# PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

# UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

# SEPTIEMBRE - 2012

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II — Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

1.- Debe escogerse una sola de las opciones.

2.- Debe exponerse con claridad el planteamiento de la respuesta o el método utilizado para su resolución. Todas las respuestas deben ser razonadas.

3.- No se permite el uso de calculadoras gráficas ni programables. Tampoco está permitido el uso de dispositivos con acceso a internet.

## OPCIÓN 1

1º) Considera la matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m & m^2 & m^2 \\ m & m & m^2 \end{pmatrix}$ con $m \in R$.

a ) Halla para qué valores del parámetro m la matriz A es regular (inversible).

b ) Estudia para qué valores del parámetro m el sistema $A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ tiene solución.

c ) Para m = 1, calcula las soluciones del sistema dado en el apartado anterior.

----------

a )

Una matriz es regular o inversible cuando su determinante es distinto de cero.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m & m^2 & m^2 \\ m & m & m^2 \end{vmatrix} = m^2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & m & m \\ 1 & 1 & m \end{vmatrix} = m^2 \cdot \left(m^2 + 1 + m - m - m - m\right) = m^2 \cdot \left(m^2 - 2m + 1\right) =$$

$$= m^2 \cdot (m-1)^2 = 0 \Rightarrow \underline{m_1 = 0} \;;;\; \underline{m_2 = 1}.$$

$$\underline{\underline{A \text{ es inversible } \forall m \in R,\ m \neq 0,\ m \neq 1}}$$

b )

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m & m^2 & m^2 \\ m & m & m^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left. \begin{array}{r} x+y+z=1 \\ mx+m^2y+m^2z=1 \\ mx+my+m^2z=1 \end{array} \right\} .$$

La matriz ampliada es $A'=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ m & m^2 & m^2 & 1 \\ m & m & m^2 & 1 \end{pmatrix}$.

$$\underline{\underline{Para \left\{ \begin{array}{l} m \neq 0 \\ m \neq 1 \end{array} \right\} \Rightarrow Rango \;\; A = Rango \;\; A' = 3 = n^o \;\; incóg. \Rightarrow Compatible \;\; \mathrm{det}er\,\mathrm{min}\,ado}}$$

Para m = 0 es: $\left\{ \begin{array}{l} A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \right\} \Rightarrow Rango \;\; A = 1 \;;; \; Rango \;\; A' = 2 \Rightarrow \underline{Incompatible}$.

Para m = 1 es :

$$\left\{ \begin{array}{l} A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \right\} \Rightarrow Rango \;\; A = Rango \;\; A' = 1 \Rightarrow \underline{\underline{Compatible \;\; in\,\mathrm{det}\,er\,\mathrm{min}\,ado}} .$$

c )

Para m = 1 el sistema resulta $x+y+z=1\}$.

Por ser el rango de las matrices de coeficientes y ampliada uno y tener tres incógnitas, el sistema tiene dos grados de libertad, es decir, que las soluciones dependen de dos parámetros; por ejemplo, haciendo x = λ e y = γ, las soluciones son:

$$\underline{\underline{\left. \begin{array}{l} x = \lambda \\ y = \gamma \\ z = 1 - \lambda - \gamma \end{array} \right\}, \; \forall \lambda, \; \gamma \in R}}$$

**********

2º) Considera la función $f(x)=\left|x^2-1\right|$.

a ) Estudia la derivabilidad de la función f.

b ) Calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f. Dibuja su gráfica.

c ) Calcula el área de la región limitada por la gráfica de la función f, el eje de abscisas (y = 0) y las rectas verticales x = -1 y x = 1.

----------

a )

La función $f(x)=\left|x^2-1\right|$ puede redefinirse de la forma $f(x)=\begin{cases} -x^2+1 & si\ \left|x\right|<1 \\ x^2-1 & si\ \left|x\right|\geq 1 \end{cases}$.

Para que una función sea derivable en un punto es condición necesaria que sea continua en ese punto.

La función es continua en R, excepto para el valor $\left|x\right|=1$ cuya continuidad es dudosa; se estudia a continuación.

Para que la función f(x) sea continua para $\left|x\right|=1$ es necesario que esté definida en esos puntos; que sus límites laterales sean iguales y coincidan con el valor de la función.

$$x=-1 \Rightarrow \left.\begin{cases} \lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -1} \left(-x^2+1\right) = \underline{0} \\ \lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -1} \left(x^2-1\right) = f(1) = \underline{0} \end{cases}\right\} \Rightarrow$$ La función $f(x)=\left|x^2-1\right|$ es continua en x = -1.

$$x=1 \Rightarrow \left.\begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} \left(-x^2+1\right) = \underline{0} \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} \left(x^2-1\right) = f(1) = \underline{0} \end{cases}\right\} \Rightarrow$$ La función $f(x)=\left|x^2-1\right|$ es continua en x = 1.

Una función es derivable en un punto cuando sus derivadas por la izquierda y por la derecha son iguales.

$$f'(x)=\begin{cases} -2x & si\ \left|x\right|<1 \\ 2x & si\ \left|x\right|\geq 1 \end{cases}.$$

$$x=-1 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} f'\left(-1^-\right) = -2\cdot(-1) = \underline{2} \\ f'\left(-1^+\right) = 2\cdot(-1) = \underline{-2} \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{\underline{La\ \ función\ \ f(x)=\left|x^2-1\right|\ \ no\ \ es\ \ derivable\ \ para\ \ x=-1}}.$$

$$x = 1 \Rightarrow \left. \begin{array}{l} f'(1^-) = -2 \cdot 1 = \underline{-2} \\ f'(1^+) = 2 \cdot 1 = \underline{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{\underline{\textit{La función } f(x) = \left| x^2 - 1 \right| \textit{ no es derivable para } x = 1}}.$$

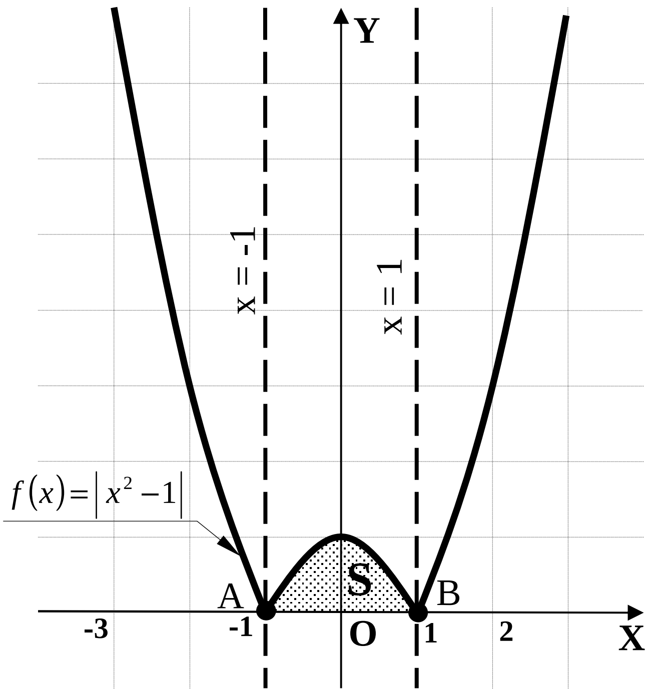
b )

Teniendo en cuenta la función derivada $f'(x) = \begin{cases} -2x & si \ |x| < 1 \\ 2x & si \ |x| \geq 1 \end{cases}$, los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f(x) son los siguientes:

$$f'(x) < 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} x < -1 \\ 0 < x < 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{\underline{\textit{Decrecimiento}: (-\infty, -1) \cup (0, 1)}}$$

$$f'(x) > 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} -1 < x < 0 \\ x > 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{\underline{\textit{Crecimiento}: (-1, 0) \cup (1, +\infty)}}$$

La representación gráfica, aproximada, de la función f(x) es la que aparece en la figura siguiente.




Nótese que la función f(x) es simétrica con respecto al eje de ordenadas.

c )

Considerando la simetría de la función, la superficie a calcular es la siguiente:

$$S = 2 \cdot \int_0^1 f(x) \cdot dx = 2 \cdot \int_0^1 (-x^2 + 1) \cdot dx = 2 \cdot \left[ -\frac{x^3}{3} + x \right]_0^1 = 2 \cdot \left[ \left( -\frac{1^3}{3} + 1 \right) - 0 \right] = 2 \cdot \frac{2}{3} = \underline{\underline{\frac{4}{3}}} u^2 .$$

**********

3º) Considera los puntos A(1, 1, -1), B(0, 3, 1) y C(2, m - 2, -3).

a ) Determina para qué valor del parámetro m los tres puntos A, B y C están alineados y calcula las ecuaciones paramétricas de la recta que los contiene.

b ) Determina los valores del parámetro m para los que el área del triángulo de vértices A, B y C es igual a $\frac{\sqrt{5}}{2}$ unidades de superficie.

c ) Para m = 0, calcula la ecuación general del plano que contiene a los puntos A, B y C.

----------

a )

Los puntos A, B y C estarán alineados cuando los vectores $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ y $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ sean linealmente dependientes.

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB} = B - A = (0,\ 3,\ 1) - (1,\ 1,\ -1) = (-1,\ 2,\ 2).$$

$$\vec{v} = \overrightarrow{AC} = C - A = (2,\ m-2,\ -3) - (1,\ 1,\ -1) = (1,\ m-3,\ -2).$$

Los vectores $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ y $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ serán linealmente dependientes cuando sus componentes sean proporcionales:

$$\frac{-1}{1} = \frac{2}{m-3} = \frac{2}{-2} \Rightarrow m - 3 = -2 \ ;; \ \underline{m = 1}.$$

Los puntos A, B y C están alineados cuando m = 1.

Unas ecuaciones paramétricas de la recta que contiene a los puntos A, B y C es:

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = 1 + 2\lambda \\ z = -1 + 2\lambda \end{cases}$$

b )

El área del triángulo es la mitad del área del paralelogramo que determinan los vectores $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ y $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$. Debe saberse que el área del paralelogramo es igual que el módulo del producto vectorial de los vectores que lo determinan, por lo tanto:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot \left(\vec{u} \wedge \vec{v}\right) = \frac{\sqrt{5}}{2} \Rightarrow \begin{Vmatrix} i & j & k \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & m-3 & -2 \end{Vmatrix} = \sqrt{5} \ ;;$$

$$|-4i + 2j - (m-3)k - 2k - 2j - 2(m-3)i| = \sqrt{5} \ ;; \ |(2-2m)i + (1-m)k| = \sqrt{5} \ ;; \ (2-2m)^2 + (1-m)^2 = 5 \ ;;$$

$4-8m+4m^2+1-2m+m^2=5\ ;;\ 5m^2-10m=0\ ;;\ m^2-2m=0\ ;;\ m(m-2)=0 \Rightarrow \underline{m_1=0}\ ;;\ \underline{m_2=2}$.

<u>El área del triángulo ABC tendrá la superficie pedida para m = 0 y para m = 2.</u>

c )

Para m = 0 el vector $\overrightarrow{v}=\overrightarrow{AC}$ es $\overrightarrow{v}=\overrightarrow{AC}=(1,\ -3,\ -2)$.

La ecuación general del plano π que contiene a los puntos A, B y C la determinan uno cualquiera de los puntos (por ejemplo B) y los vectores $\overrightarrow{u}=\overrightarrow{AB}$ $y$ $\overrightarrow{v}=\overrightarrow{AC}$:

$$\pi(B;\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}) \equiv \begin{vmatrix} x & y-3 & z-1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & -3 & -2 \end{vmatrix} = 0\ ;;\ -4x+2(y-3)+3(z-1)-2(z-1)+6x-2(y-3)=$$

$2x+(z-1)=0 \Rightarrow \underline{\underline{\pi \equiv 2x+z-1=0}}$.

**********

OPCIÓN 2

1º) Considera las matrices $A=\begin{pmatrix} x & y \\ y & z \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix} -4 & -12 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

a ) Determina la matriz A que verifica: det (A) = -7 y A · B = C.

b ) Sean A, B y C las matrices dadas arriba y que verifican las condiciones del apartado anterior. Decide cuál de las siguientes igualdades se cumple. Justifica tu respuesta.

$b1)\quad A=C\cdot B^{-1}$ $\qquad b2)\quad B=A^{-1}\cdot C$ $\qquad b3)\quad A^{-1}=B\cdot C^{-1}$

----------

a )

$$|A|=\begin{vmatrix} x & y \\ y & z \end{vmatrix}=-7\ ;;\ \underline{xz-y^2=-7}. \qquad (1)$$

$$A\cdot B=C \Rightarrow \begin{pmatrix} x & y \\ y & z \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -4 & -12 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\ ;;\ \begin{pmatrix} 2x-y & 6x-3y \\ 2y-z & 6y-3z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -4 & -12 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2x-y=-4 \\ 6x-3y=-12 \\ 2y-z=1 \\ 6y-3z=3 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{ Equivalente al sistema } \left.\begin{array}{l} 2x-y=-4 \\ 2y-z=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{x=\frac{y-4}{2}}\ ;;\ \underline{z=2y-1}.$$

Sustituyendo en (1) los valores obtenidos en función de y:

$$xz-y^2=-7 \Rightarrow \frac{y-4}{2}\cdot(2y-1)-y^2=-7\ ;;\ 2y^2-y-8y+4-2y^2=-14\ ;;\ -9y-18=0\ ;;$$

$$y-2=0 \Rightarrow \underline{y=2}. \qquad Para\ \underline{y=2} \Rightarrow \underline{x=-1}\ ;;\ \underline{z=3} \Rightarrow \underline{\underline{A_1=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}}}.$$

b )

$b1)\quad A=C\cdot B^{-1}$.

$B=\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}\ ;;\ |B|=\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ -1 & -3 \end{vmatrix}=-6+6=0 \Rightarrow$ B no es inversible; $\underline{\underline{b_1 \text{ no se cumple}}}$.

$b2)\quad B=A^{-1}\cdot C$.

$$A=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\ ;;\ |A|=-7\ ;;\ A^T=A=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\ ;;\ Adj.\ A^t=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{A^{-1}=-\frac{1}{7}\cdot\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}}.$$

$$B = A^{-1} \cdot C = -\frac{1}{7} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 & -12 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = -\frac{1}{7} \cdot \begin{pmatrix} -14 & -42 \\ 7 & 21 \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} = B} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ <u>$b_2$ si se cumple.</u>

$b3)\quad A^{-1} = B \cdot C^{-1}$

$C = \begin{pmatrix} -4 & -12 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ ;; $|C| = \begin{vmatrix} -4 & -12 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -12 + 12 = 0 \Rightarrow$ C no es inversible; <u>$b_3$ no se cumple</u>.

**********

2º) a ) Considera la función $g(x)=\frac{ax^2+b}{x-1}$, definida para $x\neq 1$.

a1 ) Calcula los valores de α y b para que la gráfica de g pase por el punto P(2, 2) y tenga una asíntota oblicua de pendiente 1.

a2 ) Para α = 1 y b = 1, calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de g en el punto de abscisa x = -1.

b ) Determina si la función $f(x)=x\cdot|x|$ es derivable en x = 0.

----------

a )

a1 ) Por pasar por P(2, 2) es $g(2)=2 \Rightarrow 2=\frac{a\cdot 2^2+b}{2-1}=4a+b$ ;; $\underline{4a+b=2}$. (1)

Las asíntotas oblicuas son de la forma $y=mx+n$, siendo $m=\lim_{x\to\infty}\frac{g(x)}{x}$:

$$m=1=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{ax^2+b}{x-1}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{ax^2+b}{x^2-x}=1 \Rightarrow \underline{\underline{a=1}}.$$

Sustituyendo el valor de α = 1 en la expresión (1): $4+b=2$ ;; $\underline{\underline{b=-2}}$.

a2 )

Para α = 1 y b = 1 la función es $g(x)=\frac{x^2+1}{x-1}$.

El punto T de tangencia es: $g(-1)=\frac{(-1)^2+1}{-1-1}=\frac{1+1}{-2}=-1 \Rightarrow \underline{T(-1,\ -1)}$.

La pendiente de la tangente de una función en un punto es el valor de la derivada de la función en ese punto:

$$g'(x)=\frac{2x\cdot(x-1)-(x^2+1)\cdot 1}{(x-1)^2}=\frac{2x^2-2x-x^2-1}{(x-1)^2}=\frac{x^2-2x-1}{(x-1)^2}.$$

$$m=g'(-1)=\frac{(-1)^2-2\cdot(-1)-1}{(-1-1)^2}=\frac{1+2-1}{(-2)^2}=\frac{2}{4}=\underline{\frac{1}{2}=m}.$$

Sabiendo que la ecuación de la recta que pasa por un punto conocida la pendiente viene dada por la fórmula $y-y_0=m(x-x_0)$, la ecuación de la tangente pedida es:

$$y+1=\frac{1}{2}(x+1) \text{ ;; } 2y+2=x+1 \Rightarrow \underline{\underline{t\equiv x-2y-1=0}}.$$

b )

Teniendo en cuenta que $|x| = \begin{cases} -x & si \ \ x < 0 \\ x & si \ \ x \geq 0 \end{cases}$, la función $f(x) = x \cdot |x|$ puede redefinirse de la forma: $f(x) = \begin{cases} -x^2 & si \ \ x < 0 \\ x^2 & si \ \ x \geq 0 \end{cases}$.

Para que una función sea derivable en un punto es condición necesaria que sea continua en ese punto, por lo cual, estudiamos en primer lugar su continuidad.

Para que sea continua para x = 0 tiene que cumplirse que los límites por la izquierda y por la derecha sean iguales, e igual al valor de la función en ese punto:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \left(-x^2\right) = \underline{0} \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} x^2 = \underline{0 = f(0)} \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{f(x) \ es \ contínua \ \ para \ \ x = 0}.$$

Una función es derivable en un punto si, y solo si, existen la derivada por la izquierda y la derivada por la derecha en ese punto y además, son iguales.

$$f'(x) = \begin{cases} -2x & si \quad x < 0 \\ 2x & si \quad x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'\left(0^-\right) = \underline{0} \\ f'\left(0^+\right) = \underline{0} \end{cases} \Rightarrow \underline{\underline{f(x) \ \ es \ \ derivable \ \ para \ \ x = 0}}.$$

**********

3º) Considera la recta $r \equiv \begin{cases} 3x+2y-z-1=0 \\ x+y-1=0 \end{cases}$.

a ) Determina la ecuación de la recta s que corta perpendicularmente a la recta r y que pasa por el punto P(0, 2, 2).

b ) Halla el punto Q dado por la intersección de las rectas r y s.

c ) Calcula la ecuación general del plano π que contiene a las rectas r y s, y la ecuación de la recta $r_1$ perpendicular al plano π y que pasa por el punto Q.

----------

a, b )

Un vector director de la recta r es cualquiera que sea linealmente dependiente del producto vectorial de los vectores normales de los planos que la determinan, que son los siguientes: $\overrightarrow{n_1}=(3,\ 2,\ -1)$ y $\overrightarrow{n_2}=(1,\ 1,\ 0)$.

$$\overrightarrow{v_r}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}=-j+3k-2k+i=i-j+k \Rightarrow \underline{\overrightarrow{v_r}=(1,\ -1,\ 1)}.$$

El haz de planos paralelos β perpendiculares a la recta r viene dado por la ecuación general $\beta \equiv x-y+z+D=0$.

De los infinitos planos que constituyen el haz β, el plano α que contiene al punto P(0, 2, 2) es el que satisface su ecuación:

$$\left.\begin{array}{l} \beta \equiv x-y+z+D=0 \\ P(0,\ 2,\ 2) \end{array}\right\} \Rightarrow 0-2+2+D=0 \Rightarrow D=0 \Rightarrow \underline{\alpha \equiv x-y+z=0}.$$

La intersección de la recta r con el plano π determinan el punto Q, que es la solución del sistema que forman:

$$\left.\begin{array}{l} r \equiv \begin{cases} 3x+2y-z-1=0 \\ x+y-1=0 \end{cases} \\ \alpha \equiv x-y+z=0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} 3x+2y-z=1 \\ x+y=1 \\ x-y+z=0 \end{array}\right\} \rightarrow y=1-x \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 3x+2(1-x)-z=1 \\ x-(1-x)+z=0 \end{array}\right\} ;;$$

$$\left.\begin{array}{r} 3x+2-2x-z=1 \\ x-1+x+z=0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} x-z=-1 \\ 2x+z=1 \end{array}\right\} \Rightarrow 3x=0 \ ;;\ x=0 \ ;;\ y=1 \ ;;\ z=1 \Rightarrow \underline{\underline{Q(0,\ 1,\ 1)}}.$$

Los puntos P y Q determinan el vector director de la recta s pedida:

$\overrightarrow{v_s}=\overrightarrow{PQ}=Q-P=(0.\ 1,\ 1)-(0,\ 2,\ 2)=(0,\ -1,\ -1)$. La expresión de la recta r expresada por unas ecuaciones paramétricas es la siguiente:

$$s \equiv \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 - \lambda \\ z = 1 - \lambda \end{cases}$$

c )

La ecuación general del plano π que contiene a las rectas r y s la determinan los vectores directores de las rectas y su punto Q de corte:

$$\pi\left(Q;\ \overrightarrow{v_r},\ \overrightarrow{v_s}\right) \equiv \begin{vmatrix} x & y-1 & z-1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0\ ;;\ x - (z-1) + x + (y-1) = 0\ ;;\ 2x - z + 1 + y - 1 = 0\ .$$

$$\pi \equiv 2x + y - z = 0$$

El vector normal del plano π es $\overrightarrow{n} = (2,\ 1,\ -1)$. La recta $r_1$ expresada, por ejemplo, por su expresión vectorial, es la siguiente:

$$r_1 \equiv (x,\ y,\ x) = (0,\ 1,\ 1)) + \lambda(2,\ 1,\ -1)$$

**********