PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

JUNIO – 2015

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II   Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

1.- Debe escogerse una sola de las opciones
2.- Debe exponerse con claridad el planteamiento de la respuesta o el método utilizado para su resolución. Todas las respuestas deben ser razonadas.
3.- No se permite el uso de calculadoras gráficas ni programables. Tampoco está permitido el uso de dispositivos con acceso a internet.

OPCIÓN DE EXAMEN Nº 1

1º) Considere el sistema $\begin{cases} tx + y + tz = t \\ x + ty + z = -t \\ y + tz = 0 \end{cases}$.

$a)$ Analice la existencia de soluciones dependiendo del valor del parámetro t.

$b)$ Calcule todas las soluciones en el caso de t = 2.

$a)$

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M = \begin{pmatrix} t & 1 & t \\ 1 & t & 1 \\ 0 & 1 & t \end{pmatrix} \text{ y } M' = \begin{pmatrix} t & 1 & t & t \\ 1 & t & 1 & -t \\ 0 & 1 & t & 0 \end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro t es el siguiente:

$$|M| = \begin{vmatrix} t & 1 & t \\ 1 & t & 1 \\ 0 & 1 & t \end{vmatrix} = t^3 + t - t - t = 0;\;\; t^3 - t = 0;\;\; t(t^2 - 1) = 0 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{t_1 = 0, t_2 = -1, t_3 = 1}.$$

$$\underline{Para \begin{Bmatrix} t \neq 0 \\ t \neq -1 \\ t \neq 1 \end{Bmatrix} \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 3 = nº\ incóg. \Rightarrow S.C.D.}$$

$$Para\ t=0 \Rightarrow M'=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&1&0&0\end{pmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{Rang\ M'=2}.$$

$$Para\ t=-1 \Rightarrow M'=\begin{pmatrix}-1&1&-1&-1\\1&-1&1&1\\0&1&-1&0\end{pmatrix} \Rightarrow \{F_2=-F_1\} \Rightarrow \boldsymbol{Rang\ M'=2}.$$

$$\underline{Para\ \begin{Bmatrix}t=0\\t=-1\end{Bmatrix} \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 2 < nº\ incóg. \Rightarrow S.C.I.}$$

$$Para\ t=1 \Rightarrow M'=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&-1\\0&1&1&0\end{pmatrix} \Rightarrow\ Rang\ M'\ \Rightarrow\ \{C_1, C_2, C_4\}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix}1&1&1\\1&1&-1\\0&1&0\end{vmatrix} = 1+1=2\neq 0 \Rightarrow \boldsymbol{Rang\ M'=3}.$$

$$\underline{Para\ t=1 \Rightarrow Rang\ M=2;\ Rang\ M'=3 \Rightarrow Sistema\ incompatible.}$$

$b)$

Para $t=2$ es sistema es $\begin{cases}2x+y+2z=2\\x+2y+z=-2\\y+2z=0\end{cases}$., que es compatible determinado.

Resolviendo por Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix}2&1&2\\-2&2&1\\0&1&2\end{vmatrix}}{2^3-2}=\frac{8-4-2+4}{8-2}=\frac{6}{6}=1. \quad y=\frac{\begin{vmatrix}2&2&2\\1&-2&1\\0&0&2\end{vmatrix}}{6}=\frac{-8-4}{6}=\frac{-12}{6}=-2.$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix}2&1&2\\1&2&-2\\0&1&0\end{vmatrix}}{6}=\frac{2+4}{6}=\frac{6}{6}=1.$$

$$\underline{Solución: x=1, y=-2, z=1.}$$

****

2º) Considere la función $f(x) = (1+x^2)^{\frac{1}{x}}$.

$a)$ Calcule $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. $b)$ Calcule la derivada de $f(x)$.

$a)$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (1+x^2)^{\frac{1}{x}} = \infty^0 \;\Rightarrow Indet.$$

Haciendo $A = (1+x^2)^{\frac{1}{x}} \;\Rightarrow LA = L(1+x^2)^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{x}\cdot L(1+x^2)$.

Tomando límites:

$$\lim_{x\to+\infty} LA = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{x}L(1+x^2)\right] = \lim_{x\to+\infty}\frac{L(1+x^2)}{x} = \frac{\infty}{\infty} \;\Rightarrow\; Indet. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{2x}{1+x^2}}{1} = \lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{1+x^2} = \frac{\infty}{\infty} \Rightarrow Ind. \Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\frac{2}{2x} = \frac{2}{\infty} = 0 \;\Rightarrow\; \boldsymbol{A = e^0 = 1}.$$

$$\underline{\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}(1+x^2)^{\frac{1}{x}} = 1.}$$

$b)$

$$f(x) = (1+x^2)^{\frac{1}{x}} \;\Rightarrow\; L[f(x)] = L(1+x^2)^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{x}\cdot L(1+x^2).$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = -\frac{1}{x^2}\cdot L(1+x^2) + \frac{1}{x}\cdot\frac{2x}{1+x^2} = \frac{2}{1+x^2} - \frac{L(1+x^2)}{x^2}.$$

$$f'(x) = f(x)\cdot\left[\frac{2}{1+x^2} - \frac{L(1+x^2)}{x^2}\right].$$

$$\underline{f'(x) = (1+x^2)^{\frac{1}{x}}\cdot\left[\frac{2}{1+x^2} - \frac{L(1+x^2)}{x^2}\right].}$$

****

3º) Considere el punto $P(1,1,1)$ y el plano $\pi \equiv (2,1,0)+t(-1,1,1)+s(1,-1,1)$.

a) Calcule la recta r que pasa por P y es ortogonal al plano π.

b) Calcule la distancia entre P y π.

c) Calcule la ecuación implícita (general) del plano π.

----

a)

Un vector normal del plano π es cualquiera que sea linealmente dependiente del producto vectorial de los dos vectores que lo determinan:

$$\overrightarrow{n'} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = i + j + k - k + i + j = 2i + 2j \;\; \Rightarrow \;\; \boldsymbol{\vec{n} = (1,1,0)}.$$

La expresión de r por unas ecuaciones paramétricas es: $\underline{r \equiv \begin{cases} x = 1+\lambda \\ y = 1+\lambda \\ z = 1 \end{cases}}$.

b)

La expresión general del plano π es la siguiente: $\pi \equiv \begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0;$

$(x-2)+(y-1)+z-z+(x-2)+(y-1)=0;\;\; 2(x-2)+2(y-1)=0;$

$(x-2)+(y-1)=0 \;\Rightarrow \boldsymbol{\pi \equiv x+y-3=0}$.

La distancia de un punto a un plano es $d(P,\pi) = \frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$. Aplicada al punto $P(1,1,1)$ y plano $\pi \equiv x+y-3=0$:

$$d(P,\pi) = \frac{|1\cdot 1+1\cdot 1+0\cdot 1-3|}{\sqrt{1^2+1^2+0^2}} = \frac{|1+1-3|}{\sqrt{1+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\underline{d(P,\pi) = \frac{\sqrt{2}}{2}\ unidades.}$$

c)

(Se obtuvo en el apartado a))

$$\underline{\pi \equiv x+y-3=0.}$$

****

OPCIÓN DE EXAMEN Nº 2

1º) Considere la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ -4 & 6 & 3 \\ 6 & -7 & -4 \end{pmatrix}$.

$a)$ Calcule todos los vectores $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tales que $A \cdot \vec{v} = \vec{v}$.

$b)$ Calcule la matriz inversa de A.

$a)$

$$A \cdot \vec{v} = \vec{v} \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ -4 & 6 & 3 \\ 6 & -7 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix};\ \left.\begin{array}{r} -x + 3y + z = x \\ -4x + 6y + 3z = y \\ 6x - 7y - 4z = z \end{array}\right\};$$

$$\left.\begin{array}{r} -2x + 3y + z = 0 \\ -4x + 5y + 3z = 0 \\ 6x - 7y - 5z = 0 \end{array}\right\}.$$

Es un sistema homogéneo de matriz de coeficientes $M = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ -4 & 5 & 3 \\ 6 & -7 & -5 \end{pmatrix}$.

$$Rang\ M \Rightarrow \begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ -4 & 5 & 3 \\ 6 & -7 & -5 \end{vmatrix} = 50 + 28 + 54 - 30 - 42 - 60 = 132 - 132 =$$

$$= 0 \Rightarrow \boldsymbol{Rang\ M = 2} \Rightarrow \boldsymbol{Sistema\ compatible\ indeterminado}.$$

El sistema admite infinitas soluciones. Resolviendo el sistema, despreciando una ecuación (por ejemplo la tercera) y haciendo $z = \lambda$:

$$\left.\begin{array}{r} -2x + 3y = -\lambda \\ -4x + 5y = -3\lambda \end{array}\right\}\ \left.\begin{array}{r} -4x + 6y = -2\lambda \\ 4x - 5y = 3\lambda \end{array}\right\} \Rightarrow y = \lambda;\ \ 4x - 5\lambda = 3\lambda \Rightarrow x = 2\lambda.$$

$$\underline{Solución: \vec{v} = \begin{pmatrix} 2\lambda \\ \lambda \\ \lambda \end{pmatrix}, \forall \lambda \in R.}$$

$b)$

$$A^t = \begin{pmatrix} -1 & -4 & 6 \\ 3 & 6 & -7 \\ 1 & 3 & -4 \end{pmatrix}.$$

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 1 \\ -4 & 6 & 3 \\ 6 & -7 & -4 \end{vmatrix} = 24 + 28 + 54 - 36 - 21 - 48 = 106 - 105 = 1.$$

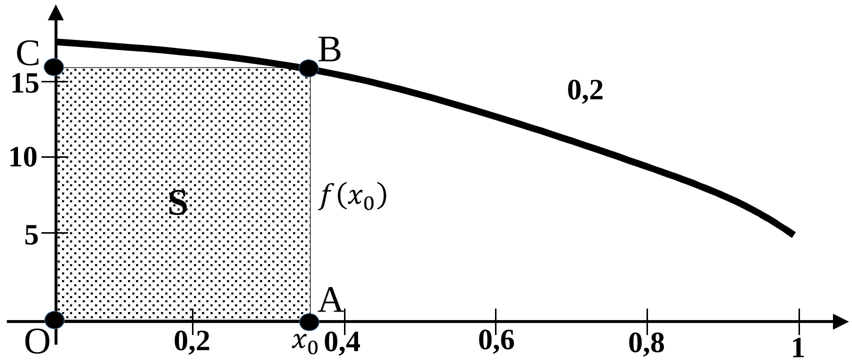
$$Adj.\, de\ A^t = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 6 & -7 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & -7 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -4 & 6 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & 6 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -4 & 6 \\ 6 & -7 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & 6 \\ 3 & -7 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & -4 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -3 & 5 & 3 \\ 2 & -2 & -1 \\ -8 & 11 & 6 \end{pmatrix}. \qquad A^{-1} = \frac{Adj.de\ A^t}{|A|} = \frac{1}{1} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 5 & 3 \\ 2 & -2 & -1 \\ -8 & 11 & 6 \end{pmatrix}.$$

$$\underline{A^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 5 & 3 \\ 2 & -2 & -1 \\ -8 & 11 & 6 \end{pmatrix}.}$$

****

2º) Los puntos $O(0,0), A(x_0,0), B[x_0, f(x_0)], C[0, f(x_0)]$, que son los vértices de un rectángulo, tal como indica la figura, donde $0 \leq x_0 \leq 1$ y $f(x) = 18 - 3x - 8x^2$.



a) Calcule el valor de x_0 para que el área del rectángulo sea máxima. Calcule el área de dicho rectángulo.

b) Calcule el área del recinto encerrado bajo la gráfica de $f(x)$ entre los siguientes valores: $0 \leq x \leq 1$.

----

a)

El área del rectángulo es $S = x_0 \cdot f(x_0)$. Para que el área sea máxima tiene que anularse su primera derivada.

Siendo: $S(x) = x \cdot f(x) = x \cdot (18 - 3x - 8x^2) = -8x^3 - 3x^2 + 18x$:

$S'(x) = -24x^2 - 6x + 18 = 0;\ \ 4x^2 + x - 3 = 0;\ \ x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+48}}{2 \cdot 4} = \frac{-1 \pm 7}{8} \Rightarrow$

$\Rightarrow x_1 = -1, \boldsymbol{x_2 = \frac{3}{4}}$. La solución $x_1 = -1 \notin 0 \leq x_0 \leq 1$.

$\underline{La\ superficie\ es\ máxima\ para\ x = \frac{3}{4}}.$

$S\left(\frac{3}{4}\right) = -8 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^3 - 3 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 + 18 = -8 \cdot \frac{27}{64} - 3 \cdot \frac{9}{16} + 18 = -\frac{27}{8} - \frac{27}{16} + 18 =$

$= \frac{-54-27+288}{16} = \frac{-81+288}{16} = \frac{207}{16}$.

$\underline{La\ superficie\ máxima\ es = \frac{207}{16}\ u^2}.$

b)

$S = \int_0^1 f(x) \cdot dx = \int_0^1 (18 - 3x - 8x^2) \cdot dx = \left[18x - \frac{3x^2}{2} - \frac{8x^3}{3}\right]_0^1 =$

$= \left(18 \cdot 1 - \frac{3 \cdot 1^2}{2} - \frac{8 \cdot 1^3}{3}\right) - 0 = 18 - \frac{3}{2} - \frac{8}{3} = \frac{108-9-16}{6} = \underline{\frac{83}{6}\ u^2}.$

****

3º) Sean A, B y C los puntos de coordenadas $A(2,-1,2)$, $B(1,0,0)$, $C(2,4,-3)$ y sea r la recta $r \equiv \begin{cases} 2y - z = 0 \\ x + z = 2 \end{cases}$.

$a)$ Calcule las ecuaciones de la recta s que pasa por A y por el punto medio del segmento BC.

$b)$ Calcule el área del triángulo ABC.

$c)$ Calcule la distancia del punto C a la recta r.

$a)$

Los puntos $B(1,0,0)$ y $C(2,4,-3)$ determinan un segmento cuyo punto medio es $M\left(\frac{3}{2}, 2, -\frac{3}{2}\right)$.

Los puntos B y C determinan el vector $\overrightarrow{BC} = [C - B] = (1,4,-3)$.

La expresión de s dada por unas ecuaciones paramétricas es: $s \equiv \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = -1 + 4\lambda \\ z = 2 - 3\lambda \end{cases}$.

$b)$

Los puntos A, B, C determinan los siguientes vectores:

$\overrightarrow{BA} = [A - B] = [(2,-1,2) - (1,0,0)] = (1,-1,2)$. $\quad \overrightarrow{BC} = (1,4,-3)$.

El área del triángulo que determinan tres puntos no alineados es la mitad del módulo del producto vectorial de los dos vectores que determinan los puntos:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BC}\right| = \frac{1}{2}\left\| \begin{matrix} i & j & k \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -3 \end{matrix} \right\| = \frac{1}{2}(3i + 2j + 4k + k - 8i + 3j) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot |-5i + 5j + 5k| = \frac{5}{2} \cdot |-i + j + k| = \frac{5}{2} \cdot \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 1^2} = \frac{5\sqrt{3}}{2}\ u^2.$$

$c)$

La distancia de un punto a una recta puede determinarse teniendo en cuenta que el área del paralelogramo que forman dos vectores es el módulo de su producto vectorial y, de forma geométrica, es el producto de la base por la altura.

La expresión de $r \equiv \begin{cases} 2y - z = 0 \\ x + z = 2 \end{cases}$ dada por unas ecuaciones paramétricas es la siguiente: $r \equiv \begin{cases} 2y - z = 0 \\ x + z = 2 \end{cases} \Rightarrow y = \lambda;\ z = 2\lambda;\ \ x = 2 - 2\lambda \ \ \Rightarrow \ \ r \equiv \begin{cases} x = 2 - 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = 2\lambda \end{cases}$.

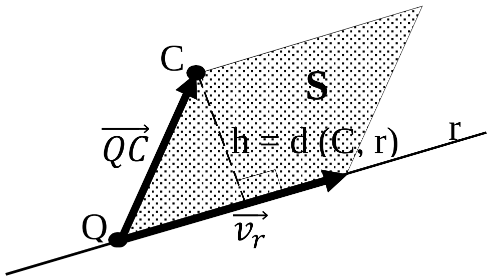
Un punto y un vector de r son $Q(2,0,0)$ y $\overrightarrow{v_r} = (-2,1,2)$.

$\overrightarrow{QC} = [C - Q] = [(2,4,-3) - (2,0,0)] = (0,4,-3)$.

Para una mejor comprensión del proceso se hace un dibujo de la situación.

$$\left.\begin{array}{r} S = \left|\overrightarrow{v_r} \wedge \overrightarrow{QC}\right| \\ S = |\overrightarrow{v_r}| \cdot h \end{array}\right\} \Rightarrow \left|\overrightarrow{v_r} \wedge \overrightarrow{QC}\right| = |\overrightarrow{v_r}| \cdot h \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{h = d(C,r) = \frac{|\overrightarrow{v_r} \wedge \overrightarrow{QC}|}{|\overrightarrow{v_r}|}}.$$



Aplicando la fórmula al punto C y a la recta r:

$$d(C,r) = \frac{|\overrightarrow{v_r} \wedge \overrightarrow{QC}|}{|\overrightarrow{v_r}|} = \frac{\left\| \begin{vmatrix} i & j & k \\ -2 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & -3 \end{vmatrix} \right\|}{\sqrt{(-2)^2 + 1^2 + 2^2}} = \frac{|-3i - 8k - 8i - 6j|}{\sqrt{4+1+4}} = \frac{|-11i - 6j - 8k|}{\sqrt{9}} =$$

$$= \frac{\sqrt{11^2 + 6^2 + 8^2}}{3} = \frac{\sqrt{121+36+64}}{3} = \frac{\sqrt{221}}{3} = \underline{\frac{\sqrt{221}}{3}\ u = d(C,r)}.$$

Otra forma de resolver este ejercicio es la siguiente:

El haz de planos $\perp$ a r tiene por ecuación: $\alpha \equiv 2x - y - 2z + D = 0$.

De los infinitos planos del haz α, el plano π que contiene al punto $C(2,4,-3)$ es el que satisface su ecuación:

$$\left.\begin{array}{r} \alpha \equiv 2x - y - 2z + D = 0 \\ C(2,4,-3) \end{array}\right\} \Rightarrow 2 \cdot 2 - 4 - 2 \cdot (-3) + D = 0;$$

$$4 - 4 + 6 + D = 0;\ \ 6 + D = 0 \Rightarrow D = -6 \ \Rightarrow \boldsymbol{\pi \equiv 2x - y - 2z - 6 = 0}.$$

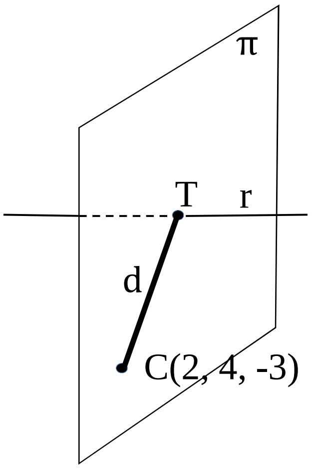
El punto T, intersección de la recta r con el plano π es la solución del sistema que forman:

$$\left.\begin{array}{r} \pi \equiv 2x - y - 2z - 6 = 0 \\ r \equiv \begin{cases} 2y - z = 0 \\ x + z = 2 \end{cases} \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} 2x - y - 2z = 6 \\ 2y - z = 0 \\ x + z = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow z = 2y \Rightarrow \quad \left.\begin{array}{r} 2x - y - 4y = 6 \\ x + 2y = 2 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{r} 2x - 5y = 6 \\ x + 2y = 2 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} -2x + 5y = -6 \\ 2x + 4y = 4 \end{array}\right\} \Rightarrow 9y = -2;\ y = -\frac{2}{9};\ z = -\frac{4}{9};\ x = 2 + \frac{4}{9} = \frac{22}{9}.$$

El punto de corte es $T\left(\frac{22}{9}, -\frac{2}{9}, -\frac{4}{9}\right)$.

La distancia pedida del punto C a la recta r es equivalente a la distancia entre los puntos C y T, o sea el módulo de $\left|\overrightarrow{BP}\right|$:



$$d(C,r)=\left|\overrightarrow{TC}\right|=\sqrt{\left(2-\frac{22}{9}\right)^2+\left(4+\frac{2}{9}\right)^2+\left(-3+\frac{4}{9}\right)^2}=$$

$$=\sqrt{\left(-\frac{4}{9}\right)^2+\left(\frac{38}{9}\right)^2+\left(-\frac{23}{9}\right)^2}=\frac{\sqrt{16+1444+529}}{9}=\frac{\sqrt{1989}}{9}=$$

$$=\frac{3\sqrt{221}}{9}=\frac{\sqrt{221}}{3}.$$

$$\underline{d(C,r)=\frac{\sqrt{221}}{3}\ unidades.}$$

****