PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

SEPTIEMBRE - 2014

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II | Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

1.- Debe escogerse una sola de las opciones.

2.- Debe exponerse con claridad el planteamiento de la respuesta o el método utilizado para su resolución. Todas las respuestas deben ser razonadas.

3.- No se permite el uso de calculadoras gráficas ni programables. Tampoco está permitido el uso de dispositivos con acceso a internet.

OPCIÓN 1

1º) Considera las matrices $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & a \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $D = \begin{pmatrix} z \\ z \\ z \end{pmatrix}$.

a) Sabiendo que se verifica $A \cdot B = 2C - D$, plantea un sistema de ecuaciones lineales cuyas incógnitas son x, y, z, donde α es un parámetro.

b) Estudia el carácter del sistema para los distintos valores del parámetro α y resuélvelo cuando sea compatible (calculando todas sus soluciones).

----

a)

$$A \cdot B = 2C - D \Rightarrow \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & a \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} z \\ z \\ z \end{pmatrix} \;;;\; \begin{pmatrix} ax + y \\ x + ay \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 - z \\ -2 - z \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} ax + y = -2 - z \\ x + ay = -2 - z \\ x = z \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\left.\begin{array}{r} ax + y + z = -2 \\ x + ay + z = -2 \\ x - z = 0 \end{array}\right\}}}.$$

b)

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M=\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \; y \; M'=\begin{pmatrix} a & 1 & 1 & -2 \\ 1 & a & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

El rango de M en función del parámetro α es el siguiente:

$$|M|=\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}=-a^2+1-a+1=-a^2-a+2=0 \;;;\; a^2+a-2=0 \;;;\; a=\frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{2}=$$

$$=\frac{-1\pm\sqrt{9}}{2}=\frac{-1\pm 3}{2} \Rightarrow \underline{a_1=-2} \;;;\; \underline{a_2=1}.$$

$$Para \; \left.\begin{cases} a \neq -2 \\ a \neq 1 \end{cases}\right\} \Rightarrow Rango\; M = Rango\; M' = 3 = n^o \; incógnitas \Rightarrow Compatible\; determinado.$$

$$Para \;\; \alpha=-2 \Rightarrow M'=\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow Rango\; M' \Rightarrow \{C_1,\; C_2,\; C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}=$$

$$=-4+1+2+1=0 \Rightarrow \underline{Rango\; M'=2}.$$

$$Para \;\; \alpha=1 \Rightarrow M'=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \{F_1=F_2\} \Rightarrow \underline{Rango\; M'=2}$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix}=2-2+1+1+1+4=7\neq 0 \Rightarrow \underline{Rango\;\; M'=3}.$$

$$Para \; \left.\begin{cases} a=-2 \\ a=1 \end{cases}\right\} \Rightarrow Rango\; M = Rango\; M' = 2 < n^o \; incógnitas \Rightarrow Compatible\; indeterminado.$$

Resolvemos para α ≠ -2 y α ≠ 1, el sistema resulta $\left.\begin{array}{r} ax+y+z=-2 \\ x+ay+z=-2 \\ x-z=0 \end{array}\right\}$.

$$\left.\begin{array}{r} ax+y+z=-2 \\ x+ay+z=-2 \\ x-z=0 \end{array}\right\} \to x=z \Rightarrow \left.\begin{array}{r} az+y+z=-2 \\ z+ay+z=-2 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} y+(a+1)z=-2 \\ ay+2z=-2 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} ay+a(a+1)z=-2a \\ -ay-2z=2 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$(a^2+a)z-2z=2-2a \;;;\; (a^2+a-2)z=2(1-a) \;;;\; z=\frac{2(1-a)}{a^2+a-2}=\frac{2(1-a)}{(a+2)(a-1)}=\underline{\frac{-2}{a+2}}.$$

$$y=-2-(a+1)z=-2+\frac{2(a+1)}{a+2}=\frac{-2a-4+2a+2}{a+2}=\underline{\frac{-2}{a+2}}.$$

$$\underline{\underline{Solución:\ \left\{x=y=z=\frac{-2}{a+2}\right. \ ;\ \forall a\in R}}.$$

Para α = -2 el sistema resulta $\left.\begin{array}{r}-2x+y+z=-2\\ x-2y+z=-2\\ x-z=0\end{array}\right\}$, que es compatible indeterminado; despreciando, por ejemplo, la primera ecuación y haciendo $x=z=\lambda$:

$$y=-2+2x-z=-2+2\lambda-\lambda\ ;;\ \underline{y=-2+\lambda}\ \Rightarrow\ \underline{\underline{Solución:\ \begin{cases}x=\lambda\\ y=-2+\lambda\\ z=\lambda\end{cases} ;\ \forall\lambda\in R}}.$$

Para α = 1 el sistema resulta $\left.\begin{array}{r}x+y+z=-2\\ x+y+z=-2\\ x-z=0\end{array}\right\}$, equivalente a $\left.\begin{array}{r}x+y+z=-2\\ x-z=0\end{array}\right\}$.

Haciendo $\underline{x=z=\lambda}\ \Rightarrow\ y=-2-x-z=\underline{-2-2\lambda}$.

$$\underline{\underline{Solución:\ \begin{cases}x=\lambda\\ y=-2-2\lambda\\ z=\lambda\end{cases} ;\ \forall\lambda\in R}}.$$

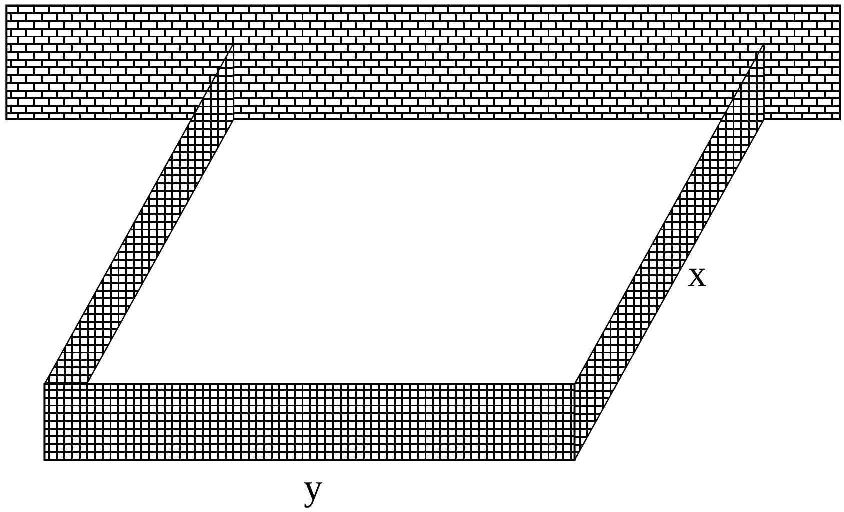
****

2º) a) Se quiere vallar una finca rectangular que está junto a un camino. La valla del lado del camino cuesta 125 euros el metro, y la de los otros lados cuesta 25 euros el metro. Hallar el área del terreno de mayor superficie que podemos vallar con 3.000 euros.

b) Halla las tangentes a la gráfica de la función $f(x)=\frac{2x}{x-1}$ que son paralelas a la recta de ecuación $2x+y=0$.

----

a)



$$Costo=125\cdot y+(2x+y)\cdot 25=125y+50x+25y=150y+50x=50(3y+x)=3.000.$$

$$3x+y=\frac{3.000}{50}=60 \rightarrow y=60-3x=\underline{3(20-x)}.$$

$$Área=A=x\cdot y=x\cdot[3(20-x)]=3\cdot(20x-x^2) \;;;\; A'(x)=3\cdot(20-2x)=\underline{6(10-x)}.$$

Para que el área sea máxima su primera derivada tiene que ser cero:

$$A'(x)=0 \Rightarrow 6(10-x)=0 \;;;\; 10-x=0 \;;;\; \underline{x=10 \;\; metros}.$$

$$y=3\cdot(20-x)=3\cdot(20-10)=\underline{30 \; metros}.$$

Para justificar que se trata de un máximo tenemos en cuenta que $\underline{A''(x)=-6<0}$.

Con 3.000 euros podemos vallar A = 10 · 30 = 300 metros cuadrados.

b)

La recta $2x+y=0$ tiene de pendiente $\underline{m=-2}$.

La pendiente a una función en un punto es igual que el valor de su primera derivada en ese punto:

$$f'(x)=\frac{2\cdot(x-1)-2x\cdot 1}{(x-1)^2}=\frac{2x-2-2x}{(x-1)^2}=\underline{\frac{-2}{(x-1)^2}}.$$

$$f'(x)=m=-2=\frac{-2}{(x-1)^2}\ ;;\ (x-1)^2=1\ \Rightarrow\ \underline{x_1=0},\ \underline{x_2=2}.$$

Para x = 0: $f(0)=\frac{2\cdot 0}{0-1}=0\ \Rightarrow$ Punto de tangencia: <u>O(0, 0)</u>.

La ecuación de una recta que pasa por un punto conocida la pendiente viene dada por la fórmula $y-y_0=m(x-x_0)$:

Recta tangente: $y-0=-2\cdot(x-0)\ \Rightarrow\ \underline{\underline{t_1\equiv 2x+y=0}}$.

Para x = 2: $f(2)=\frac{2\cdot 2}{2-1}=4\ \Rightarrow$ Punto de tangencia: <u>P(2, 4)</u>.

Recta tangente: $y-4=-2\cdot(x-2)=-2x+4\ \Rightarrow\ \underline{\underline{t_2\equiv 2x+y-8=0}}$.

****

3º) El vértice A de un triángulo rectángulo está en la recta $r \equiv \begin{cases} x=3 \\ y+z+1=0 \end{cases}$ y su hipotenusa tiene los vértices en los puntos B(2, 1, -1) y C(0, -1, 3).

a) Halla el punto A y el área del triángulo de vértices A, B y C.

b) Calcula la ecuación de la recta s que pasa por los puntos B y C.

c) Estudia la posición relativa de las rectas r y s. En caso de que las rectas se corten, halla el punto de intersección.

----

a)

La expresión de r por unas ecuaciones paramétricas es la siguiente:

$$r \equiv \begin{cases} x=3 \\ y+z+1=0 \end{cases} \Rightarrow z=\lambda,\ y=-1-\lambda \Rightarrow \underline{r \equiv \begin{cases} x=3 \\ y=-1-\lambda \\ z=\lambda \end{cases}}.$$

Un punto genérico de r es $P(3,\ -1-\lambda,\ \lambda)$.

Por ser A el vértice del ángulo recto del triángulo rectángulo es $\overrightarrow{BA} \perp \overrightarrow{CA}$; como el punto A pertenece a la recta r y el producto escalar de dos vectores perpendiculares es cero, podemos hacer lo siguiente:

$$\overrightarrow{BP} \cdot \overrightarrow{CP} = 0 \Rightarrow (3-2,\ -1-\lambda-1,\ \lambda+1)\cdot(3-0,\ -1-\lambda+1,\ \lambda-3)=0\ ;;$$

$$(1,\ -2-\lambda\ \ \lambda+1)\cdot(3,\ -\lambda,\ \lambda-3)=0\ ;;\ 3+2\lambda+\lambda^2+\lambda^2-3\lambda+\lambda-3=0\ ;;\ 2\lambda^2=0\ ;;\ \underline{\lambda=0}.$$

$$\underline{\underline{A(3,\ -1,\ 0)}}.$$

b)

La recta s que pasa por B y C tiene como vector director a cualquier vector que sea linealmente dependiente del vector que determinan los puntos B y C, que es el siguiente: $\overrightarrow{BC}=C-B=(0,\ -1,\ 3)-(2,\ 1,\ -1)=(-2,\ 2,\ -4) \Rightarrow \underline{\overrightarrow{v_s}=(1,\ -1,\ 2)}$.

Considerando, por ejemplo, el punto B(2, 1, -1), la ecuación de s dada por unas ecuaciones continuas es:

$$\underline{\underline{s \equiv \frac{x-2}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z+1}{2}}}.$$

c)

La expresión de s por unas ecuaciones implícitas en la siguiente:

$$s \equiv \frac{x-2}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z+1}{2}\ ;;\ \left.\begin{matrix} -x+2=y-1 \\ 2x-4=z+1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \underline{s \equiv \begin{cases} x+y-3=0 \\ 2x-z-5=0 \end{cases}}.$$

Las rectas r y s determinan el sistema $\left.\begin{array}{r} x=3 \\ y+z=-1 \\ x+y=3 \\ 2x-z=5 \end{array}\right\}$. Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes: $M=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}\ y\ M'=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & -1 & 5 \end{pmatrix}$.

En función de los rangos de las matrices M y M', la posición relativa de las dos rectas es la siguiente:

Rango M = Rango M' = 2 $\Rightarrow$ (Puntos comunes) $\Rightarrow$ Son rectas coincidentes.

Rango M = 2 ;; Rango M' = 3 $\Rightarrow$ (No hay puntos comunes) $\Rightarrow$ Son rectas paralelas.

Rango M = Rango M' = 3 $\Rightarrow$ (Puntos comunes) $\Rightarrow$ Las rectas se cortan en un punto.

Rango M = 3 ;; Rango M' = 4 $\Rightarrow$ (No hay puntos comunes) $\Rightarrow$ Las rectas se cruzan.

Rango de M' $\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & -1 & 5 \end{vmatrix} \Rightarrow \{F_3 \to F_3 - F_2\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 4 \\ 2 & 0 & -1 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 4 \\ 2 & -1 & 5 \end{vmatrix} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \{F_2 \to F_2 - F_3\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -1+3=2 \neq 0 \Rightarrow Rango\ \ M'=4$$

Veamos ahora cuál es el rango de M:

$$Rango\ \ M \Rightarrow \{F_1,\ F_2,\ F_3\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \Rightarrow \underline{Rango\ \ M=3}.$$

Las rectas r y s se cruzan.

****

OPCIÓN 2

1º) La suma de las tres cifras de un número es 16 y la suma de la primera y la tercera es igual a k veces la segunda. Permutando entre sí la primera y tercera cifras se obtiene un número que supera en 198 unidades al número dado.

a) Plantea un sistema de ecuaciones lineales cuya resolución permita hallar el número dado.

b) Estudia para qué valores del parámetro k el sistema tiene solución.

c) Para k = 1, determina el número de tres cifras que cumple las condiciones del enunciado.

----

a)

Sea el número pedido $N=(abc)$. (No como producto).

Sabemos que las tres cifras del número suman 16: $\underline{a+b+c=16}$. (1)

La suma de la primera y la tercera cifra es k veces la segunda: $\underline{a+c=kb}$. (2)

Permutando entre sí la primera y tercera cifras se obtiene un número que supera en 198 unidades al número dado:

$(cba)-(abc)=198 \Rightarrow (100c+10b+a)-(100a+10b+c)=198$;; $-99a+99c=198$;; $\underline{a-c=-2}$. (3)

El sistema pedido lo componen las ecuaciones (1), (2) y (3):

$$\underline{\underline{\left.\begin{array}{r} a+b+c=16 \\ a-kb+c=0 \\ a-c=-2 \end{array}\right\}}}.$$

b)

De las ecuaciones (1) y (2) se deduce que: $b+kb=16$;; $b(k+1)=16$;; $\underline{b=\frac{16}{k+1}}$.

Como b y k son números naturales, el cociente $\frac{16}{k+1}$ también tiene que ser un número natural, para lo cual k tiene que valer 1, 3, 7 o 15.

<u>El sistema tiene solución para los valores de k: 1, 3, 7 y 15</u>.

c)

Para k = 1 el sistema resulta: $\left\{\begin{array}{r} a+b+c=16 \\ a-b+c=0 \\ a-c=-2 \end{array}\right.$.

De la suma de las dos primeras ecuaciones se deduce que $2a+2c=16$;; $\underline{a+c=8}$.

La expresión anterior con la tercera ecuación forman el sistema $\begin{cases} a+c=8 \\ a-c=-2 \end{cases}$, cuyas soluciones son <u>α = 3</u> y <u>c = 5</u>.

Sustituyendo los valores obtenidos en la primera ecuación del sistema resulta:

$a+b+c=16$;; $3+b+5=16$;; $\underline{b=8}$.

<u>El número pedido es el 385.</u>

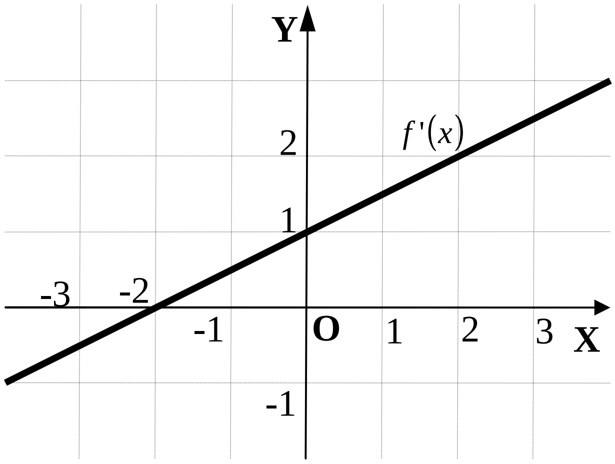
****

2º) a) Considera la función $g: R \to R$ definida por $g(x) = \begin{cases} x & si \ x \le 0 \\ x\,sen\ x & si \ x > 0 \end{cases}$.

a$_1$) Estudia la derivabilidad de g.

a$_2$) Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de la función g, el eje de abscisas (y = 0) y las rectas x = -1 y $x = \frac{\pi}{2}$.

b) La gráfica adjunta corresponde a la función derivada f' de una función f. Estudia el crecimiento y decrecimiento de f y di si tiene un máximo o un mínimo.



----

a)

a$_1$)

Para que una función sea derivable en un punto es condición necesaria que sea continua en ese punto, por lo tanto, antes de estudiar la derivabilidad de la función, estudiaremos su continuidad.

La función g es continua en su dominio, excepto para x = 0 cuya continuidad vamos a comprobar.

Para que g sea continua para x = 0 tiene que cumplirse que los límites por la izquierda y por la derecha sean iguales, e igual al valor de la función en ese punto:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} g(x) = \lim\limits_{x \to 0} x = g(0) = \underline{0} \\ \lim\limits_{x \to 0^+} g(x) = \lim\limits_{x \to 0} (x \cdot sen\ x) = \underline{0} \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{\lim\limits_{x \to 0^-} g(x) = g(0) = \lim\limits_{x \to 0^+} g(x)}.$$

<u>La función g es continua en R, como queríamos comprobar</u>.

Una función es derivable en un punto si, y solo si, existen la derivada por la izquierda y la derivada por la derecha en ese punto y además, son iguales.

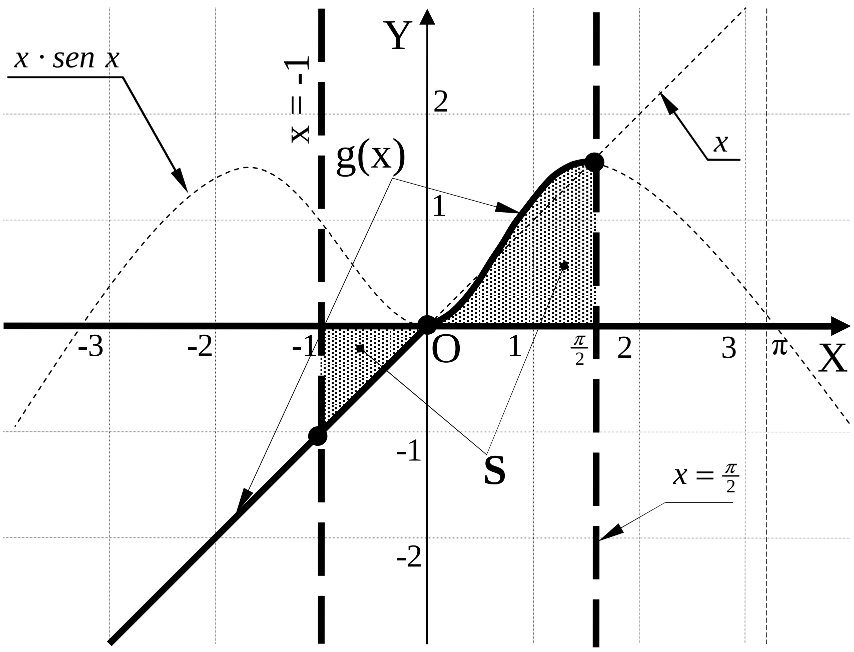
El punto crítico es el mismo que el estudiado en la continuidad, para x = 0.

$$g'(x) = \begin{cases} 1 & si \ x \le 0 \\ sen\ x + x \cos x & si \ x > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} g'(0^-) = \underline{1} \\ g'(0^+) = \underline{0} \end{cases} \Rightarrow \underline{g'(0^-) \ne g'(0^+)}.$$

<u>La función g es derivable en R, excepto en x = 0</u>.

a$_2$)

La representación gráfica de la función es la siguiente:



De la observación de la figura se deduce el área pedida, que es la siguiente:

$$S = \int_0^{-1} x \cdot dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cdot sen\ x \cdot dx = \underline{A + B}. \qquad (*)$$

$$A = \int_0^{-1} x \cdot dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{-1} = \left[\frac{(-1)^2}{2}\right] - 0 = \underline{\frac{1}{2}\ u^2}\ .$$

$$B = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cdot sen\ x \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} x = u \rightarrow du = dx \\ sen\ x \cdot dx = dv \rightarrow v = -\cos\ x \end{array} \right\} \Rightarrow \left[x \cdot (-\cos\ x) - \int -\cos\ x \cdot dx\right]_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \left[-x \cdot \cos\ x + \int \cos\ x \cdot dx\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \left[-x \cdot \cos\ x + sen\ x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \left[-\frac{\pi}{2} \cdot \cos\frac{\pi}{2} + sen\frac{\pi}{2}\right] - \left[-0 \cdot 1 + 0\right] =$$

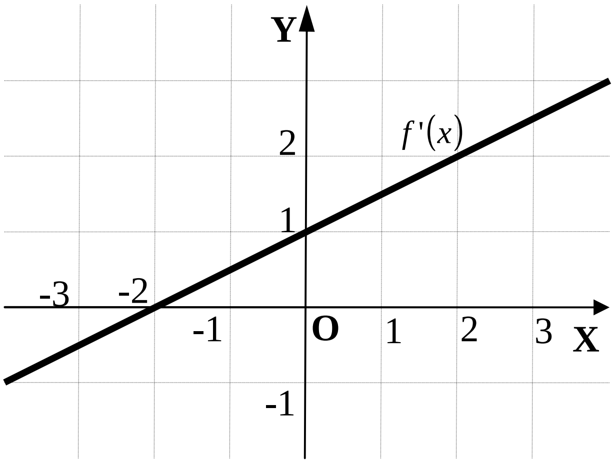
$$= -\frac{\pi}{2} \cdot 0 + 1 - 0 = \underline{1\ u^2 = B}.$$

Sustituyendo en (*) los valores obtenidos de A y B:

$$\underline{\underline{S = A + B = \frac{1}{2} + 1 = 1'5\ u^2}}\ .$$

b)

Una función es decreciente o decreciente en un punto cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.



Los periodos de crecimiento y decrecimiento son los siguientes:

$$\underline{\underline{Crecimiento:\ f'(x)>0\ \Rightarrow\ x\in(-2,\ +\infty)}}.$$

$$\underline{\underline{Decrecimiento:\ f'(x)<0\ \Rightarrow\ x\in(-\infty,\ -2)}}.$$

Una función tiene un máximo o un mínimo relativo para los valores que anulan su primera derivada, por lo tanto, f(x) tiene un máximo o un mínimo relativo para x = -2.

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada: según que sea positiva o negativa para los valores que anulan la primera derivada se trata de un mínimo o de un máximo, respectivamente.

Observando la figura se observa que la pendiente de la función derivada es $m=\frac{1}{2}$ y la ordenada en el origen es n = 1, por lo que su expresión algebraica es $f'(x)=\frac{1}{2}x+1$.

El valor de la segunda derivada es $f''(x)=\frac{1}{2}>0\ \Rightarrow$ <u>Mínimo</u>.

<u>La función f(x) tiene un mínimo relativo para x = -2</u>.

****

3º) Considera la recta $r \equiv \begin{cases} x+z-3=0 \\ x-2y-z+3=0 \end{cases}$.

a) Calcula el simétrico del punto P(4, 1, -1) respecto de la recta r.

b) Halla la ecuación general del plano π que contiene a la recta r y al punto P.

----

a)

La expresión de r dada por unas ecuaciones paramétricas es la siguiente:

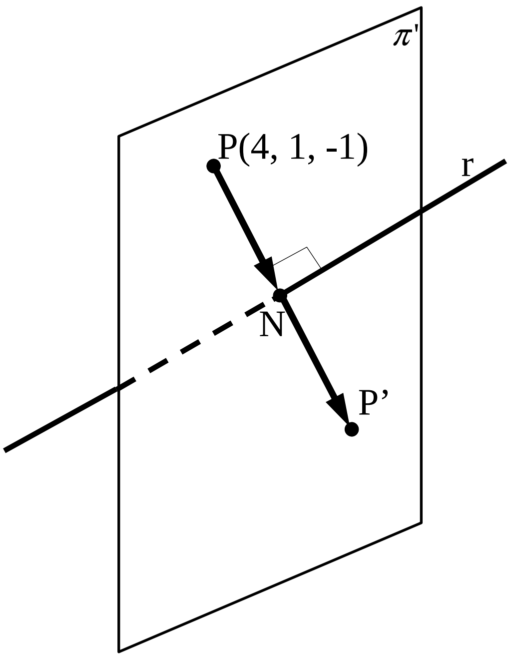
$$r \equiv \begin{cases} x+z-3=0 \\ x-2y-z+3=0 \end{cases} \Rightarrow \underline{z=\lambda} \;;;\; \underline{x=3-\lambda} \;;;\; 2y=x-z+3=3-\lambda-\lambda+3=6-2\lambda \;;;$$

$$\underline{y=3-\lambda} \Rightarrow \underline{r \equiv \begin{cases} x=3-\lambda \\ y=3-\lambda \\ z=\lambda \end{cases}}.$$ Un vector director de r es $\underline{\overrightarrow{v_r}=(1,\ 1,\ -1)}$.

El plano π', perpendicular a r por P(4, 1, -1), es el que tiene como vector normal a $\overrightarrow{v_r}$ y contiene al punto P:

$$\left.\begin{array}{l} \pi' \equiv x+y-z+D=0 \\ P(4,\ 1,\ -1) \end{array}\right\} \Rightarrow 4+1-(-1)+D=0 \;;;\; 6+D=0 \;;;\; \underline{D=-6} \;\Rightarrow\; \underline{\pi' \equiv x+y-z-6=0}.$$

El punto N de intersección de la recta r con el plano π' es el siguiente:



$$\left.\begin{array}{l} \pi' \equiv x+y-z-6=0 \\ r \equiv \begin{cases} x=3-\lambda \\ y=3-\lambda \\ z=\lambda \end{cases} \end{array}\right\} \Rightarrow 3-\lambda+3-\lambda-\lambda-6=0 \;;;$$

$$-3\lambda=0 \;;;\; \underline{\lambda=0} \Rightarrow \begin{Bmatrix} x=3 \\ y=3 \\ z=0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \underline{N(3,\ 3,\ 0)}.$$

Con objeto de clarificar la situación, se expresa en la figura adjunta de forma aproximada.

Para que P’ sea el punto simétrico de P con respecto a r, tiene que cumplirse que:

$$\overrightarrow{PN}=\overrightarrow{NP'} \Rightarrow N-P=P'-N \;;;\; (3,\ 3,\ 0)-(4,\ 1,\ -1)=(x,\ y,\ z)-(3,\ 3,\ 0) \;;;$$

$$(-1,\ 2,\ 1)=(x-3,\ y-3,\ z)\ \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x-3=-1\ \rightarrow\ \underline{x=2} \\ y-3=2\ \rightarrow\ \underline{y=5} \\ \underline{z=1} \end{array}\right\}\ \Rightarrow\ \underline{\underline{P'(2,\ 5,\ 1)}}.$$

b)

El plano π pedido, por contener a r, tiene como vector director al vector director de la recta $\overrightarrow{v_r}=(1,\ 1,\ -1)$.

Un punto de r es N(3, 3, 0).

Por contener π a los puntos N y P tiene como vector director a $\overrightarrow{PN}=(-1,\ 2,\ 1)$.

La expresión general π es la siguiente: $\pi(N;\ \overrightarrow{v_r},\ \overrightarrow{PN})\equiv\begin{vmatrix} x-3 & y-3 & z \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix}=0$;;

$$(x-3)+(y-3)+2z+z+2(x-3)-(y-3)=0\ ;;\ 3(x-3)+3z=0\ ;;\ x-3+z=0.$$

$$\underline{\underline{\pi\equiv x+z-3=0}}.$$

****