}_\pi \cdot \vec{v}_r|}{|\vec{v}_\pi| \cdot |\vec{v}_r|} = \frac{|(1, -1, 1) \cdot (2, -1, 2)|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 1^2} \cdot \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2}} = \frac{|5|}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{9}} = \frac{5}{3\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{9} = 0,9622504486493762741$$

$$\alpha = \operatorname{arc} \operatorname{sen} \left(\frac{5\sqrt{3}}{9} \right) = 74^\circ 12' 25''$$

3) Supongamos una recta s que pasa por uno de los puntos R de la recta dada (tomamos el indicado en la ecuación) y que tiene un vector director diferente

$$\begin{cases} R(1, 0, -1) \\ \vec{v}_s = (1, 2, 2) \end{cases} \Rightarrow s \equiv x - 1 = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{2}$$

Una recta t es paralela si no tiene puntos comunes con r y su vector director es el mismo

Sea el punto $T(3, 1, -1)$

$$\begin{cases} T(3, 1, -1) \\ \vec{v}_t = \vec{v}_r = (2, -1, 2) \end{cases} \Rightarrow r \equiv \frac{3-1}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow T \text{ no pertenece a } r \Rightarrow t \equiv \frac{x-3}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+1}{2}$$

Una recta u se cruzará con r si tiene un punto U no común con los de r y su vector director no es igual o proporcional al de r

Sea el punto $U(3, 1, -1)$

$$\begin{cases} U(3, 1, -1) \\ \vec{v}_u = (3, 1, 2) \end{cases} \Rightarrow \frac{3}{2} \neq \frac{1}{-1} \Rightarrow \vec{v}_u \neq \vec{v}_r \Rightarrow u \equiv \frac{x-3}{3} = y - 1 = \frac{z+1}{2}$$

OPCIÓN DE EXAMEN Nº 2

1) Considere el sistema de ecuaciones
$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & t & 3 \\ 2 & 0 & 2 \\ t^2 - 3t + 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ con } t \in \mathfrak{R}$$

[3,25 PUNTOS] Estudie la compatibilidad del sistema, dependiendo del parámetro t , y calcule todas las soluciones en los casos en los que sea compatible

El determinante de la matriz de los coeficientes ampliada debe de ser nulo, y los valores que de serán los que hacen al sistema compatible determinado o indeterminado, analizaremos los casos que se presenten

$$|A/B| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & t & 3 & 3 \\ 2 & 0 & 2 & 3 \\ t^2 - 3t + 2 & 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = t \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \\ t^2 - 3t + 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} = t \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & -1 \\ t^2 - 3t + 2 - 4 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (-1) \cdot t \cdot \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ t^2 - 3t - 2 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$|A/B| = (-1) \cdot t \cdot [2 + (t^2 - 3t - 2)] = t \cdot (t^2 - 3t - 2 + 2) = t \cdot (t^2 - 3t) = t^2 \cdot (t - 3) \Rightarrow$$

$$\text{Si } |A/B| = 0 \Rightarrow \begin{cases} t^2 = 0 \Rightarrow t = 0 \\ t - 3 = 0 \Rightarrow t = 3 \end{cases} \Rightarrow$$

$t = 0$

$$A/B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 2 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rang}(A) = \text{rang}(A/B) = 2 < \text{Número de incógnitas}$$

Sistema Compatible Indeterminado

$$t = 3 \Rightarrow A/B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & 3 \\ 2 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{rang}(A) = 3 = \text{Número de incógnitas} \Rightarrow$$

Sistema Compatible Determinado

Si $t = 0 \Rightarrow$ Sistema Compatible Indeterminado

$$t = 0 \Rightarrow A/B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow z = 1 \Rightarrow 2x + 1 = 2 \Rightarrow 2x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \Rightarrow \text{Solución} \Rightarrow (x, y, z) = \left(\frac{1}{2}, \lambda, 1 \right)$$

Continuación Ejercicio 1 de la Opción de Examen nº 2 $t = 3 \Rightarrow$ Sistema Compatible Deter min ado

$$A/B = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow z = 1 \Rightarrow 3y + 3 \cdot 1 = 3 \Rightarrow 3y = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow 2x + 1 = 2 \Rightarrow 2x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

$$\text{Solución} \Rightarrow (x, y, z) = \left(\frac{1}{2}, 0, 1 \right)$$

Ejercicio 2.- Sea $f(x) = \ln(x^2 + 3x + 2)$.**1) [2,5 PUNTOS]** Calcule el dominio de f , los cortes con los ejes, intervalos de crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos relativos y sus asíntotas.**2) [1 PUNTO]** Haga un esbozo de la gráfica de f .

a)

$$x^2 + 3x + 2 = 0 \Rightarrow \Delta = 3^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 1 \geq 0 \Rightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 1} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{-3+1}{2} = -1 \\ x = \frac{-3-1}{2} = -2 \end{cases}$$

$$x^2 + 3x + 2 > 0 \Rightarrow (x+1)(x+2) > 0 \Rightarrow \begin{cases} x+1 > 0 \Rightarrow x > -1 \\ x+2 > 0 \Rightarrow x > -2 \end{cases}$$

	$-\infty$	-2	-1	∞
$x > -2$		(-)	(+)	(+)
$x > -1$		(-)	(-)	(+)
Solución		(+)	(-)	(+)

$$\text{Dom}(f) = \forall x \in \mathbb{R} / (x < -2) \cup (x > -1)$$

$$\text{Puntos de corte con OY} \Rightarrow x = 0 \Rightarrow f(0) = \ln(0^2 + 3 \cdot 0 + 2) = \ln 2$$

$$\text{Puntos de corte con OX} \Rightarrow y = 0 \Rightarrow 0 = \ln(x^2 + 3x + 2) \Rightarrow x^2 + 3x + 2 = 1 \Rightarrow x^2 + 3x + 1 = 0 \Rightarrow$$

$$\Delta = 3^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 5 \Rightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2 \cdot 1} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{-3 + \sqrt{5}}{2} \\ x = \frac{-3 - \sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

Continuación Ejercicio 2 de la Opción de Examen nº 2

$$f'(x) = \frac{1}{x^2 + 3x + 2} \cdot (2x + 3) = \frac{2x + 3}{x^2 + 3x + 2} = \frac{2x + 3}{(x + 2)(x + 1)} \Rightarrow \text{Crecimiento} \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 2x + 3 > 0 \Rightarrow 2x > -3 \Rightarrow x > -\frac{3}{2} \\ x + 2 > 0 \Rightarrow x > -2 \\ x + 1 > 0 \Rightarrow x > -1 \end{cases}$$

$$-\infty \quad -2 \quad -\frac{3}{2} \quad -1 \quad \infty$$

$x > -2$	(-)	(+)	(+)	(+)
$x > -\frac{3}{2}$	(-)	(-)	(+)	(+)
$x > -1$	(-)	(-)	(-)	(+)
Solución	(-)	(+)	(+)	(+)

Decrecimiento $\forall x \in \mathbb{R} / x < -2$

Crecimiento $\forall x \in \mathbb{R} / x > -1$

Había posibilidades de extremos relativos en $x = -2$ y en $x = -1$, pero al no existir definición de función en esos puntos, no existen extremos relativos.

Asíntotas verticales

Había posibilidades de asíntotas verticales en $x = -2$ y en $x = -1$, pero al no existir definición de función en esos puntos, no existen asíntotas verticales.

Asíntotas horizontales

$$y = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \ln(x^2 + 3x + 2) = \ln \lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 + 3x + 2) = \ln \infty = \infty$$

No existe asíntota horizontal cuando $x \rightarrow \infty$

$$y = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(x^2 + 3x + 2) = \ln \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 + 3x + 2) = \ln \infty = \infty$$

No existe asíntota horizontal cuando $x \rightarrow -\infty$

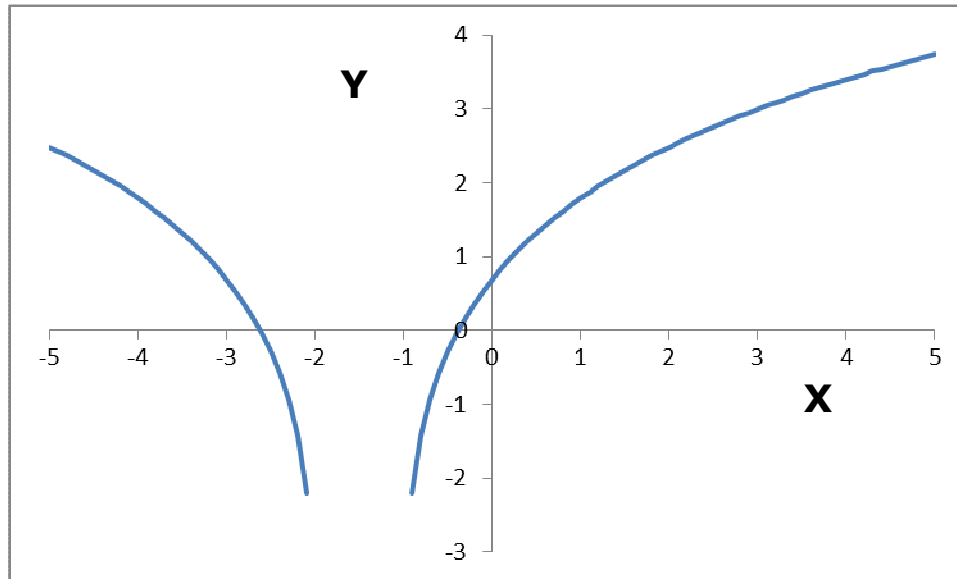
Asíntotas oblicuas

$$\begin{aligned} m &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x^2 + 3x + 2)}{x} = \frac{\infty}{\infty} \stackrel{\text{Aplicando L'Hopital}}{\rightarrow} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2x + 3}{x^2 + 3x + 2}}{1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x + 3}{x^2 + 3x + 2} = \\ &= \frac{\infty}{\infty} \stackrel{\text{Aplicando L'Hopital}}{\rightarrow} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{2x + 3} = \frac{2}{\infty} = 0 \Rightarrow \text{No existe asíntota oblicua cuando } x \rightarrow \infty \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(x^2 + 3x + 2)}{x} = \frac{\infty}{\infty} \stackrel{\text{Aplicando L'Hopital}}{\rightarrow} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{2x + 3}{x^2 + 3x + 2}}{1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x + 3}{x^2 + 3x + 2} = \\ &= \frac{\infty}{\infty} \stackrel{\text{Aplicando L'Hopital}}{\rightarrow} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{2x + 3} = \frac{2}{-\infty} = 0 \Rightarrow \text{No existe asíntota oblicua cuando } x \rightarrow -\infty \end{aligned}$$

Continuación Ejercicio 2 de la Opción de Examen nº 2

2)



3) Sea $\pi \equiv (0, 0, 1) + t(1, 2, 0) + s(0, 1, 1)$, sea U el punto $U = (2, 0, 1)$

1) [1,5 PUNTOS] Calcule el punto V de π más próximo a U .

2) [1 PUNTO] Calcule la distancia de U a π .

3) [0,75 PUNTOS] Calcule las ecuaciones implícitas (generales) de una recta paralela al plano π que pase por el punto U .

a) El punto V es la intersección de la recta r que contiene al punto U , y es perpendicular al plano π , que lo calcularemos gracias a los vectores t , s y el vector AG , siendo G el punto genérico del plano y A un punto del plano pedido (tomamos el que indica su ecuación), los tres vectores son coplanarios y por ello la matriz que forman (el producto mixto de los tres) es nula ya que el volumen del paralelepípedo que forman es cero. La recta r queda determinada por el vector director del plano y por el punto A

$$\overrightarrow{AG} = (x, y, z) = (0, 0, 1) = (x, y, z-1) \Rightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x & y & z-1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2x + (z-1) - y = 0 \Rightarrow$$

$$\pi \equiv 2x - y + z - 1 = 0 \Rightarrow \vec{v}_r = \vec{v}_\pi = (2, -1, 1) \Rightarrow r \equiv \begin{cases} 2 + 2\lambda \\ y = -\lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases}$$

$$\text{Intersección} \Rightarrow 2 \cdot (2 + 2\lambda) - (-\lambda) + (1 + \lambda) - 1 = 0 \Rightarrow 4 + 4\lambda + \lambda + 1 + \lambda - 1 = 0 \Rightarrow 6\lambda + 4 = 0 \Rightarrow$$

$$6\lambda = -4 \Rightarrow \lambda = -\frac{4}{6} = -\frac{2}{3} \Rightarrow V \begin{cases} x = 2 + 2 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) \\ y = -\left(-\frac{2}{3}\right) \\ z = 1 + \left(-\frac{2}{3}\right) \end{cases} \Rightarrow V\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

Continuación Ejercicio 3 de la Opción de Examen nº 2

b)

$$d(U, \pi) = \frac{|2 \cdot 2 - 0 + 1 - 1|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 1^2}} = \frac{|4|}{\sqrt{6}} = \frac{4\sqrt{6}}{6} = \frac{2\sqrt{6}}{3} u$$

c) Las rectas que pasan por **U** y son paralelas al plano son infinitas, hallaremos una, **u**, que tenga como vector director uno de los vectores generadores del plano, tomaremos el vector **t**

$$\vec{v}_u = \vec{v}_t = (1, 2, 0) \Rightarrow u \equiv x - 2 = \frac{y - 1}{2} = \frac{z}{0}$$

b) El área del triángulo **ABC** es la mitad del módulo del producto vectorial de **AB** y **AC**

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} = (1, 0, 0) - (2, -1, 2) = (-1, 1, -2) \\ \overrightarrow{AC} = (2, 4, -3) - (2, -1, 2) = (0, 5, -5) \end{cases} \Rightarrow S = \frac{1}{2} \cdot |\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}| \Rightarrow$$

$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 1 & -2 \\ 0 & 5 & -5 \end{vmatrix} = -5\vec{i} - 5\vec{k} + 10\vec{i} + 5\vec{j} = 5\vec{i} + 5\vec{j} - 5\vec{k} \Rightarrow |\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}| = \sqrt{5^2 + 5^2 + (-5)^2} = \sqrt{75} \text{ c}$$

$$S = \frac{1}{2} \cdot |\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}| = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{75} = \frac{1}{2} \cdot 5\sqrt{3} = \frac{5\sqrt{3}}{2} \text{ u}^2$$

) Hallaremos un plano π que conteniendo el punto **C** es perpendicular a la recta **r**, siendo el vector director del plano el de la recta que es perpendicular al vector **CG**, siendo **G** el punto genérico del plano, y por ello el producto escalar, de ambos, nulo y la ecuación pedida del plano.

Calcularemos el punto **Q** de intersección de la recta **r** y el plano π , el módulo del vector **CQ** es la distancia pedida.

$$2y + x = 2 \Rightarrow x = 2 - 2y \Rightarrow z = 2y \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 2 - 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = 2\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{v}_\pi = \overrightarrow{v}_r = (-2, 1, 2) \\ \overrightarrow{CG} = (x, y, z) - (2, 4, -3) = (x - 2, y - 4, z + 3) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\overrightarrow{v}_\pi \perp \overrightarrow{CG} \Rightarrow \overrightarrow{v}_\pi \cdot \overrightarrow{CG} = 0 \Rightarrow (-2, 1, 2) \cdot (x - 2, y - 4, z + 3) = 0 \Rightarrow -2 \cdot (x - 2) + (y - 4) + 2 \cdot (z + 3) = 0 \Rightarrow \pi \equiv 2x - y - 2z - 6 = 0$$

$$\text{Intersección} \Rightarrow 2 \cdot (2 - 2\lambda) - \lambda - 2 \cdot 2\lambda - 6 = 0 \Rightarrow -9\lambda - 2 = 0 \Rightarrow -9\lambda = 2 \Rightarrow \lambda = -\frac{2}{9} \Rightarrow Q \begin{cases} x = 2 - 2 \cdot \left(-\frac{2}{9}\right) \\ y = -\frac{2}{9} \\ z = 2 \cdot \left(-\frac{2}{9}\right) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\overrightarrow{CQ} = \left(\frac{22}{9}, -\frac{2}{9}, -\frac{4}{9}\right) - (2, 4, -3) = \left(\frac{4}{9}, \frac{34}{9}, \frac{23}{9}\right) \Rightarrow d(C, r) = \sqrt{\left(\frac{4}{9}\right)^2 + \left(\frac{34}{9}\right)^2 + \left(\frac{23}{9}\right)^2} = \sqrt{\frac{1701}{81}} = \sqrt{21} \text{ u}$$