PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

SEPTIEMBRE - 2013

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II — Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

1.- Debe escogerse una sola de las opciones.
2.- Debe exponerse con claridad el planteamiento de la respuesta o el método utilizado para su resolución. Todas las respuestas deben ser razonadas.
3.- No se permite el uso de calculadoras gráficas ni programables. Tampoco está permitido el uso de dispositivos con acceso a internet.

OPCIÓN 1

1º) Considera las matrices $M=\begin{pmatrix} 2a & b & 1 \\ 3 & -2b & -2c \\ 5a & -2 & c \end{pmatrix}$ y $N=\begin{pmatrix} 3c \\ a \\ -4b \end{pmatrix}$.

a) Determina los valores de α, b y c para que se verifique la igualdad $M\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}=N$.

b) Estudia el carácter del sistema de ecuaciones lineales $M\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=N$ cuando $\alpha=0$, $b=-1$ y $c=2$.

----

a)

$$M\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}=N \Rightarrow \begin{pmatrix} 2a & b & 1 \\ 3 & -2b & -2c \\ 5a & -2 & c \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3c \\ a \\ -4b \end{pmatrix} \;;\; \begin{pmatrix} 2a+2b+3 \\ 3-4b-6c \\ 5a-4+3c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3c \\ a \\ -4b \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{r} 2a+2b+3=3c \\ 3-4b-6c=a \\ 5a-4+3c=-4b \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} 2a+2b-3c=-3 \\ a+4b+6c=3 \\ 5a+4b+3c=4 \end{array}\right\}.$$ La matriz de coeficientes es $A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 1 & 4 & 6 \\ 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}$, cuyo rango es el siguiente:

$$|A|=\begin{vmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 1 & 4 & 6 \\ 5 & 4 & 3 \end{vmatrix}=2\cdot 3\cdot\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 5 & 2 & 1 \end{vmatrix}=6\cdot(4-2+10+10-8-1)=6\cdot 13\neq 0 \Rightarrow \underline{\text{Rango } A = 3.}$$

Según el teorema de Rouché-Fröbenius, el sistema es compatible determinado. Resolviendo por Cramer:

$$a=\frac{\begin{vmatrix}-3 & 2 & -3\\ 3 & 4 & 6\\ 4 & 4 & 3\end{vmatrix}}{6\cdot 13}=\frac{2\cdot 3\cdot\begin{vmatrix}-3 & 1 & -1\\ 3 & 2 & 2\\ 4 & 2 & 1\end{vmatrix}}{6\cdot 13}=\frac{\begin{vmatrix}-3 & 1 & -1\\ 3 & 2 & 2\\ 4 & 2 & 1\end{vmatrix}}{13}=\frac{-6-6+8+8+12-3}{13}=\frac{13}{13}=\underline{\underline{1}}\,.$$

$$b=\frac{\begin{vmatrix}2 & -3 & -3\\ 1 & 3 & 6\\ 5 & 4 & 3\end{vmatrix}}{6\cdot 13}=\frac{3\cdot\begin{vmatrix}2 & -3 & -1\\ 1 & 3 & 2\\ 5 & 4 & 1\end{vmatrix}}{6\cdot 13}=\frac{6-4-30+15-16+3}{2\cdot 13}=\frac{-26}{26}=\underline{\underline{-1}}\,.$$

$$c=\frac{\begin{vmatrix}2 & 2 & -3\\ 1 & 4 & 3\\ 5 & 4 & 4\end{vmatrix}}{6\cdot 13}=\frac{2\cdot\begin{vmatrix}2 & 1 & -3\\ 1 & 2 & 3\\ 5 & 2 & 4\end{vmatrix}}{6\cdot 13}=\frac{16-6+15+30-12-4}{3\cdot 13}=\frac{39}{39}=\underline{\underline{1}}\,.$$

b)

Para $\alpha=0$, $b=-1$ y $c=2$ es $M=\begin{pmatrix}0 & -1 & 1\\ 3 & 2 & -4\\ 0 & -2 & 2\end{pmatrix}$ y $N=\begin{pmatrix}6\\ 0\\ 4\end{pmatrix}$.

$$M\cdot\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=N\ \Rightarrow\ \begin{pmatrix}0 & -1 & 1\\ 3 & 2 & -4\\ 0 & -2 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\ 0\\ 4\end{pmatrix}\ ;;\ \begin{pmatrix}-y+z\\ 3x+2y-4z\\ -2y+2z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\ 0\\ 4\end{pmatrix}\ \Rightarrow\ \left.\begin{array}{r}-y+z=6\\ 3x+2y-4z=0\\ -2y+2z=4\end{array}\right\}\ ;;$$

$\left.\begin{array}{r}-y+z=6\\ 3x+2y-4z=0\\ -y+z=2\end{array}\right\}$. De las ecuaciones primera y tercera se deduce que:

$$\underline{\underline{Para\ \ a=0,\ b=-1\ \ y\ \ c=2\ \ el\ \ sistema\ \ M\cdot\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=N\ \ es\ \ Incompatible}}$$

****

2º) Considera la función $f: R \to R$ definida por $f(x)=1-\frac{3x}{x^2-4}$.

a) Determina el dominio de definición de la función f. Calcula los puntos de corte con los ejes y las asíntotas de f.

b) Calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f.

c) Halla los puntos de inflexión de f. Esboza la gráfica de la función f.

----

a)

$$f(x)=1-\frac{3x}{x^2-4}=\frac{x^2-4-3x}{x^2-4}=\frac{x^2-3x-4}{x^2-4}.$$

El dominio de una función racional es R, excepto los valores reales de x que anulan el denominador.

$$x^2-4=0 \Rightarrow (x+2)(x-2)=0 \Rightarrow \begin{cases} \underline{x_1=2} \\ \underline{x_2=-2} \end{cases} \Rightarrow \underline{\underline{D(f) \Rightarrow R-\{-2,\ 2\}}}.$$

Cortes con el eje X: $y=f(x)=0 \Rightarrow \frac{x^2-3x-4}{x^2-4}=0$;; $x^2-3x-4=0$;; $x=\frac{3\pm\sqrt{9+16}}{2}=$

$$=\frac{3\pm\sqrt{25}}{2}=\frac{3\pm 5}{2} \Rightarrow \underline{x_1=-1} \to \underline{\underline{A(-1,\ 0)}} \ ;; \ \underline{x_2=4} \to \underline{\underline{B(4,\ 0)}}$$

Cortes con el eje Y: $x=0 \Rightarrow f(0)=\frac{-4}{-4}=1 \Rightarrow \underline{\underline{C(0,\ 1)}}$.

b)

Una función es creciente o decreciente en un punto cuando su derivada es positiva o negativa, respectivamente, en ese punto.

$$f'(x)=\frac{(2x-3)\cdot(x^2-4)-(x^2-3x-4)\cdot 2x}{(x^2-4)^2}=\frac{2x^3-8x-3x^2+12-2x^3+6x^2+8x}{(x^2-4)^2}=\underline{\frac{3x^2+12}{(x^2-4)^2}}.$$

$\underline{f'(x)>0 \ \forall x \in D(f)}$.

<u>La función f(x) es monótona creciente en su dominio.</u>

c)

Para que una función tenga un punto de inflexión en un punto es condición necesaria que se anule su segunda derivada y sea distinta de cero la tercera derivada para los valores que anulan la segunda.

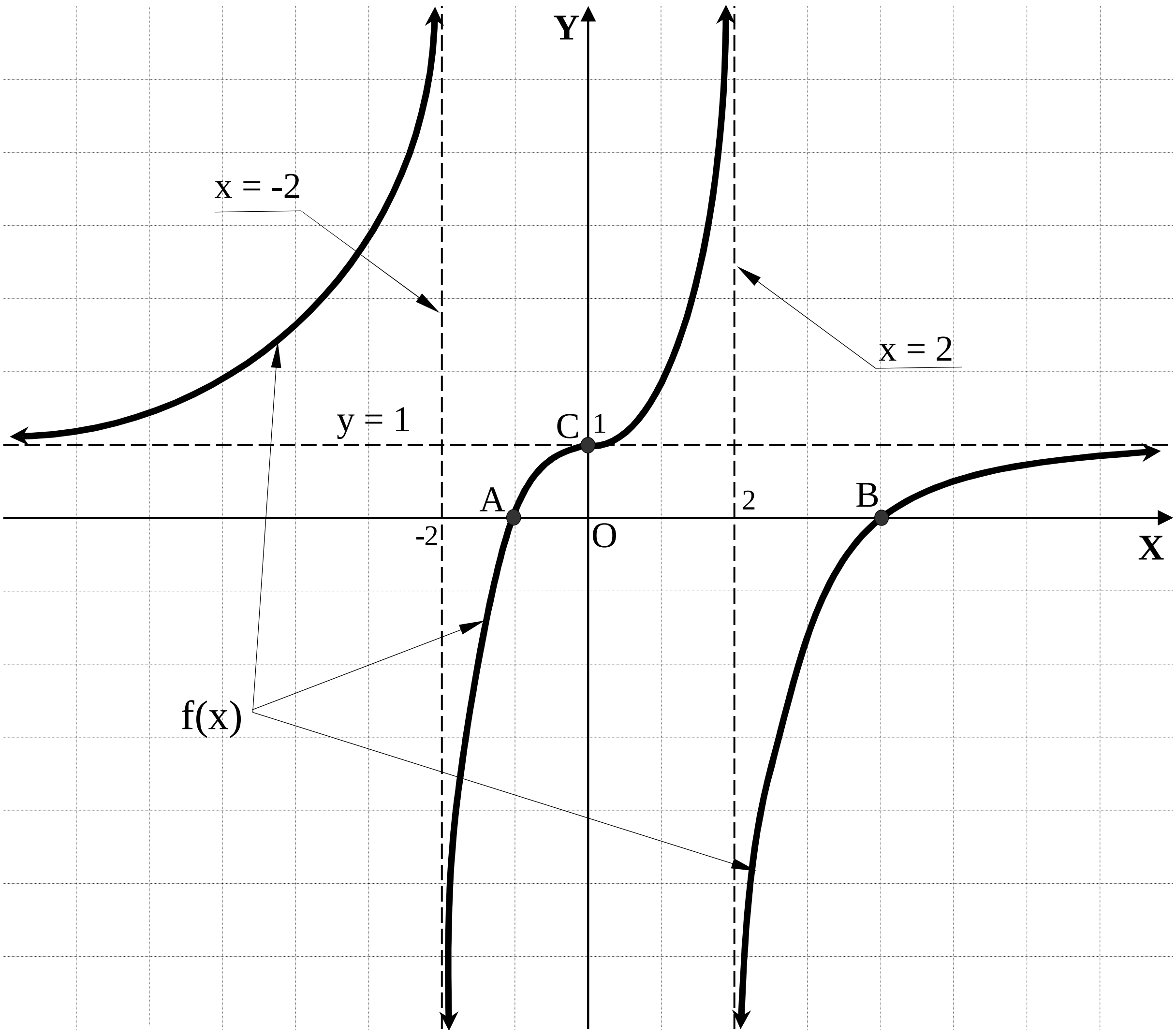
$$f''(x)=\frac{6x\cdot\left(x^2-4\right)^2-\left(3x^2+12\right)\cdot 2\cdot\left(x^2-4\right)\cdot 2x}{\left(x^2-4\right)^4}=\frac{6x\cdot\left(x^2-4\right)-4x\cdot\left(3x^2+12\right)}{\left(x^2-4\right)^3}=$$

$$=\frac{6x^3-24x-12x^3-48x}{\left(x^2-4\right)^3}=\frac{-6x^3-72x}{\left(x^2-4\right)^3}=\underline{\frac{-6x\left(x^2+12\right)}{\left(x^2-4\right)^3}=f''(x)}.$$

$$f''(x)=0\ \Rightarrow\ \frac{-6x\left(x^2+12\right)}{\left(x^2-4\right)^3}=0\ ;;\ -6x\left(x^2+12\right)=0\ ;;\ \underline{x=0}.$$

$$f'''(x)=\frac{\left(-18x^2-72\right)\cdot\left(x^2-4\right)^3-\left[-6x\cdot\left(x^2+12\right)\right]\cdot 3\cdot\left(x^2-4\right)^2\cdot 2x}{\left(x^2-4\right)^6}=$$

$$=\frac{-18\cdot\left(x^2+4\right)\cdot\left(x^2-4\right)+36x^2\cdot\left(x^2+12\right)}{\left(x^2-4\right)^4}=\frac{-18\cdot\left[x^4-16-2\cdot\left(x^2+12\right)\right]}{\left(x^2-4\right)^4}=\underline{\frac{-18\cdot\left(x^4-2x^2-40\right)}{\left(x^2-4\right)^4}}.$$



$$f'''(0)=\frac{-18\cdot(-40)}{(-4)^4}\neq 0\ \Rightarrow$$ <u>Punto de inflexión para x = 0</u>.

$$f(0)=\frac{-4}{-4}=1 \Rightarrow P.\ I. \Rightarrow \underline{\underline{C(0,\ 1)}}.$$

Para facilitar la representación gráfica de la función determinamos las asíntotas.

Las asíntotas horizontales son los valores finitos que toma la función cuando x tiende a más infinito o a menos infinito: $\underset{x \to \pm\infty}{lím} f(x) = \underset{x \to \pm\infty}{lím} \frac{x^2-3x-4}{x^2-1} = 1$.

<u>La recta y = 1 es asíntota horizontal de la función.</u>

Las asíntotas verticales son los valores reales que anulan el denominador de la función: $x^2-4=0$.

<u>Las recta x = -2 y x = 2 son asíntotas verticales de la función.</u>

Para que una función tenga asíntotas oblicuas es necesario que el numerador de la función tenga un grado mayor en una unidad al grado del denominador, por lo cual, en el caso que nos ocupa, <u>no existen asíntotas oblicuas.</u>

La representación gráfica, aproximada, de la función es la indicada en el gráfico.

****

3º) a) Dados los vectores $\overrightarrow{u}=(a,\ b,\ 1)$, $\overrightarrow{v}=(-3,\ 4,\ 1)$ y $\overrightarrow{w}=(1,\ 2,\ c)$, determina el valor de los parámetros $\alpha,\ b,\ c\in R$ de manera que los vectores $\overrightarrow{v}$ y $\overrightarrow{w}$ sean perpendiculares y además $\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{w}=\overrightarrow{v}$, donde $\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{w}$ denota el producto vectorial.

b) Sea r la recta que pasa por el punto P(1, -1, 1) y tiene como vector director $\overrightarrow{v_r}=(1,\ 2,\ -2)$. ¿Existe algún valor de k para el cual la recta r está contenida en el plano $\pi\equiv 2x+3y+4z=k$? En caso afirmativo, calcula el valor de k.

----

a)

Dos vectores son perpendiculares cuando su producto escalar es cero.

$$\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{w}=(-3,\ 4,\ 1)\cdot(1,\ 2,\ c)=0\ ;;\ -3+8+c=0\ ;;\ 5+c=0\ \Rightarrow\ \underline{\underline{c=-5}}.$$

$$\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{w}=\overrightarrow{v}\ \Rightarrow\ \begin{vmatrix} i & j & k \\ a & b & 1 \\ 1 & 2 & -5 \end{vmatrix}=(-3,\ 4,\ 1)\ ;;\ -5bi+j+2ak-bk-2i+5aj=(-3,\ 4,\ 1)\ ;;$$

$$(-5b-2)i+(1+5a)j+(2a-b)k=(-3,\ 4,\ 1)\ \Rightarrow\ \begin{cases} -5b-2=-3 \\ 1+5a=4 \\ 2a-b=1 \end{cases}\ \begin{matrix} \rightarrow 5b=1\ ;;\ \underline{\underline{b=\frac{1}{5}}} \\ \rightarrow 5a=3\ ;;\ \underline{\underline{a=\frac{3}{5}}}. \end{matrix}$$

b)

La expresión por unas ecuaciones paramétricas de r es $r\equiv\begin{cases} x=1+\lambda \\ y=-1+2\lambda \\ z=1-2\lambda \end{cases}$.

Un punto genérico de r es $Q(1+\lambda,\ -1+2\lambda,\ 1-2\lambda)$.

Si el plano π contiene a la recta r contiene a todos sus puntos, por lo cual el punto Q tiene que satisfacer su ecuación:

$$\left.\begin{matrix} \pi\equiv 2x+3y+4z=k \\ Q(1+\lambda,\ -1+2\lambda,\ 1-2\lambda) \end{matrix}\right\}\ \Rightarrow\ 2\cdot(1+\lambda)+3\cdot(-1+2\lambda)+4\cdot(1-2\lambda)=k\ ;;$$

$$2+2\lambda-3+6\lambda+4-8\lambda=k\ ;;\ \underline{k=3}.$$

<u>La recta r está contenida en el plano π para k = 3.</u>

****

OPCIÓN 2

1º) Las edades de Juan, su padre y su abuelo cumplen las siguientes condiciones: la suma de las edades de Juan, su padre y el doble de la del abuelo es 182 años; el doble de la edad de Juan más la del abuelo es 100 años, y la de su padre es k veces la de Juan.

a) Plantea un sistema de ecuaciones lineales cuya resolución permita hallar las edades de Juan, su padre y su abuelo.

b) Estudia para qué valores del parámetro k el sistema tiene solución. ¿Es posible que la edad del padre de Juan sea el triple que la de Juan?

c) Calcula, si es posible, las edades de cada uno para k = 2 y k = 4.

----

a)

Sean x, y, z las edades de Juan, su padre y su abuelo, respectivamente.

Del enunciado del problema se deduce el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\left.\begin{array}{l} x+y+2z=182 \\ 2x+z=100 \\ y=kx \end{array}\right\}, \text{ que es equivalente al sistema: } \underline{\underline{\left.\begin{array}{r} x+y+2z=182 \\ 2x+z=100 \\ kx-y=0 \end{array}\right\}}}.$$

b)

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

Las matrices de coeficientes y ampliada son:

$$M=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ k & -1 & 0 \end{pmatrix} \;\; y \;\; M'=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 182 \\ 2 & 0 & 1 & 100 \\ k & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes en función de k es el siguiente:

$$|M|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ k & -1 & 0 \end{vmatrix}=-4+k+1=0 \;;;\; -3+k=0 \Rightarrow \underline{k=3}.$$

$$\underline{Para\;\; k\neq 3 \Rightarrow Rango\;\; M=Rango\;\; M'=3=n^{o}\;\; incóg. \Rightarrow Compatible\;\; determinado}$$

Para k = 3 la matriz de coeficientes es $M'=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 182 \\ 2 & 0 & 1 & 100 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, cuyo rango es el siguiente:

$$Rango\ \ M' \Rightarrow \{C_2,\ C_3,\ C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 & 182 \\ 0 & 1 & 100 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -200 + 182 = -18 \neq 0 \Rightarrow \underline{Rango\ \ M' = 3}.$$

El sistema tiene solución únicamente para k ≠ 3.

Como es y = kx (la edad del padre de Juan igual a k por la edad de Juan):

No es posible que el padre tenga el triple de la edad de Juan.

c)

Resolviendo el sistema $\left.\begin{array}{r} x + y + 2z = 182 \\ 2x + z = 100 \\ kx - y = 0 \end{array}\right\}$ para k = 2:

$$\left.\begin{array}{r} x + y + 2z = 182 \\ 2x + z = 100 \\ 2x - y = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \\ \rightarrow z = 100 - 2x \ \Rightarrow \ x + 2x + 2(100 - 2x) = 182 \ ;; \ 3x + 200 - 4x = 182 \ ;; \\ \rightarrow y = 2x \end{array}$$

$$-x = 182 - 200 \ ;; \ \underline{x = 18} \ ;; \ \underline{y = 36} \ ;; \ z = 100 - 36 = \underline{64}.$$

Para k = 2 Juan tiene 18 años, su padre 36 años y su abuelo 64 años.

Para k = 4 es $\left.\begin{array}{r} x + y + 2z = 182 \\ 2x + z = 100 \\ 4x - y = 0 \end{array}\right\}$. Resolviendo:

$$\left.\begin{array}{r} x + y + 2z = 182 \\ 2x + z = 100 \\ 4x - y = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \\ \rightarrow z = 100 - 2x \ \Rightarrow \ x + 4x + 2(100 - 2x) = 182 \ ;; \ 5x + 200 - 4x = 182 \ ;; \\ \rightarrow y = 4x \end{array}$$

$$x = 182 - 200 \ ;; \ \underline{x = -18}.$$

Para k = 4 el ejercicio carece de sentido lógico.

****

2º) Considera la función $f(x)=\begin{cases} \dfrac{sen\left(x^2\right)}{x} & si \;\; x>0 \\ x^2-2x+a & si \;\; x\le 0 \end{cases}$.

a) Calcula el valor de α para que la función f sea continua en todo R.

b) Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función f en el punto de abscisa x = -1.

c) Calcula el área de la región limitada por la gráfica de la función f, el eje de abscisas (y = 0) y las rectas verticales x = -1 y x = 0.

----

a)

La función f es continua en todo R, excepto para x = 0, cuya continuidad depende del valor de α.

Para que f(x) sea continua en x = 0 tiene que cumplirse que los límites por la izquierda y por la derecha sean iguales, e igual al valor de la función en ese punto:

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{sen\left(x^2\right)}{x}=\underline{0} \quad (*) \\ \\ \displaystyle\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0}\left(x^2-2x+a\right)=\underline{a}=f(0) \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{a=0}.$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{sen\left(x^2\right)}{x}=\frac{0}{0} \Rightarrow In\det. \Rightarrow \{L´Hopital\} \Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{2x\cdot\cos\left(x^2\right)}{1}=\underline{0} \quad (*)$$

<u>La función f(x) es continua en R para α = 0.</u>

b)

Para x = -1 y α = 0 la función es $f(x)=x^2-2x$.

La pendiente de la tangente de una función en un punto es el valor de su derivada en ese punto:

$$f'(x)=2x-2 \Rightarrow m=f'(-1)=2\cdot(-1)-2=-2-2=\underline{-4}.$$

El punto de tangencia es el siguiente:

$$f(-1)=(-1)^2-2\cdot(-1)=1+2=3 \Rightarrow \underline{P(-1,\ 3)}.$$

La recta que pasa por un punto conocida la pendiente es $y-y_0=m(x-x_0)$, por lo cual, la tangente pedida es la siguiente:

$y - 3 = -4(x+1) = -4x - 4$.

La recta tangente a la función f(x) para x = -1 es y = -4x - 1.

c)

En el intervalo [-1, 0] la función es $f(x) = x^2 - 2x$ y sus ordenadas en este intervalo son todas positivas por lo cual el área pedida es la siguiente:

$$S = \int_{-1}^{0} f(x) \cdot dx = \int_{-1}^{0} \left(x^2 - 2x\right) \cdot dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{2x^2}{2}\right]_{-1}^{0} = \left[\frac{x^3}{3} - x^2\right]_{-1}^{0} = 0 - \left[\frac{(-1)^3}{3} - (-1)^2\right] =$$

$$= -\left(\frac{-1}{3} - 1\right) = \frac{1}{3} + 1 = \underline{\underline{\frac{4}{3}\, u^2 = S}}.$$

****

3º) Considera las rectas $r_1 \equiv \begin{cases} x - mz = 1 \\ 2x + y = 2 \end{cases}$ y $r_2 \equiv \begin{cases} x = 1 - s \\ y = 1 + 2s \\ z = -s \end{cases} \ (s \in R)$.

a) Determina el valor del parámetro m para que las rectas r_1 y r_2 sean paralelas.

b) Calcula la distancia de punto P(1, 1, 1) a la recta r_2.

c) Halla la ecuación general del plano π que es perpendicular a la recta r_2 y pasa por el punto Q(1, 0, -3).

----

a)

Dos rectas son paralelas cuando sus vectores directores son linealmente dependientes.

El vector director de r_1 es cualquiera que sea linealmente dependiente del producto vectorial de los vectores normales del los planos que la determinan, que son $\overrightarrow{n_1} = (1,\ 0,\ -m)$ y $\overrightarrow{n_2} = (2,\ 1,\ 0)$.

$$\overrightarrow{v_1} = \overrightarrow{n_1} \wedge \overrightarrow{n_2} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & -m \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -2mj + k + mi = mi - 2mj + k \Rightarrow \underline{\overrightarrow{v_1} = (m,\ -2m,\ 1)}.$$

El vector director de r_2 es $\overrightarrow{v_2} = (-1,\ 2,\ -1)$.

Para que $\overrightarrow{v_1} = (m,\ -2m,\ 1)$ y $\overrightarrow{v_2} = (-1,\ 2,\ -1)$ sean linealmente dependientes sus componentes tienen que ser proporcionales:

$$\frac{m}{-1} = \frac{-2m}{2} = \frac{1}{-1} \Rightarrow \underline{m = 1}.$$

<u>Las rectas r_1 y r_2 son paralelas para m = 1.</u>

b)

La distancia de P(1, 1, 1) a la recta $r_2 \equiv \begin{cases} x = 1 - s \\ y = 1 + 2s \\ z = -s \end{cases}$ viene dada por la siguiente fórmula: $d(P,\ r_2) = \frac{\left|\overrightarrow{PA} \wedge \overrightarrow{v_2}\right|}{\left|\overrightarrow{v_2}\right|}$, siendo A un punto de la recta r_2 y $\overrightarrow{v_2}$ el vector director de la recta r_2.

El punto A es, por ejemplo, A(1, 1, 0). $\overrightarrow{PA} = A - P = (1, 1, 0) - (1,\ 1,\ 1) = \underline{(0,\ 0,\ -1)}$.

$$d(P, r_2) = \frac{\left\| \begin{matrix} i & j & k \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{matrix} \right\|}{\sqrt{(-1)^2 + 2^2 + (-1)^2}} = \frac{\left\| \begin{matrix} i & j \\ -1 & 2 \end{matrix} \right\|}{\sqrt{1+4+1}} = \frac{|2i + j|}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{2^2 + 1^2}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{4+1}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{30}}{6}.$$

$$\underline{\underline{d(P, \ r_2) = \frac{\sqrt{30}}{6} \ unidades}}.$$

c)

Un vector normal del plano π es cualquiera que sea linealmente dependiente del vector director de la recta r_2, que es $\overrightarrow{v_2} = (-1, \ 2, \ -1)$; por ejemplo: $\overrightarrow{n} = (1, \ -2, \ 1)$.

La expresión general del plano π es de la forma $\pi \equiv x - 2y + z + D = 0$.

Como el plano π contiene al punto Q(1, 0, -3), éste tiene que satisfacer su ecuación:

$$\left. \begin{array}{l} \pi \equiv x - 2y + z + D = 0 \\ Q(1, \ 0, \ -3) \end{array} \right\} \Rightarrow 1 - 2 \cdot 0 + (-3) + D = 0 \ ;; \ 1 - 3 + D = 0 \Rightarrow \underline{D = 2}.$$

$$\underline{\underline{\pi \equiv x - 2y + z + 2 = 0}}$$

****