PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

JUNIO - 2013

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II   Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

1.- Debe escogerse una sola de las opciones.

2.- Debe exponerse con claridad el planteamiento de la respuesta o el método utilizado para su resolución. Todas las respuestas deben ser razonadas.

3.- No se permite el uso de calculadoras gráficas ni programables. Tampoco está permitido el uso de dispositivos con acceso a internet.

OPCIÓN 1

1º) Considera el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} 2x+y+az=-1 \\ -x+ay-z=2 \\ 2ax-2y+a^2z=2 \end{cases}$, $a \in R$. Estúdialo para los distintos valores del parámetro α y resuélvelo cuando sea compatible (calculando todas sus soluciones).

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & a \\ -1 & a & -1 \\ 2a & -2 & a^2 \end{pmatrix} \text{ y } A'=\begin{pmatrix} 2 & 1 & a & -1 \\ -1 & a & -1 & 2 \\ 2a & -2 & a^2 & 2 \end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes A en función de α es el siguiente:

$$|A|=\begin{vmatrix} 2 & 1 & a \\ -1 & a & -1 \\ 2a & -2 & a^2 \end{vmatrix}=2\alpha^3+2a-2a-2\alpha^3-4+a^2=-4+a^2=0 \;;;\; a^2=4 \Rightarrow \underline{a_1=2} \;;;\; \underline{a_2=-2}.$$

$$Para \begin{Bmatrix} a \neq 2 \\ a \neq -2 \end{Bmatrix} \Rightarrow Rango\ A = Rango\ A' = 3 = n^o\ incóg. \Rightarrow Compatible\ determinado$$

$$Para\ \ a=2\ \Rightarrow\ A'=\begin{pmatrix}2 & 1 & 2 & -1\\ -1 & 2 & -1 & 2\\ 4 & -2 & 4 & 2\end{pmatrix}\Rightarrow\ Rango\ \ A'\ \Rightarrow\ \{C_1,\ C_2,\ C_4\}\Rightarrow\begin{vmatrix}2 & 1 & -1\\ -1 & 2 & 2\\ 4 & -2 & 2\end{vmatrix}=$$

$$=8-2+8+8+8+2=32\neq 0\ \Rightarrow\ \underline{Rango\ \ A'=3}.$$

$$\underline{\underline{Para\ \ a=2\Rightarrow Rango\ A=2\ ;;\ Rango\ A'=3\Rightarrow Incompatible}}$$

$$Para\ \ a=-2\ \ es\ \ A'=\begin{pmatrix}2 & 1 & -2 & -1\\ -1 & -2 & -1 & 2\\ -4 & -2 & 4 & 2\end{pmatrix}\Rightarrow\{F_3=-2F_1\}\Rightarrow\ \underline{Rango\ \ A'=2}.$$

$$\underline{\underline{Para\ \ a=-2\Rightarrow Rango\ A=Rango\ A'=2<n^o\ \ incóg.\Rightarrow Compatible\ \ in\det er\min ado}}$$

Resolvemos para $\begin{Bmatrix} a\neq 2\\ a\neq -2\end{Bmatrix}$, que es compatible determinado, aplicando la regla de Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix}-1 & 1 & a\\ 2 & a & -1\\ 2 & -2 & a^2\end{vmatrix}}{a^2-4}=\frac{-a^3-4a-2-2a^2+2-2a^2}{a^2-4}=\frac{-a^3-4a^2-4a}{a^2-4}=\frac{-a\left(a^2+4a+4\right)}{a^2-4}=$$

$$=\frac{-a(a+2)^2}{(a+2)(a-2)}=\underline{\underline{\frac{-a(a+2)}{a-2}}}=x.$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix}2 & -1 & a\\ -1 & 2 & -1\\ 2a & 2 & a^2\end{vmatrix}}{a^2-4}=\frac{4a^2-2a+2a-4a^2+4-a^2}{a^2-4}=\frac{-a^2+4}{a^2-4}=\underline{\underline{-1=y}}.$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix}2 & 1 & -1\\ -1 & a & 2\\ 2a & -2 & 2\end{vmatrix}}{a^2-4}=\frac{4a-2+4a+2a^2+8+2}{a^2-4}=\frac{2a^2+8a+8}{a^2-4}=\frac{2\left(a^2+4a+4\right)}{a^2-4}=\frac{2(a+2)^2}{(a+2)(a-2)}=$$

$$=\underline{\underline{\frac{2(a+2)}{a-2}}}=z.$$

Resolvemos para α = -2; el sistema es $\begin{cases}2x+y-2z=-1\\ -x-2y-z=2\\ -4x-2y+4z=2\end{cases}$, que es compatible indeterminado y equivalente al sistema:

$\begin{cases} 2x+y-2z=-1 \\ -x-2y-z=2 \\ 2x+y-2z=-1 \end{cases}$, que también es equivalente al sistema $\begin{cases} 2x+y-2z=-1 \\ -x-2y-z=2 \end{cases}$.

Parametrizando $\underline{z=\lambda}$:

$$\left.\begin{array}{l} 2x+y=-1+2\lambda \\ -x-2y=2+\lambda \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} 4x+2y=-2+4\lambda \\ -x-2y=2+\lambda \end{array}\right\} \Rightarrow 3x=5\lambda \;;;\; \underline{x=\tfrac{5}{3}\lambda} \;;;\; 2x+y=-1+2\lambda \;;;$$

$$y=-1+2\lambda-2x=-1+2\lambda-\tfrac{10}{3}\lambda=\underline{-1-\tfrac{4}{3}\lambda=y}.$$

$$\underline{\underline{Solución:\left\{\begin{array}{l} x=\tfrac{5}{3}\lambda \\ y=-1-\tfrac{4}{3}\lambda \\ z=\lambda \end{array}\right\},\ \forall\lambda\in R}}$$

****

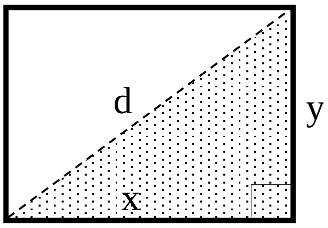
2º) a) De entre todos los rectángulos de perímetro 16 cm, determina las dimensiones del rectángulo que tiene la diagonal menor. Calcular la medida de dicha diagonal.

b) Calcula el valor de $a \in R,\ a > 0$, para que el área de la región plana encerrada entre la parábola $y = x^2$ y la recta $y = a$ sea igual a $\frac{4}{3}$ unidades de superficie.

----

a)

Sabemos que $2x + 2y = 16$;; $x + y = 8$;; $\underline{y = 8 - x}$.



Del triángulo rectángulo sombreado de la figura, aplicando el teorema de Pitágoras:

$$d^2 = x^2 + y^2 = x^2 + (8 - x)^2 = x^2 + 64 - 16x + x^2 = 2x^2 - 16x + 64 \ ;;$$

$$d = \sqrt{2(x^2 - 8x + 32)} = \underline{\sqrt{2}\sqrt{x^2 - 8x + 32}}\ .$$

Para que la diagonal sea mínima, su derivada tiene que ser cero:

$$d' = \sqrt{2} \cdot \frac{2x - 8}{2\sqrt{x^2 - 8x + 32}} = \sqrt{2} \cdot \frac{x - 4}{\sqrt{x^2 - 8x + 32}} = 0 \Rightarrow \frac{x - 4}{\sqrt{x^2 - 8x + 32}} = 0 \ ;;\ x - 4 = 0 \ ;;\ \underline{x = 4}\ .$$

Vamos a justificar que se trata de un mínimo:

$$d' = \sqrt{2} \cdot \frac{x - 4}{\sqrt{x^2 - 8x + 32}} \Rightarrow d'' = \sqrt{2} \cdot \frac{1 \cdot \sqrt{x^2 - 8x + 32} - (x - 4) \cdot \frac{2x - 8}{2\sqrt{x^2 - 8x + 32}}}{\left(\sqrt{x^2 - 8x + 32}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{x^2 - 8x + 32} - \frac{(x - 4)^2}{\sqrt{x^2 - 8x + 32}}}{x^2 - 8x + 32} = \sqrt{2} \cdot \frac{x^2 - 8x + 32 - (x^2 - 8x + 16)}{(x^2 - 8x + 32)\sqrt{x^2 - 8x + 32}} =$$

$$= \sqrt{2} \cdot \frac{x^2 - 8x + 32 - x^2 + 8x - 16}{(x^2 - 8x + 32)\sqrt{x^2 - 8x + 32}} = \underline{\frac{16\sqrt{2}}{(x^2 - 8x + 32)\sqrt{x^2 - 8x + 32}} = d''}$$

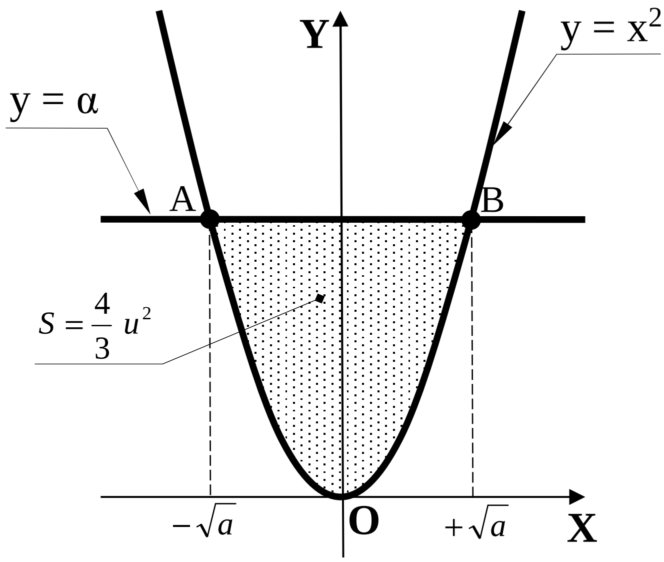
$$d''(2) = \frac{16\sqrt{2}}{(4 - 16 + 32)\sqrt{4 - 16 + 32}} = \frac{16\sqrt{2}}{20\sqrt{20}} = \frac{4\sqrt{2}}{5 \cdot 2\sqrt{5}} > 0 \Rightarrow \underline{\textit{Mínimo, c. q. j.}}$$

Para x = 4 el valor de y es y = 8 – 4 = <u>4 = y</u>.

El valor de la diagonal es $d(2) = \sqrt{2}\sqrt{4^2 - 8 \cdot 4 + 32} = \underline{\underline{4\sqrt{2}\ \textit{unidades} = d}}$.

$$\underline{\underline{\textit{El "rectángulo" es un cuadrado de lado 4 unidades.}}}$$

b)



Los puntos de corte A y B de las dos funciones, tienen como abscisas las soluciones del sistema formado por ambas, que son las siguientes:

$$\left.\begin{array}{l} y = x^2 \\ y = a \end{array}\right\} \Rightarrow x^2 = a \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \underline{x_1 = -\sqrt{a}} \rightarrow \underline{A\left(-\sqrt{a},\ a\right)} \\ \underline{x_2 = +\sqrt{a}} \rightarrow \underline{B\left(\sqrt{a},\ a\right)} \end{array}\right. .$$

Por la simetría de la curva con respecto al eje de ordenadas, se tiene:

$$S = 2 \cdot \int_0^{\sqrt{a}} \left(a - x^2\right) \cdot dx = 2 \cdot \left[ax - \frac{x^3}{3}\right]_0^{\sqrt{a}} = \frac{4}{3}\, u^2 \ ;;\ 6 \cdot \left[\left(a\sqrt{a} - \frac{a\sqrt{a}}{3}\right) - 0\right] = 4 \ ;;$$

$$3 \cdot \frac{2a\sqrt{a}}{3} = 2 \ ;;\ a\sqrt{a} = 1 \Rightarrow \underline{\underline{a = 1\, u}}\ .$$

****

3º) Los puntos A(1, 3, 1) y B(2, 1, 3) son dos vértices consecutivos de un cuadrado. Los otros dos vértices del cuadrado pertenecen a una recta r que pasa por el punto P(2, 7, 0).

a) Calcula la ecuación de la recta r.

b) Determina la ecuación general del plano π que contiene al cuadrado.

c) Calcula las coordenadas de los otros dos vértices del cuadrado.

----

a)

Los puntos A(1, 3, 1) y B(2, 1, 3) determinan el vector $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB} = B - A = (1,\ -2,\ 2)$, que es director de la recta r.

La recta r dada por unas ecuaciones paramétricas es $\underline{\underline{r \equiv \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 7 - 2\lambda \\ z = 2\lambda \end{cases}}}$.

b)

El plano pedido π también contiene a r y, por supuesto, a su punto P(2, 7, 0).

Los puntos A(1, 3, 1) y P(2, 7, 0) determinan el vector $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AP} = P - A = (1,\ 4,\ -1)$,

La ecuación general del plano π que contiene al cuadrado es la siguiente:

$$\pi(P;\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}) \equiv \begin{vmatrix} x-2 & y-7 & z \\ 1 & 4 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 0 \ ;;\ 8(x-2) - (y-7) - 2z - 4z - 2(x-2) - 2(y-7) = 0 \ ;;$$

$$6(x-2) - 3(y-7) - 6z = 0 \ ;;\ 2(x-2) - (y-7) - 2z = 0 \ ;;\ 2x - 4 - y + 7 - 2z = 0 .$$

$$\underline{\underline{\pi \equiv 2x - y - 2z + 3 = 0}}$$

c)

El haz β de planos perpendiculares a la recta r tiene por expresión general la siguiente: $\beta \equiv x - 2y + 2z + D = 0$.

De los infinitos planos β el plano β_1 que contiene al punto B(2, 1, 3) es el que satisface su ecuación:

$$\left.\begin{array}{l} \beta \equiv x - 2y + 2z + D = 0 \\ B(2,\ 1,\ 3) \end{array}\right\} \Rightarrow 2 - 2 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + D = 0 \ ;;\ 2 - 2 + 6 + D = 0 \ ;;\ 6 + D = 0 \ ;;\ \underline{D = -6} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{\beta_1 \equiv x - 2y + 2z - 6 = 0} .$$

El vértice C es la intersección de la recta r con el plano β_1:

$$\left.\begin{array}{l}\beta_1 \equiv x-2y+2z-6=0 \\ r \equiv \begin{cases} x=2+\lambda \\ y=7-2\lambda \\ z=2\lambda \end{cases}\end{array}\right\} \Rightarrow (2+\lambda)-2(7-2\lambda)+2\cdot 2\lambda-6=0 \;;;\; 2+\lambda-14+4\lambda+4\lambda-6=0 \;;;$$

$$9\lambda-18=0 \;;;\; \lambda-2=0 \;;;\; \underline{\lambda=2} \;\Rightarrow\; \underline{\underline{C(4,\ 3,\ 4)}}.$$

El último vértice D puede obtenerse de forma similar al C, obteniendo un segundo plano β_2 perteneciente a β que contenga al punto A; sin embargo lo vamos a obtener mediante vectores.

De la igualdad de los vectores $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$:

$$\overrightarrow{AB}=C-D \Rightarrow (1,\ -2,\ 2)=(4,\ 3,\ 4)-(x,\ y,\ z)=(4-x,\ 3-y,\ 4-z) \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} 4-x=1 \\ 3-y=-2 \\ 4-z=2 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=4-1=3 \\ y=3+2=5 \\ z=4-2=2 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{\underline{D(3,\ 5,\ 2)}}.$$

****

OPCIÓN 2

1º) a) Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, determina la matriz B que verifica $A+B=A\cdot B$.

b) Sea M una matriz cuadrada tal que $\det(M)=-1$ y $\det[(-2)\cdot M]=8$. Calcula el tamaño de la matriz M.

----

a)

Sea la matriz $B=\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$.

$$A+B=A\cdot B \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \;;;\; \begin{pmatrix} 1+x & -1+y \\ 2+z & 1+t \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x-z & y-t \\ 2x+z & 2y-t \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} 1+x=x-z \\ 2+z=2x+z \end{array} \right\} \\ \left\{ \begin{array}{l} -1+y=y-t \\ 1+t=2y-t \end{array} \right\} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} 1=-z \\ 2=2x \end{array} \right\} \\ \left\{ \begin{array}{l} -1=-t \\ 2t-2y=1 \end{array} \right\} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} x=1 \\ z=-1 \\ t=1 \\ y=\frac{1}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{\underline{B=\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ -1 & 1 \end{pmatrix}}}.$$

b)

Sabiendo que el producto de una matriz por un número es la matriz que resulta de multiplicar todos y cada uno de los elementos de la matriz por el número; si la matriz cuadrada M es de orden n, será: $\det[(-2)\cdot M]=(-2)^n\cdot\det(M)$.

$$|(-2)M|=(-2)^n\cdot|M| \Rightarrow 8=(-2)^n\cdot(-1) \Rightarrow \underline{n=3}.$$

<u>La matriz M es de orden 3.</u>

****

2º) a) Considera la función $f(x)=\frac{ax^2+bx+c}{x^2-4}$. Halla α, b y c para que la gráfica de la función f tenga como asíntota horizontal la recta $y=-1$ y un mínimo en P(0, 1).

b) Estudia si la función $g(x)=\begin{cases} -x^2+1 & si\ \ x<0 \\ 1 & si\ \ x\geq 0 \end{cases}$ es derivable en x = 0.

c) ¿Cuántos puntos de inflexión puede tener como máximo una función polinómica de grado cuatro?

----

a)

Sabiendo que las asíntotas horizontales de un función son de la forma y = k siendo $k=\lim_{x\to\infty} f(x)$, de donde se deduce que:

$$-1=\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{ax^2+bx+c}{x^2-4}\ \Rightarrow\ \underline{\underline{a=-1}}.$$

La función es $f(x)=\frac{-x^2+bx+c}{x^2-4}$, que contiene al punto P(0, 1) → f(0) = 1:

$f(0)=1\ \Rightarrow\ \frac{c}{-4}=1\ \Rightarrow\ \underline{\underline{c=-4}}$. La función es $f(x)=\frac{-x^2+bx-4}{x^2-4}$.

Para que una función tenga un mínimo es condición necesaria que se anule su derivada en ese punto:

$$f'(x)=\frac{(-2x+b)\cdot(x^2-4)-(-x^2+bx-4)\cdot 2x}{(x^2-4)^2}=\frac{-2x^3+8x+bx^2-4b+2x^3-2bx^2+8x}{(x^2-4)^2}=$$

$$=\underline{\frac{-bx^2+16x-4b}{(x^2-4)^2}}=f'(x).$$

$f'(0)=0\ \Rightarrow\ \frac{-4b}{(-4)^2}=0\ \Rightarrow\ \underline{\underline{b=0}}$. La función, finalmente, resulta: $\underline{\underline{f(x)=\frac{-x^2-4}{x^2-4}}}$.

Considera la función $f(x)=\frac{ax^2+bx+c}{x^2-4}$. Halla α, b y c para que la gráfica de la función f tenga como asíntota horizontal la recta $y=-1$ y un mínimo en P(0, 1).

b)

Para que una función sea derivable en un punto es condición necesaria que sea continua en ese punto.

Para que g(x) sea continua para x = 0 tiene que cumplirse que los límites por la izquierda y por la derecha sean iguales, e igual al valor de la función en ese punto:

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to 0^-} g(x) = \lim_{x \to 0} \left(-x^2+1\right) = 1 \\ \lim_{x \to 0^+} g(x) = \lim_{x \to 0} 1 = g(0) = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{\lim_{x \to 0^-} g(x) = \lim_{x \to 0^+} g(x) = f(0)}.$$

<u>La función g(x) es continua en x = 0</u>.

Una función es derivable en un punto si, y solo si, existen la derivada por la izquierda y la derivada por la derecha en ese punto y además, son iguales.

$$g'(x) = \begin{cases} -2x & si \;\; x<0 \\ 0 & si \;\; x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'\left(0^-\right) = \underline{0} \\ f'\left(0^+\right) = \underline{0} \end{cases} \Rightarrow \underline{f'\left(0^-\right) = f'\left(0^+\right)}.$$

<u>La función g(x) es derivable para x = 0.</u>

c)

Una función tiene un punto de inflexión cuando se anula su segunda derivada y es distinta de cero la tercera derivada para los valores que anulan la segunda.

La segunda derivada de una función polinómica de grado cuatro es otra función polinómica de segundo grado, que igualada a cero tiene, como máximo dos soluciones diferentes, por lo cual:

<u>Una función polinómica de grado cuatro tiene, como máximo, dos puntos de inflexión.</u>

****

3º) Considera la recta $r \equiv \frac{x-5}{-1} = y-2 = z$ y sea s la recta que pasa por los puntos $A(1,\ 6,\ 6)$ y $B(4,\ c,\ 5)$.

a) Determina el valor del parámetro c para que las rectas r y s se corten. Halla el punto de corte P.

b) Calcula la ecuación general del plano π que contiene a las rectas r y s.

c) Halla el coseno del ángulo α que forman las rectas r y s. (Si no has determinado el valor del parámetro c, calcula $\cos\alpha$ en función de c).

----

a)

Los puntos A y B determinan el vector $\vec{v} = \overrightarrow{AB} = B - A = (3,\ c-6,\ -1)$, que es director de la recta s, cuya expresión por unas ecuaciones continuas es la siguiente:

$$s \equiv \frac{x-1}{3} = \frac{y-6}{c-6} = \frac{z-6}{-1} \ ;;\ \begin{cases} (c-6)x - c + 6 = 3y - 18 \\ -x + 1 = 3z - 18 \end{cases} \Rightarrow \underline{s \equiv \begin{cases} (c-6)x - 3y = c - 24 \\ x + 3z = 19 \end{cases}}.$$

La expresión de la recta r por unas ecuaciones continuas es la siguiente:

$$r \equiv \frac{x-5}{-1} = y-2 = z \ ;;\ \begin{cases} x-5 = -y+2 \\ x-5 = -z \end{cases} \Rightarrow \underline{r \equiv \begin{cases} x+y=7 \\ x+z=5 \end{cases}}.$$

Las rectas r y s determinan el sistema $\begin{cases} x+y=7 \\ x+z=5 \\ (c-6)x - 3y = c-24 \\ x+3z=19 \end{cases}$, que tiene solución única, según nos dice el enunciado. El teorema de Rouché-Fröbenius dice que cuando un sistema es compatible determinado ambas matrices tienen igual rango, que coincide con el número de incógnitas, en este caso tres. Lo anterior implica que la matriz ampliada tiene que tener su determinante de valor cero, de lo contrario tendría rango cuatro y el sistema no sería compatible determinado.

La matriz ampliada es $M' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 7 \\ 1 & 0 & 1 & 5 \\ c-6 & -3 & 0 & c-24 \\ 1 & 0 & 3 & 19 \end{pmatrix}$.

$$|M'| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 7 \\ 1 & 0 & 1 & 5 \\ c-6 & -3 & 0 & c-24 \\ 1 & 0 & 3 & 19 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \{C_4 \to C_4 - 3C_2\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 7 \\ 1 & 0 & 1 & 5 \\ c-6 & -3 & 0 & c-24 \\ -2 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$=-\begin{vmatrix} 1 & 1 & 7 \\ c-6 & -3 & c-24 \\ -2 & 0 & 4 \end{vmatrix} \Rightarrow \{C_2 \to C_2+3C_1\} \Rightarrow -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 7 \\ c-3 & 0 & c-3 \\ -2 & 0 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c-3 & c-3 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 2(c-3)\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$=2(c-3)\cdot(2+1)=6(c-3)=0 \Rightarrow \underline{\underline{c=3}}.$$

Para determinar el punto de corte resolvemos un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas del sistema de cuatro ecuaciones que determinan las rectas, por ejemplo, el sistema $\begin{cases} x+y=7 \\ x+z=5 \\ x+3z=19 \end{cases} \Rightarrow 5-z=19-3z \;;;\; 2z=14 \;;;\; \underline{z=7}.\; \underline{x=-2}.\; \underline{y=9}.$

<u>El punto de corte es P(-2, 9, 7).</u>

b)

Los vectores directores de las rectas son $\overrightarrow{v_r}=(-1,\ 1,\ 1)$ y $\overrightarrow{v_s}=(3,\ -3,\ -1)$

La expresión general del plano π que contiene a r y s es la siguiente:

$$\pi\left(P;\ \overrightarrow{v_r},\ \overrightarrow{v_s}\right) \equiv \begin{vmatrix} x+2 & y-9 & z-7 \\ -1 & 1 & 1 \\ 3 & -3 & -1 \end{vmatrix} = 0 \;;;$$

$$-(x+2)+3(y-9)+3(z-7)-3(z-7)+3(x+2)-(y-9)=0 \;;;\; 2(x+2)+2(y-9)=0 \;;;$$

$$(x+2)+(y-9)=0 \;;;\; x+2+y-9=0 \Rightarrow \underline{\underline{\pi \equiv x+y-7=0}}.$$

c)

El ángulo que forman dos rectas es el menor ángulo que forman sus vectores directores.

Por definición de producto escalar de dos vectores:

$$\overrightarrow{v_r}\cdot\overrightarrow{v_s}=\left|\overrightarrow{v_r}\right|\cdot\left|\overrightarrow{v_s}\right|\cdot\cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha=\frac{\overrightarrow{v_r}\cdot\overrightarrow{v_s}}{\left|\overrightarrow{v_r}\right|\cdot\left|\overrightarrow{v_s}\right|}=\frac{(-1,\ 1,\ 1)(3,\ -3,\ -1)}{\sqrt{(-1)^2+1^2+1^2}\cdot\sqrt{3^2+(-3)^2+(-1)^2}}=$$

$$=\frac{-3-3-1}{\sqrt{1+1+1}\cdot\sqrt{9+9+1}}=\frac{-7}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{19}}=\frac{-7}{\sqrt{57}} \Rightarrow \cos\alpha=\left|\frac{-7}{\sqrt{57}}\right|=\frac{7}{7'5498}=0'9272 \Rightarrow \underline{\alpha=22^{\circ}\ 0'\ 6''}$$

<u>Las rectas r y s forman un ángulo de 22º 0’ 6’’.</u>

****