PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

JUNIO - 2012

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II   Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

1.- Debe escogerse una sola de las opciones.

2.- Debe exponerse con claridad el planteamiento de la respuesta o el método utilizado para su resolución. Todas las respuestas deben ser razonadas.

3.- No se permite el uso de calculadoras gráficas ni programables. Tampoco está permitido el uso de dispositivos con acceso a internet.

OPCIÓN 1

1º) Considera el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} x+y+2z=0 \\ x+ay+3z=1 \\ x+y+(2-a)z=a \end{cases}$, $a \in R$. Estúdialo para los distintos valores del parámetro α y resuélvelo cuando sea compatible (calculando todas sus soluciones).

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & a & 3 \\ 1 & 1 & 2-a \end{pmatrix} \text{ y } A'=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & a & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2-a & a \end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes A en función de α es el siguiente:

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & a & 3 \\ 1 & 1 & 2-a \end{vmatrix}=2a-\alpha^2+2+3-2a-3-2+a=-\alpha^2+a=0 \;;;\; a(1-a)=0 \Rightarrow \begin{cases} \underline{\alpha_1=0} \\ \underline{\alpha_2=1} \end{cases}.$$

$$Para \; \begin{rcases} a \neq 0 \\ a \neq 1 \end{rcases} \Rightarrow Rango\;\; A = Rango\;\; A' = 3 = n^o \;\; incóg. \Rightarrow Compatible \;\; \det er\min ado$$

$$Para\ \ a=0\ \Rightarrow\ A'=\begin{pmatrix}1&1&2&0\\1&0&3&1\\1&1&2&0\end{pmatrix}\Rightarrow\{F_1=F_3\}\Rightarrow\ \underline{Rango\ \ A'=2}.$$

$=15\neq 0\ \Rightarrow\ \underline{Rango\ \ M'=3}.$

$$\underline{\underline{Para\ \ a=0\Rightarrow Rango\ A=Rango\ A'=2<n^{o}\ \ incóg.\Rightarrow Compatible\ \ indeterminado}}$$

$$Para\ \ a=1\ es\ \ A'=\begin{pmatrix}1&1&2&0\\1&1&3&1\\1&1&1&1\end{pmatrix}\Rightarrow\{C_1,\ C_3,\ C_4\}\Rightarrow\begin{vmatrix}1&2&0\\1&3&1\\1&1&1\end{vmatrix}=3+2-1-2=2\neq 0\Rightarrow$$

$\Rightarrow\ \underline{Rango\ \ A'=3}$

$$\underline{\underline{Para\ \ a=1\Rightarrow Rango\ A=2\ ;;\ Rango\ A'=3\Rightarrow Incompatible}}$$

Resolvemos para $\begin{Bmatrix}a\neq 0\\a\neq 1\end{Bmatrix}$, que es compatible determinado, aplicando la regla de Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix}0&1&2\\1&a&3\\a&1&2-a\end{vmatrix}}{a(1-a)}=\frac{2+3a-2a^2-2+a}{a(1-a)}=\frac{-2a^2+4a}{a(1-a)}=\frac{2a(2-a)}{a(1-a)}=\underline{\underline{\frac{2(2-a)}{1-a}}}=x.$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix}1&0&2\\1&1&3\\1&a&2-a\end{vmatrix}}{a(1-a)}=\frac{2-a+2a-2-3a}{a(1-a)}=\frac{-2a}{a(1-a)}=\underline{\underline{\frac{-2}{1-a}}}=y.$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix}1&1&0\\1&a&1\\1&1&a\end{vmatrix}}{a(1-a)}=\frac{a^2+1-1-a}{a(1-a)}=\frac{a^2-a}{a(1-a)}=\frac{a(a-1)}{a(1-a)}=\underline{\underline{-1=z}}.$$

Resolvemos para α = 0; el sistema es $\begin{cases}x+y+2z=0\\x+3z=1\\x+y+2z=0\end{cases}$, que es compatible indeterminado y equivalente al sistema $\begin{cases}x+y+2z=0\\x+3z=1\end{cases}$. Parametrizando z = λ:

$\underline{x=1-3\lambda}$;; $y=-x-2z=-1+3\lambda-2\lambda=\underline{-1+\lambda=y}$.

$$\underline{\underline{Solución: \left\{\begin{array}{l} x=1-3\lambda \\ y=-1+\lambda \\ z=\lambda \end{array}\right\}, \ \forall\lambda\in R}}$$

****

2º) Considera la función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$.

a) Encuentra los valores de α, b y c de forma que la gráfica de la función f pase por el punto A(0, 1) y las rectas tangentes a la gráfica de f en los puntos de abscisa $x = 0$ y $x = 1$ sean ambas paralelas a la recta $y = 3x + 5$.

b) Para α > 0, b = 0 y c = 0, determina la función f tal que el área de la región limitada por su gráfica, el eje OX (recta y = 0) y las rectas x = 0 y x = 1 sea igual a 3 unidades de superficie.

----

a)

Por pasar por el punto A(0, 1) es $f(0) = 1 \Rightarrow \underline{\underline{c = 1}}$.

La recta $y = 3x + 5$ tiene de pendiente m = 3.

Teniendo en cuenta que la pendiente o tangente es la derivada de una función en un punto:

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b \Rightarrow \begin{cases} f'(0) = 3 \rightarrow \underline{\underline{b = 3}} \\ f'(1) = 3 \rightarrow 3 \cdot 1^2 + 2a \cdot 1 + 3 = 3 \;;\; 2a = -3 \;;\; \underline{\underline{a = -\frac{3}{2}}} \end{cases}.$$

b)

Para α > 0, b = 0 y c = 0 la función es $f(x) = x^3 + ax^2$, que tiene todas sus ordenadas positivas en el intervalo (0, 1), por lo cual y teniendo en cuenta el enunciado se deduce que: $S = \int_0^1 f(x) \cdot dx = 3$.

$$S = \int_0^1 \left(x^3 + ax^2\right) \cdot dx = 3 \;;\; \left[\frac{x^4}{4} + \frac{ax^3}{3}\right]_0^1 = 3 \;;\; \left(\frac{1}{4} + \frac{a}{3}\right) - 0 = 3 \;;\; 3 + 4a = 36 \;;\; \underline{a = \frac{33}{4}}.$$

La función pedida es $\underline{\underline{f(x) = x^3 + \frac{33}{4}x^2}}$.

****

3º) Considera el punto P(1, 0, 4) y el plano $\pi \equiv 2x - y + 3z = 0$.

a) Calcula la ecuación de la recta r perpendicular al plano π y que pasa por el punto P.

b) Determina el punto Q simétrico del punto P respecto del plano π.

c) Calcula la distancia del punto Q al plano π.

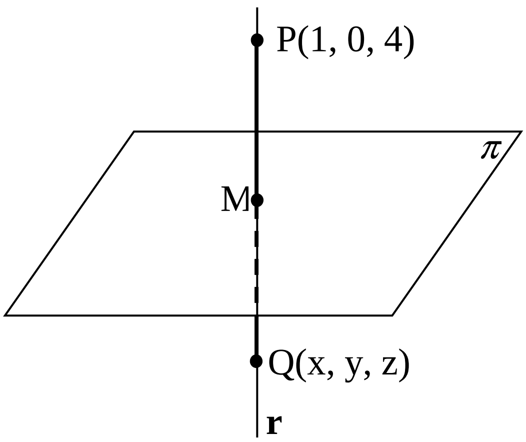
----

a)

Un vector normal del plano π es $\overrightarrow{n} = (2,\ -1,\ 3)$.

La ecuación de la recta r pedida, dada por unas ecuaciones paramétricas, es la siguiente: $\underline{\underline{r \equiv \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = -\lambda \\ z = 4 + 3\lambda \end{cases}}}$.

b)



El punto M, intersección del plano π con la recta r, tiene que satisfacer las ecuaciones de ambos, por lo cual:

$$\left.\begin{array}{l} \pi \equiv 2x - y + 3z = 0 \\ r \equiv \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = -\lambda \\ z = 4 + 3\lambda \end{cases} \end{array}\right\} \Rightarrow 2(1 + 2\lambda) + \lambda + 3(4 + 3\lambda) = 0 \ ;;$$

$$2 + 4\lambda + \lambda + 12 + 9\lambda = 0 \ ;; \ 14\lambda + 14 = 0 \Rightarrow \underline{\lambda = -1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{cases} x = 1 - 2 = -1 \\ y = 1 \\ z = 4 - 3 = 1 \end{cases}\right\} \Rightarrow \underline{M(-1,\ 1,\ 1)}.$$

Para que Q sea el punto simétrico de P con respecto a π, tiene que cumplirse que:

$$\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{MQ} \Rightarrow M - P = Q - M \ ;; \ (-1,\ 1,\ 1) - (1,\ 0,\ 4) = (x,\ y,\ z) - (-1,\ 1,\ 1) \ ;;$$

$$(-2,\ 1,\ -3) = (x + 1,\ y - 1,\ z - 1) \Rightarrow \left.\begin{cases} x + 1 = -2 \rightarrow \underline{x = -3} \\ y - 1 = 1 \rightarrow \underline{y = 2} \\ z - 1 = -3 \rightarrow \underline{z = -2} \end{cases}\right\} \Rightarrow \underline{\underline{Q(-3,\ 2,\ -2)}}.$$

c)

La distancia del punto $P_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$ al plano $\pi \equiv Ax + By + Cz + D = 0$ viene dada por la fórmula $d(P_0,\ \pi)=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$; aplicándola al caso que nos ocupa, es:

$$d(Q,\ \pi)=\frac{|2\cdot(-3)-1\cdot 2+3\cdot(-2)|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+3^2}}=\frac{|-6-2-6|}{\sqrt{4+1+9}}=\frac{|-14|}{\sqrt{14}}=\frac{14}{\sqrt{14}}=\underline{\underline{\sqrt{14}\ unidades}}\ .$$

****

OPCIÓN 2

1º) Considera las matrices $A=\begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 & 4 & -1 \\ 4 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, donde $a,\ b\in R$.

a) Determina para qué valores de α y b la matriz A es regular (inversible).

b) Determina para qué valores de α y b se cumple que $A=A^{-1}$.

c) Para α = 2 y b = 2, determina las matrices C que verifican $A\cdot C=B\cdot C$.

----

a)

Una matriz es regular o inversible cuando su determinante es distinto de cero.

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{vmatrix}=\underline{a\cdot b}.$$

$$\underline{\underline{A\ \ es\ \ inversible\ \ \forall a,\ b\in R,\ a\neq 0,\ b\neq 0}}$$

b)

Aplicando el método de Gauss-Jordan, la matriz inversa de A es la siguiente:

$$(A/I)=\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & a & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)\Rightarrow\{F_1\to F_1-F_2\}\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left\{\begin{matrix} F_2\to\frac{1}{a}F_2 \\ F_3\to\frac{1}{b}F_3 \end{matrix}\right\}\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{b} \end{array}\right)\Rightarrow\underline{A^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{b} \end{pmatrix}}.$$

$$A=A^{-1}\Rightarrow\begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{b} \end{pmatrix}\Rightarrow\underline{\underline{a=-1}}\ ;;\ \underline{\underline{b=1}}.$$

c)

Para α = 2 y b = 2 es $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

$$A\cdot C=B\cdot C\Rightarrow\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 4 & -1 \\ 4 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\ ;;\ \begin{pmatrix} x+2y \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4y-z \\ 4x-2y \\ 2z \end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+2y=4y-z \\ 2y=4x-2y \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} x-2y+z=0 \\ 4y-4x=0 \end{array}\right\} \rightarrow \underline{x=y} \Rightarrow x-2x+z=0 \;;\; \underline{x=z}.$$

Las matrices C pedidas son de la forma: $\underline{\underline{C=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},\ \forall x,\ y,\ z \in R,\ x=y=z}}.$

****

2º) a) De entre todos los números reales positivos x, y que suman 15, encuentra aquellos para los que el producto $P = x^2 y$ es máximo.

b) Determina si la función $f(x) = |x| - x$ es derivable en x = 0.

----

a) De entre todos los números reales positivos x, y que suman 15, encuentra aquellos para los que el producto $P = x^2 y$ es mínimo.

$$x + y = 15 \;;;\; \underline{y = 15 - x}\,.$$

$$P = x^2 \cdot y = x^2 \cdot (15 - x) = \underline{15x^2 - x^3}\,.$$

$$P' = 30x - 3x^2 \;;;\; P' = 0 \Rightarrow 30x - 3x^2 = 0 \;;;\; 3x(10 - x) = 0 \;\Rightarrow\; \begin{cases} \underline{x_1 = 0} \\ \underline{x_2 = 10} \end{cases}.$$

La solución x = 0 nos daría cero como producto, que es un mínimo, por lo cual, el valor de x es x = 10.

$$y = 15 - x = 15 - 10 = \underline{5}\,.$$

<u>Los números pedidos son 10 y 5.</u>

Justificación de que se trata de un máximo:

$$P'' = 30 - 6x \;;;\; P''_{(10)} = 30 - 6 \cdot 10 = 30 - 60 = -20 < 0 \;\Rightarrow\; \underline{\textit{Máximo, c. q. j.}}$$

b)

La función $f(x) = |x| - x$ puede redefinirse de la forma $f(x) = \begin{cases} -x - x = -2x & si\ x < 0 \\ x - x = 0 & si\ x \geq 0 \end{cases}$

Para que una función sea derivable en un punto es condición necesaria que sea continua en ese punto.

La función en continua para cualquier valor real de x, excepto para el valor x = 0 cuya continuidad es dudosa.

Para que la función f(x) sea continua para x = 0 es necesario que esté definida en ese punto; que sus límites laterales en x = 0 sean iguales y coincidan con el valor de la función.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} (-2x) = \underline{0} \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} 0 = f(0) = \underline{0} \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{\text{f(x) es continua para x = 0.}}$$

Una función es derivable en un punto cuando sus derivadas por la izquierda y por la derecha son iguales.

$$f'(x)=\begin{cases}-2 & si\ \ x<0\\ 0 & si\ \ x\geq 0\end{cases} \Rightarrow \underline{f'(0^-)\neq f'(0^+)}.$$

La función f(x) no es derivable para x = 0.

****

3º) Sean A, B y C los puntos de intersección del plano $\pi \equiv 2x+y-4z-4=0$ con los tres ejes coordenados OX, OY y OZ, respectivamente. Calcula:

a) El área del triángulo ABC.

b) El perímetro del triángulo ABC.

c) Las ecuaciones de las rectas que contienen a los lados del triángulo ABC.

----

a)

Los puntos A, B y C son los siguientes:

$$\left.\begin{array}{l} \pi \equiv 2x+y-4z-4=0 \\ OX \Rightarrow \begin{cases} \underline{y=0} \\ \underline{z=0} \end{cases} \end{array}\right\} \Rightarrow 2x-4=0 \;;;\; \underline{x=2} \Rightarrow \underline{A(2,\ 0,\ 0)}.$$

$$\left.\begin{array}{l} \pi \equiv 2x+y-4z-4=0 \\ OY \Rightarrow \begin{cases} \underline{x=0} \\ \underline{z=0} \end{cases} \end{array}\right\} \Rightarrow y-4=0 \;;;\; \underline{y=4} \Rightarrow \underline{B(0,\ 4,\ 0)}.$$

$$\left.\begin{array}{l} \pi \equiv 2x+y-4z-4=0 \\ OZ \Rightarrow \begin{cases} \underline{x=0} \\ \underline{y=0} \end{cases} \end{array}\right\} \Rightarrow -4z-4=0 \;;;\; \underline{z=-1} \Rightarrow \underline{C(0,\ 0,\ -1)}.$$

$$\overrightarrow{u}=\overrightarrow{AB}=B-A=(0,\ 4,\ 0)-(2,\ 0,\ 0)=\underline{(-2,\ 4,\ 0)}.$$

$$\overrightarrow{v}=\overrightarrow{AC}=C-A=(0,\ 0,\ -1)-(2,\ 0,\ 0)=\underline{(-2,\ 0,\ -1)}.$$

El área del triángulo es la mitad del área del paralelogramo que determinan los vectores $\overrightarrow{u}=\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{v}=\overrightarrow{AC}$. Debe saberse que el área del paralelogramo es igual que el módulo del producto vectorial de los vectores que lo determinan, por lo tanto:

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}\cdot\left(\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v}\right)=\frac{1}{2}\cdot\left\|\begin{matrix} i & j & k \\ -2 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{matrix}\right\|=\frac{1}{2}\cdot\left|-4i+8k-2i\right|=\frac{1}{2}\cdot\left|-4i-2j+8k\right|=$$

$$=\left|-2i-j+4k\right|=\sqrt{(-2)^2+(-1)^2+4^2}=\sqrt{4+1+16}=\underline{\underline{\sqrt{21}\ u^2 \cong 4'58\ u^2=S_{ABC}}}.$$

b)

$$Perímetro=\overline{AB}+\overline{AC}+\overline{BC}=\sqrt{(-2)^2+4^2+0^2}+\sqrt{(-2)^2+0^2+(-1)^2}+\sqrt{0^2+(-4)^2+(0+1)^2}=$$

$$= \sqrt{4+16} + \sqrt{4+1} + \sqrt{16+1} = \sqrt{20} + \sqrt{5} + \sqrt{17} \cong 4'72 + 2'24 + 4'12 = \underline{\underline{11'08\ unidades = Perímetro}}.$$

c)

La recta que pasa por A(2, 0, 0) y B(0, 4, 0) tiene como vector director a cualquiera que sea linealmente dependiente de $\overrightarrow{u} = (-2,\ 4,\ 0)$, por ejemplo: $\overrightarrow{v_{AB}} = (1,\ -2,\ 0)$.

$$\underline{\underline{r_{AB} \equiv \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = -2\lambda \\ z = 0 \end{cases}}}$$

La recta que pasa por A(2, 0, 0) y C(0, 0, -1) tiene como vector director a cualquiera que sea linealmente dependiente de $\overrightarrow{v} = (-2,\ 0,\ -1)$, por ejemplo: $\overrightarrow{v_{AC}} = (2,\ 0,\ 1)$.

$$\underline{\underline{r_{AC} \equiv \begin{cases} x = 2 + 2\lambda \\ y = 0 \\ z = \lambda \end{cases}}}$$

La recta que pasa por B(0, 4, 0) y C(0, 0, -1) tiene como vector director a cualquiera que sea linealmente dependiente de $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{BC} = C - B = (0,\ -4,\ -1)$, por ejemplo: $\overrightarrow{v_{BC}} = (0,\ 4,\ 1)$.

$$\underline{\underline{r_{BC} \equiv \begin{cases} x = 0 \\ y = 4 + 4\lambda \\ z = \lambda \end{cases}}}$$

****