PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

SEPTIEMBRE - 2011

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II — Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

1.- Debe escogerse una sola de las opciones.

2.- Debe exponerse con claridad el planteamiento de la respuesta o el método utilizado para su resolución. Todas las respuestas deben ser razonadas.

3.- No se permite el uso de calculadoras gráficas ni programables.

OPCIÓN 1

1º) Considera el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} x+3y+z=5 \\ mx+2z=0 \\ my-z=m \end{cases}$, $m \in R$. Estúdialo para los distintos valores del parámetro m y resuélvelo cuando sea compatible (calculando todas sus soluciones).

Las matrices de coeficientes y ampliada son:

$$M=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ m & 0 & 2 \\ m & 0 & -1 \end{pmatrix} \; y \; M'=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 5 \\ m & 0 & 2 & 0 \\ m & 0 & -1 & m \end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes en función de m es el siguiente:

$$|M|=\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ m & 0 & 2 \\ m & 0 & -1 \end{vmatrix}=6m+3m=9m=0 \Rightarrow \underline{m=0}.$$

$$\underline{\underline{Para\;\; m\neq 0 \Rightarrow Rango\;\; M=Rango\;\; M'=3=n^o\;\; incóg. \Rightarrow Compatible\;\; Determinado}}$$

$$Para\;\; m=0 \;\Rightarrow\; M'=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \{C_2=-2C_3\} \Rightarrow \underline{Rango\;\; de\;\; M'=2}.$$

$$\underline{\underline{Para\ \ m=0 \Rightarrow Rango\ M\ = Rango\ M' = 2 < n^{o}\ \ incóg. \Rightarrow Compatible\ \ Indeterminado}}$$

Para m = 0 el sistema es $\begin{cases} x+3y+z=5 \\ 2z=0 \\ -z=0 \end{cases}$, equivalente a $\begin{cases} x+3y=5 \\ z=0 \end{cases}$ que es compatible indeterminado, cuya solución es:

$$\begin{cases} x+3y=5 \\ \underline{z=0} \end{cases} \Rightarrow \underline{y=\lambda}\ ;;\ \underline{x=5-3\lambda} \ \Rightarrow \ \underline{\underline{\begin{cases} x=5-3\lambda \\ y=\lambda \qquad ,\ \forall \lambda \in R \\ z=0 \end{cases}}}$$

****

2º) Se desea cortar una alfombra rectangular para un pasillo teniendo en cuenta que sus bordes se rematarán con dos tipos de cintas: una, que cuesta 32 euros por metro, se usará en los laterales, a la largo del pasillo, y otra, con un precio de 50 euros por metro, se empleará para los otros dos bordes.

a) Determina la función que permite obtener el coste del remate que bordea la alfombra a partir de las dimensiones de ésta.

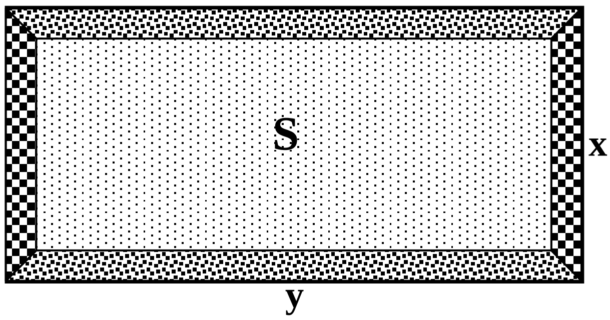
b) Calcula las dimensiones que debe tener la alfombra de 1 metro cuadrado de superficie para que el remate que la bordea resulte lo más económica posible. Justifica que la solución calculada es la más económica.

c) Halla el coste del remate para las dimensiones obtenidas en el apartado anterior.

----

a)

El esquema adjunto refleja la situación del modelo y dimensiones de la alfombra de que se trata.



El coste del remate de la alfombra es el siguiente: $\underline{\underline{C(x,\ y) = 2 \cdot (32x + 50y)}}$

b)

Siendo la superficie de 1 m^2 tiene que ser: $S = x \cdot y = 1$;; $\underline{y = \frac{1}{x}}$.

Sustituyendo el valor de y en la expresión del coste:

$$C(x) = 2 \cdot \left(32x + 50 \cdot \frac{1}{x}\right) = 4 \cdot \left(16x + \frac{25}{x}\right) = \underline{4 \cdot \frac{16x^2 + 25}{x} = C(x)}.$$

Para que el coste sea mínimo su derivada tiene que anularse:

$$C'(x) = 4 \cdot \frac{32x \cdot x - 1 \cdot (16x^2 + 25)}{x^2} = 4 \cdot \frac{32x^2 - 16x^2 - 25}{x^2} = \underline{4 \cdot \frac{16x^2 - 25}{x^2} = C'(x)}.$$

$$C'(x) = 0 \Rightarrow 4 \cdot \frac{16x^2 - 25}{x^2} = 0 \ ;;\ 16x^2 - 25 = 0 \ ;;\ x^2 = \frac{25}{16} \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{25}{16}} = \pm\frac{5}{4} \Rightarrow \underline{x_1 = -\frac{16}{4}} \ ;;$$

$\underline{x_2 = +\frac{5}{4}}$. La solución $x = -\frac{5}{4}$ carece de sentido lógico, por lo cual la solución es $\underline{x = \frac{5}{4}}$.

Sustituyendo en el valor de y resulta que $\underline{y = \frac{4}{5}}$.

Para justificar que la solución obtenida es a más económica posible recurrimos a la segunda derivada:

$$C''(x) = 4 \cdot \frac{32x \cdot x^2 - (16x^2 - 25) \cdot 2x}{x^4} = 4 \cdot \frac{32x^2 - 2 \cdot (16x^2 - 25)}{x^3} = 4 \cdot \frac{32x^2 - 32x^2 + 50}{x^3} =$$

$$= \underline{\frac{200}{x^3} = C''(x)} \Rightarrow C''\left(\tfrac{5}{4}\right) = \frac{200}{\left(\frac{5}{4}\right)^3} = \frac{200 \cdot 64}{125} = \frac{8 \cdot 64}{5} = \frac{512}{5} > 0 \Rightarrow \underline{\underline{Mínimo\ \ para\ \ x = \frac{5}{4},\ c.q.j.}}$$

<u>El coste del remate es mínimo para x = 1’25 metros e y = 0’80 metros.</u>

c)

$$C\left(\tfrac{5}{4}\right) = 4 \cdot \frac{16 \cdot \left(\frac{5}{4}\right)^2 + 25}{\frac{5}{4}} = 16 \cdot \frac{16 \cdot \frac{25}{16} + 25}{5} = 16 \cdot \frac{25 + 25}{5} = 16 \cdot 10 = \underline{160 = C\left(\tfrac{5}{4}\right)}.$$

<u>El coste mínimo del remate de la alfombra es de 160 euros.</u>

****

3º) Los puntos A(2, 1, 0) y B(-1, 3, -2) son dos vértices consecutivos de un paralelogramo cuyo centro es el punto M(1, 1, 1).

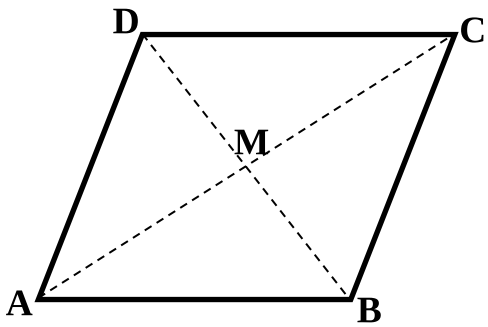
a) Halla uno de los otros dos vértices y calcula el área del paralelogramo.

b) Determina una ecuación general del plano π que contiene al paralelogramo.

----

a)

Para una mejor comprensión del ejercicio, realizamos un diagrama aproximado de la situación.



$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MC} \Rightarrow M - A = C - M \;;;\; (1,\ 1,\ 1) - (2,\ 1,\ 0) = (x,\ y,\ z) - (1,\ 1,\ 1) \;;;$$

$$(-1,\ 0,\ 1) = (x-1,\ y-1,\ z-1) \Rightarrow \begin{cases} x-1=-1 \rightarrow x=0 \\ y-1=0 \rightarrow y=1 \\ z-1=1 \rightarrow z=2 \end{cases} \Rightarrow \underline{\underline{C(0,\ 1,\ 2)}}.$$

b)

Dos vectores directores del plano pedido π, son: $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{BA}$ y $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{BC}$ y el punto puede ser cualquiera de los extremos del paralelogramo, por ejemplo, A(2, 1, 0).

$$\overrightarrow{u} = \overrightarrow{BA} = A - B = (2,\ 1,\ 0) - (-1,\ 3,\ -2) = \underline{(3,\ -2,\ 2) = \overrightarrow{u}}.$$

$$\overrightarrow{v} = \overrightarrow{BC} = C - B = (0,\ 1,\ 2) - (-1,\ 3,\ -2) = \underline{(1,\ -2,\ 4) = \overrightarrow{v}}.$$

$$\pi(A;\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}) \equiv \begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z \\ 3 & -2 & 2 \\ 1 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 0 \;;;\; -8(x-2) + 2(y-1) - 6z + 2z + 4(x-2) - 12(y-1) = 0 \;;;$$

$$-4(x-2) - 10(y-1) - 4z = 0 \;;;\; 2(x-2) + 5(y-1) + 2z = 0 \;;;\; 2x - 4 + 5y - 5 + 2z = 0.$$

$$\underline{\underline{\pi \equiv 2x + 5y + 2z - 9 = 0}}$$

****

OPCIÓN 2

1º) Sea A una matriz 3x3, B una matriz 3x1 y no nula, O la matriz nula (cero) 3x1. Considera los dos sistemas de ecuaciones siguientes: A · X = B y A · X = O. Razona si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera o falsa. En caso de que consideres que la afirmación es falsa pon un ejemplo ilustrativo.

a) Si la matriz A es regular (inversible), entonces el sistema A · X = B es compatible.

b) Si el sistema A · X = B es incompatible, entonces el sistema A · X = O es compatible determinado.

----

a)

Verdadero.

Si la matriz de coeficientes A es regular (inversible) tiene de rango tres; como la matriz ampliada (A/B) tiene dimensión 3x4 no puede tener mayor rango que tres y, según el teorema de Rouché-Fröbenius, un sistema es compatible cuando las matrices de coeficientes y ampliada tienen el mismo rango. En el caso que nos ocupa, como el rango es igual que el número de incógnitas, el sistema es compatible determinado.

b)

Falso.

Si el sistema A · X = B es incompatible implica necesariamente que el rango de la matriz de coeficientes A es menor que tres y, además de rango diferente al de la matriz ampliada, según el teorema de Rouché-Fröbenius.

El sistema homogéneo A · X = O no es compatible determinado por tener tres incógnitas y el rango de A es menor que tres. Como los sistemas homogéneos tienen todos solución, al menos la trivial (0, 0, 0) cuando el rango de A es igual al número de incógnitas, en este caso, al ser el rango de A menor que el número de incógnitas, el sistema es compatible indeterminado, con uno o dos grados de libertad, en función que el rango de A sea dos o uno, respectivamente.

Un ejemplo puede ser el sistema $\left.\begin{array}{r} x+y+z=0 \\ 2x-y-3z=0 \\ 3x-2z=0 \end{array}\right\}$. La matriz de coeficientes es de rango dos (tercera fila es la suma de las dos primeras).

El sistema es equivalente a $\left.\begin{array}{r} x+y+z=0 \\ 2x-y-3z=0 \end{array}\right\}$, que es compatible indeterminado con un grado de libertad (un solo parámetro).

Otro ejemplo ilustrativo puede ser un sistema cuyas ecuaciones sean múltiplos unas de otras, tal como el siguiente: $\left.\begin{array}{r} x-y+z=0 \\ 2x-2y+2z=0 \\ 3x-3y+3z=0 \end{array}\right\}$. La matriz de coeficientes es de rango uno por ser equivalente a $\left.x-y+z=0\right\}$, que es compatible indeterminado con dos grados de libertad (dos parámetros).

****

2º) Considera la función: $h(x)=\frac{27}{x}+ax+b$.

a) Calcula el valor de los parámetros a y b para que la gráfica de la función pase por el punto A(1, 0) y en ese punto tenga un mínimo local.

b) Para a = 3 y b = 2 estudia la continuidad, los intervalos de crecimiento y decrecimiento y las asíntotas de la función.

----

a)

Por pasar por A(1, 0) $\Rightarrow h(1)=0 \Rightarrow \frac{27}{1}+a+b=0\ ;;\ \underline{a+b=-27}$. (1)

Si la función $h(x)=\frac{27}{x}+ax+b$ tiene un mínimo relativo en A(1, 0) tiene que anularse su derivada para x = 1:

$$h'(x)=-\frac{27}{x^2}+a \Rightarrow h'(1)=0 \Rightarrow -\frac{27}{1^2}+a=0\ ;;\ -27+a=0\ ;;\ \underline{\underline{a=27}}.$$

Sustituyendo el valor obtenido en (1):

$$a+b=-27\ ;;\ 27+b=-27 \Rightarrow \underline{\underline{b=-54}}.$$

b)

Para a = 3 y b = 2 la función resulta $h(x)=\frac{27}{x}+3x+2$.

La función h(x) es continua en R, excepto para el valor x = 0 que no está definida, por lo cual es discontinua para x = 0. A continuación estudiamos el tipo de discontinuidad de la función:

$$\lim_{x\to 0^-} h(x)=\lim_{x\to 0^+} h(x)=\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{27}{x}+3x+2\right)=2.$$

<u>La función h(x) tiene una discontinuidad evitable para x = 0.</u>

$$h'(x)=-\frac{27}{x^2}+3=0 \Rightarrow 3=\frac{27}{x^2}\ ;;\ x^2=9\ ;;\ \underline{x_1=-3}\ ;;\ \underline{x_2=3}.$$

$$\underline{\underline{h'(x)<0 \Rightarrow |x|<3 \Rightarrow \textit{Decrecimiento}: (-3,\ 0)\cup(0,\ 3)}}$$

$$\underline{\underline{h'(x)>0 \Rightarrow |x|>3 \Rightarrow \textit{Crecimiento}: (-\infty,\ -3)\cup(3,\ +\infty)}}$$

Para es estudio de las asíntotas de la función h(x) la expresamos de la forma siguiente: $h(x)=\frac{3x^2+2x+27}{x}$.

Tiene una asíntota horizontal para x = 0 que anula el denominador con las siguientes tendencias:

$$\lim_{x\to-\infty} h(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{3x^2+2x+27}{x}=0^- . \quad \lim_{x\to+\infty} h(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2+2x+27}{x}=0^+ .$$

Las asíntotas oblicuas son de la forma $y=mx+n$, siendo:

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{h(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{3x^2+2x+27}{x}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+2x+27}{x^2}=\underline{3=m} .$$

$$n=\lim_{x\to\infty}[h(x)-mx]=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x^2+2x+27}{x}-3x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+2x+27-3x^2}{x}=\underline{2=n} .$$

<u>La función h(x) tiene como asíntota horizontal x = 0 y vertical y = 3x +2.</u>

****

3º) Considera las rectas: $r_1 \equiv \begin{cases} x = t \\ y = -t \\ z = 1 - t \end{cases} \quad (t \in R)$ y $r_2 \equiv \begin{cases} x = 2 + s \\ y = s \\ z = m + s \end{cases} \quad (s \in R)$.

a) Encuentra un valor del parámetro m para que las rectas sean coplanarias.

b) Para m = 0, calcula una recta r que pase por el punto P(2, 1, 1) y que sea perpendicular a ambas rectas: r_1 y r_2.

----

a)

Los vectores directores de las rectas son $\overrightarrow{v_1} = (1,\ -1,\ -1)$ y $\overrightarrow{v_2} = (1,\ 1,\ 1)$, que son linealmente independientes por no tener sus componentes proporcionales, lo que implica que las rectas no son paralelas.

De lo anterior se deduce que, para que las rectas sean coplanarias tienen que ser secantes.

Las expresiones de las rectas r_1 y r_2 por unas ecuaciones implícitas son las siguientes:

$$r_1 \equiv \begin{cases} x = t \\ y = -t \\ z = 1 - t \end{cases} \Rightarrow \frac{x}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z-1}{-1} \ ;; \ \begin{cases} -x = y \\ -x = z - 1 \end{cases} \Rightarrow \underline{r_1 \equiv \begin{cases} x + y = 0 \\ x + z - 1 = 0 \end{cases}}.$$

$$r_2 \equiv \begin{cases} x = 2 + s \\ y = s \\ z = m + s \end{cases} \Rightarrow \frac{x-2}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-m}{1} \ ;; \ \begin{cases} x - 2 = y \\ x - 2 = z - m \end{cases} \Rightarrow \underline{r_2 \equiv \begin{cases} x - y - 2 = 0 \\ x - z - 2 + m = 0 \end{cases}}.$$

Las rectas r y s determinan el sistema $\left.\begin{array}{r} x + y = 0 \\ x + z = 1 \\ x - y = 2 \\ x - z = 2 - m \end{array}\right\}$.

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \ y \ M' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 2-m \end{pmatrix}.$$

En función de los rangos de las matrices M y M', la posición relativa de las dos rectas es la siguiente:

Rango M = Rango M' = 2 $\Rightarrow$ (Puntos comunes) $\Rightarrow$ Son rectas coincidentes.

Rango M = 2 ;; Rango M’ = 3 $\Rightarrow$ (No hay puntos comunes) $\Rightarrow$ Son rectas paralelas.

Rango M = Rango M’ = 3 $\Rightarrow$ (Puntos comunes) $\Rightarrow$ Las rectas se cortan en un punto.

Rango M = 3 ;; Rango M’ = 4 $\Rightarrow$ (No hay puntos comunes) $\Rightarrow$ Las rectas son secantes.

Para que las rectas sean coplanarias tiene que ser Rango M = Rango M’ = 3, o sea, que el determinante de M’ tiene que ser 0:

$$|M'| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 2-m \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \{F_3 \rightarrow F_3 + F_1\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 2-m \end{vmatrix} = 0 \;;;$$

$$-1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2-m \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \{F_3 \rightarrow F_3 + F_1\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 3-m \end{vmatrix} = 0 \;;; -1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 3-m \end{vmatrix} = 0 \;;;$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3-m \end{vmatrix} = 0 \;;; 3-m-2=0 \;;; 1-m=0 \Rightarrow \underline{m=1}.$$

Las rectas r_1 y r_2 son coplanarias para m = 1.

b)

Para m = 0 es $r_2 \equiv \begin{cases} x = 2+s \\ y = s \\ z = s \end{cases}$.

Un vector de la recta pedida r es cualquiera que sea linealmente dependiente del producto vectorial de los vectores directores de las rectas r_1 y r_2.

$$\overrightarrow{v'_r} = \overrightarrow{v_1} \wedge \overrightarrow{v_2} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -i - j + k + k + i - j = -2j + 2k = (0,\ -2,\ 2) \Rightarrow \underline{\overrightarrow{v_r} = (0,\ 1,\ -1)}.$$

La expresión de r dada, por ejemplo, por unas ecuaciones paramétricas es:

$$r \equiv \begin{cases} x = 2 \\ y = 1+\lambda, \ \forall \lambda \in R \\ z = 1-\lambda \end{cases}$$

****