PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

SEPTIEMBRE – 2015

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II   Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

1.- Debe escogerse una sola de las opciones

2.- Debe exponerse con claridad el planteamiento de la respuesta o el método utilizado para su resolución. Todas las respuestas deben ser razonadas.

3.- No se permite el uso de calculadoras gráficas ni programables. Tampoco está permitido el uso de dispositivos con acceso a internet.

OPCIÓN DE EXAMEN Nº 1

1º) Considere el siguiente sistema de ecuaciones $\begin{cases} ax+2ay+az=a+1 \\ x+(a+1)y+(2-a)z=2a \end{cases}$, dependiendo del parámetro α:

$a)$ Calcule los valores de α para que el sistema tenga solución.

$b)$ Calcule todas las soluciones cuando α = 1 y cuando α = -1.

$a)$

Las matrices de coeficientes y ampliada del sistema son las siguientes:

$$M=\begin{pmatrix} a & 2a & a \\ 1 & a+1 & 2-a \end{pmatrix} \text{ y } M'=\begin{pmatrix} a & 2a & a & a+1 \\ 1 & a+1 & 2-a & 2a \end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes, que a efectos de rango, es equivalente a la matriz que se indica, es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & a+1 & 2-a \end{pmatrix} \Rightarrow \{F_2 \to F_2 - F_1\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & a-1 & 1-a \end{pmatrix}.$$

$$Para\ a=1 \Rightarrow \left\{\begin{matrix} M=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \\ M'=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \boldsymbol{Rang\ M = Rang\ M' = 1}.$$

$$Para\ a=-1 \Rightarrow \left\{\begin{matrix} M=\begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \\ M'=\begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & -2 \end{pmatrix} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \boldsymbol{Rang\ M = Rang\ M' = 2}.$$

Según el teorema de Rouché-Fröbenius, un sistema es compatible cuando son iguales los rangos de las matrices de coeficientes y ampliada.

$$\underline{El\ sistema\ tiene\ solución\ para\ a=1\ y\ para\ a=\ -1}.$$

$b)$

Para $a=1$ el sistema resulta $\begin{cases} x+2y+z=2 \\ x+2y+z=2 \end{cases}$, equivalente a la expresión de rango uno: $x+2y+z=2$.

Por tener el sistema rango uno y ser tres el número de incógnitas, el grado de libertad es dos, o sea que depende de dos parámetros; las soluciones son:

$$\underline{(\lambda, \mu, 2-\lambda-2\mu), \forall \lambda, \mu \in R}.$$

Para $a=-1$ el sistema resulta $\begin{cases} -x-2y-z=0 \\ -x+3z=-2 \end{cases}$, que tiene rango dos.

Por tener el sistema rango dos y ser tres el número de incógnitas, el grado de libertad es uno, o sea que depende de un parámetro; las soluciones se obtienen haciendo, por ejemplo, $z=\lambda$:

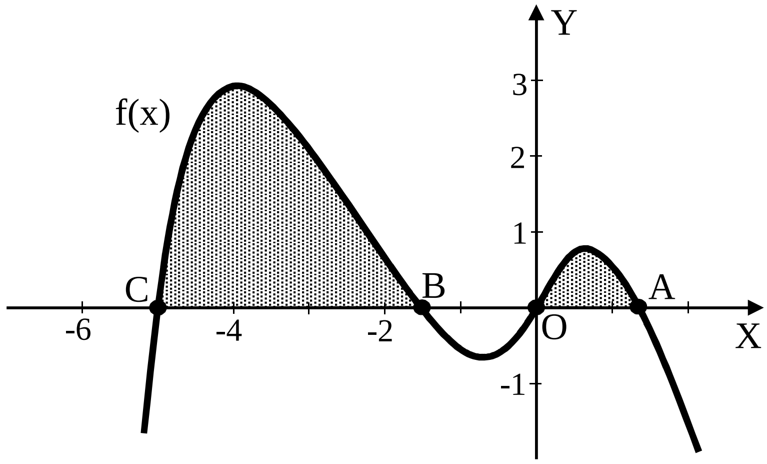
$$x=3\lambda+2.\ (3\lambda+2)+2y+\lambda=0;\ 5\lambda+2+2y=0; y=-\frac{5}{2}\lambda-1.$$

$$\underline{\left(3\lambda+2, -\frac{5}{2}\lambda-1, \lambda\right), \forall \lambda \in R}.$$

****

2º) Considera la función $f(x) = x \cdot \cos x$:

a) Calcule una primitiva de f(x) y el área encerrada bajo la gráfica de f(x) que se muestra sombreada en la figura. (Indicación: calcule los puntos de corte de la gráfica de f(x) con los ejes).



b) Calcule la recta tangente a f(x) en x = 0.

----

a)

Por ser $f(0) = 0$, el punto de corte con el eje Y es el origen de coordenadas.

Por ser $f(-x) = -x \cdot \cos(-x) = -x \cdot (-\cos x) = x \cdot \cos x = f(x)$, es simétrica con respecto al origen y por ser función periódica tiene infinitos puntos de corte con el eje X, que son todos aquellos que tienen $\cos x = 0$. Únicamente calculamos los puntos de corte que atañen a la resolución del apartado.

Los puntos de corte con X comentados son los siguientes:

$$x_1 = \frac{\pi}{2} \rightarrow A\left(\frac{\pi}{2}, 0\right); \;\; x_2 = -\frac{\pi}{2} \rightarrow B\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right) \; y \;\; x_3 = -\frac{3\pi}{2} \rightarrow C\left(-\frac{3\pi}{2}, 0\right).$$

$$\int x \cdot \cos x \cdot dx \;\Rightarrow\; \begin{Bmatrix} u = x \rightarrow du = dx \\ \cos x \cdot dx = dv \rightarrow v = sen\, x \end{Bmatrix} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x \cdot sen\, x - \int sen\, x \cdot dx = x \cdot sen\, x + \cos x.$$

Teniendo en cuenta el valor de la integral indefinida que se acaba de obtener:

$$S = \int_{-\frac{3\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} f(x) \cdot dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) \cdot dx =$$

$$= [x \cdot sen\, x + \cos x]_{-\frac{3\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} + [x \cdot sen\, x + \cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \left[-\frac{\pi}{2} \cdot sen\, \left(-\frac{\pi}{2}\right) + cos\, \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right] - \left[-\frac{3\pi}{2} \cdot sen\, \left(-\frac{3\pi}{2}\right) + cos\, \left(-\frac{3\pi}{2}\right)\right] +$$

$$+\left(\frac{\pi}{2}\cdot sen\ \frac{\pi}{2}+\cos\frac{\pi}{2}\right)-(0\cdot sen\ 0+\cos 0)=$$

$$=\left[-\frac{\pi}{2}\cdot(-1)+0\right]-\left[-\frac{3\pi}{2}\cdot 1+0\right]+\left(\frac{\pi}{2}\cdot 1+0\right)-(0+1)=\frac{\pi}{2}+\frac{3\pi}{2}+\frac{\pi}{2}-1=$$

$$=\frac{5\pi}{2}-1=\underline{\frac{5\pi-2}{2}\ u^2\cong 6{,}85\ u^2}.$$

$b)$

La pendiente de la tangente de una función en un punto es igual que el valor de su primera derivada en ese punto.

$$f'(x)=1\cdot\cos x-x\cdot sen\ x.$$

$$m=f'(0)=\cos 0-0\cdot sen\ 0=1-1=\mathbf{1}.$$

$$y-y_0=m(x-x_0)\Rightarrow y-0=1\cdot(x-0).$$

$$\underline{Recta\ tangente: t\equiv y=x}.$$

****

3º) Considere los puntos A (1, 1, 0), B (2, 1, 1) y C (-1, 1, 2):

a) Calcule la ecuación implícita (general) del plano que pasa por A, B y C.

b) Calcule el ángulo que forman las rectas AB y AC.

c) Calcule el área del triángulo ABC.

----

a)

$$\overrightarrow{AB} = [B - A] = [(2,1,1) - (1,1,0)] = (1,\ 0,1).$$

$$\overrightarrow{AC} = [C - A] = [(-1,1,2) - (1,1,0)] = (-2,\ 0,2).$$

$$\pi\left(A;\ \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0;\ -2(y-1) - 2(y-1) = 0;$$

$$-4(y-1) = 0;\ \ y - 1 = 0\ \ \Rightarrow\ \ \underline{\pi \equiv y - 1 = 0}.$$

b)

El ángulo que forman las rectas AB y AC es el mismo que forman sus vectores directores $\overrightarrow{AB} = (1,\ 0,1)$ y $\overrightarrow{AC} = (-2,\ 0,2)$.

Por el concepto de producto escalar de dos vectores:

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \left|\overrightarrow{AC}\right| \cdot \cos\alpha\ \Rightarrow \cos\alpha = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \left|\overrightarrow{AC}\right|} = \frac{(1,0,1)\cdot(-2,0,2)}{\sqrt{1^2+1^2}\cdot\sqrt{(-2)^2+2^2}} =$$

$$= \frac{-2+0+2}{\sqrt{1+1}\cdot\sqrt{4+4}} = \frac{0}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{8}} = 0\ \Rightarrow\ \alpha = 90°.$$

<u>Las rectas AB y AC son perpendiculares.</u>

c)

El área del triángulo que determinan tres puntos no alineados es la mitad del módulo del producto vectorial de los dos vectores que determinan los puntos:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot \left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = \frac{1}{2} \cdot \left\| \begin{matrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{matrix} \right\| = |j + j| = \underline{2\ u^2}.$$

****

OPCIÓN DE EXAMEN Nº 2

1º) El precio de un kilo de manzanas, 2 de peras y una docena de huevos es de 5 euros. El precio de 2 kilos de manzanas, 4 kilos de peras y 3 docenas de huevos es de 12 euros. El precio de 5 docenas de huevos y 2 kilos de peras es de 11 euros y 50 céntimos.

a) Calcule el precio del kilo de peras, el kilo de manzanas y la docena de huevos.

b) Pedro ha comprado dos kilos de manzanas y tres kilos de peras. Carmen ha comprado un kilo de manzanas, una docena de huevos y dos kilos de peras. ¿Quién ha gastado más dinero?

----

a)

Siendo x, y, z los valores de un kilo de manzana, un kilo de peras y de una docena de huevos, respectivamente, del enunciado del ejercicio se deduce el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} x+2y+z=5 \\ 2x+4y+3z=12 \\ 5z+2y=11{,}5 \end{array}\right\}.$$ Resolviendo por el método de Gauss:

$$M'=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 2 & 4 & 3 & 12 \\ 0 & 2 & 5 & 11{,}5 \end{pmatrix} \Rightarrow \{F_2 \to F_2-2F_1\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 5 & 11{,}5 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{F_2 \leftrightarrow F_3\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 5 & 11{,}5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{z=2}.$$

$$2y+5\cdot 2=11{,}5;\ \ 2y=1{,}5\ \Rightarrow \boldsymbol{y=0,75}.$$

$$x+2\cdot 0{,}75+2=5;\ \ x=5-1{,}5-2=5-3{,}5\ \Rightarrow \boldsymbol{x=1,5}.$$

$$\underline{Mananas\text{: } 1{,}5\ euros/kilo;\ Peras\text{: } 0{,}75\ euros/kilo;\ Huevos\text{: } 2\ euros/docena.}$$

b)

Gasto de Pedro: $2\cdot 1{,}5+3\cdot 0{,}75=3+2{,}25=5{,}25\ euros.$

Gasto de Carmen: $1{,}5+2\cdot 0{,}75+2=3{,}5+1{,}5=5\ euros.$

$$\underline{Pedro\ ha\ gastado\ más\ dinero\ que\ Carmen.}$$

****

2º) Considere la función $f(x)=\frac{x^2+2}{x^2-1}$.

$a)$ Calcule su dominio, intervalos de crecimiento y decrecimiento.

$b)$ Calcule sus máximos y mínimos relativos y sus asíntotas.

$c)$ Haga un esbozo de la gráfica de la función.

$a)$

Por tratarse de una función racional su dominio es R, excepto los valores reales de x que anulan el denominador.

$$\underline{D(f) \Rightarrow R-\{-1,1\}}.$$

Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$$f'(x)=\frac{2x\cdot(x^2-1)-(x^2+2)\cdot 2x}{(x^2-1)^2}=\frac{2x\cdot(x^2-1-x^2-2)}{(x^2-1)^2}=\frac{-6x}{(x^2-1)^2}.$$

$$Para\ x<0 \Rightarrow\ f'(x)>0\ \Rightarrow\ \underline{Crecimiento: (-\infty,-1)\cup(-1,0)}.$$

$$Para\ x>0 \Rightarrow\ f'(x)<0\ \Rightarrow\ \underline{Decrecimiento: (0,1)\cup(1,+\infty)}.$$

$b)$

Para que una función tenga un máximo o mínimo relativo en un punto cuando es condición necesaria que se anule su derivada en ese punto. Esta condición necesaria no es suficiente; para que exista el máximo o mínimo es necesario que no se anule la segunda derivada en ese punto para el valor que anula la primera derivada.

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada; se es positiva para el valor que anula la primera, se trata de un mínimo y, si es negativa, de un máximo.

$$f''(x)=\frac{-6\cdot(x^2-1)^2-6x\cdot[2\cdot(x^2-1)\cdot 2x]}{(x^2-1)^4}=\frac{-6\cdot(x^2-1)-24x^2}{(x^2-1)^3}=\frac{-6x^2+6-24x^2}{(x^2-1)^3}=\frac{6-30x^2}{(x^2-1)^3}=$$

$$=\boldsymbol{\frac{6(1-5x^2)}{(x^2-1)^3}}.$$

$$f''(0)=\frac{6}{-1}=-6<0\ \Rightarrow \boldsymbol{Máximo\ relativo\ para\ x=0}.$$

$f(0) = \frac{0+2}{0-1} = -2 \;\; \Rightarrow \;\; \underline{Máximo: A(0, -2)}.$

Asíntotas horizontales: son de la forma y = k y son los valores finitos de la función cuando x tiende a más o menos infinito.

$$k = \lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2+2}{x^2-1} = 1 \Rightarrow \underline{Asíntota\ horizontal: y = 1}.$$

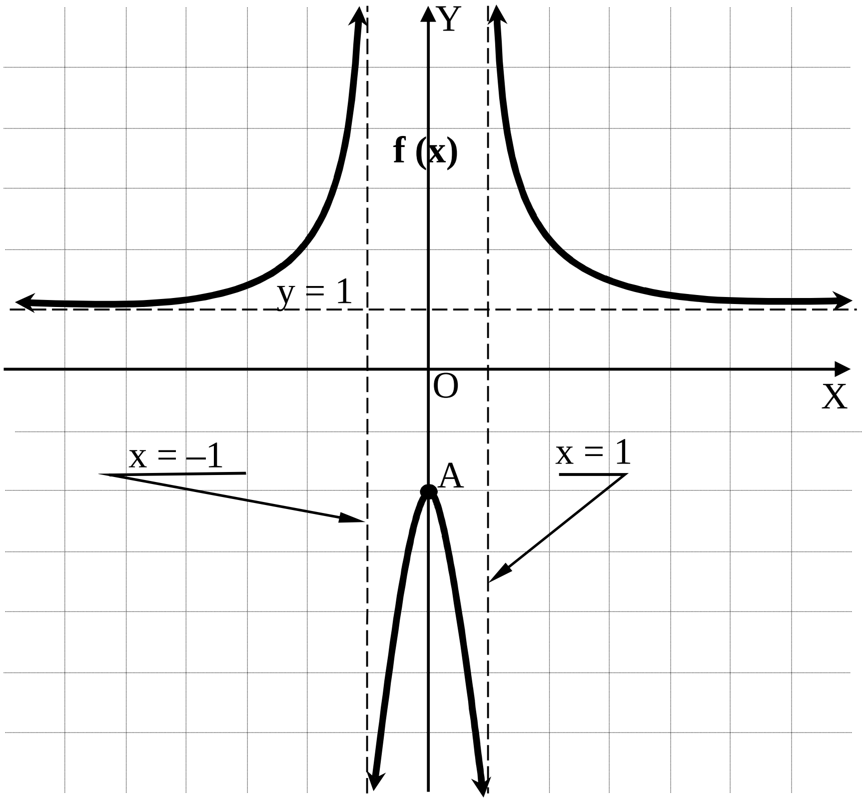
Asíntotas verticales: son los valores finitos de x que hacer que la función tienda a infinito o menos infinito: son los valores que anulan el denominador.

$$\underline{Asíntotas\ verticales: x = -1, x = 1}.$$

No tiene asíntotas oblicuas por ser incompatibles con las asíntotas horizontales.

$c)$

La representación gráfica, aproximada, de la función es la siguiente:



****

3º) Considere la recta $r \equiv \begin{cases} x+y+z=-2 \\ x-2y=4 \end{cases}$.

a) Determine unas ecuaciones paramétricas de r.

b) Calcule el plano ortogonal a r que pasa por el punto P (2, 4, 0).

c) Calcule la distancia entre P y r.

----

a)

$$r \equiv \begin{cases} x+y+z=-2 \\ x-2y=4 \end{cases} \Rightarrow y=\lambda; x=4+2\lambda; z=-2-4-2\lambda-\lambda=-6-3\lambda.$$

$$\underline{r \equiv \begin{cases} x=4+2\lambda \\ y=\lambda \\ z=-6-3\lambda \end{cases}.}$$

b)

El vector director de r es $\overrightarrow{v_r}=(2,1,-3)$.

El haz de planos normales a r tiene por ecuación $\beta \equiv 2x+y-3z+D=0$.

El plano π pedido pertenece al haz β y contiene al punto P(2, 4, 0):

$$\left.\begin{array}{r} \beta \equiv 2x+y-3z+D=0 \\ P(2,4,0) \end{array}\right\} \Rightarrow 2\cdot 2+4-3\cdot 0+D=0;\ \ 8+D=0 \Rightarrow D=-8.$$

$$\underline{\pi \equiv 2x+y-3z-8=0.}$$

c)

El punto Q de intersección de la recta r con el plano π es la solución del sistema que forman:

$$\left.\begin{array}{l} \pi \equiv 2x+y-3z-8=0 \\ r \equiv \begin{cases} x=4+2\lambda \\ y=\lambda \\ z=-6-3\lambda \end{cases} \end{array}\right\} \Rightarrow 2(4+2\lambda)+\lambda-3(-6-3\lambda)-8=0;$$

$$8+8\lambda+\lambda+18+9\lambda-8=0; 18\lambda+18=0 \Rightarrow \lambda=-1 \Rightarrow \boldsymbol{Q(2,-1,-3)}.$$

Por ser $r \perp \pi$, la distancia entre P(2, 4, 0) y r es equivalente a $\overline{PQ}$:

$$d(P,r)=\overline{PQ}=\sqrt{(2-2)^2+(-1-4)^2+(-3-0)^2}=\sqrt{25+9}=\underline{\sqrt{34}\,u}.$$

****