PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

JUNIO - 2011

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II   Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

1.- Debe escogerse una sola de las opciones.

2.- Debe exponerse con claridad el planteamiento de la respuesta o el método utilizado para su resolución. Todas las respuestas deben ser razonadas.

3.- No se permite el uso de calculadoras gráficas ni programables.

OPCIÓN 1

1º) Considera el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} x+2y+mz=m-1 \\ x+(m+1)y+(2m+1)z=m \\ -x-2y+z=2 \end{cases}$, $m\in R$. Estúdialo para los distintos valores del parámetro m y resuélvelo cuando sea compatible (calculando todas sus soluciones).

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M=\begin{pmatrix} 1 & 2 & m \\ 1 & m+1 & 2m+1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} ;;\ M'=\begin{pmatrix} 1 & 2 & m & m-1 \\ 1 & m+1 & 2m+1 & m \\ -1 & -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$|M|=\begin{vmatrix} 1 & 2 & m \\ 1 & m+1 & 2m+1 \\ -1 & -2 & 1 \end{vmatrix}=m+1-2m-2(2m+1)+m(m+1)+2(2m+1)-2=$$

$$=-m+m(m+1)-1=-m+m^2+m-1=m^2-1=0\ \Rightarrow\ \underline{m_1=1}\ ;;\ \underline{m_2=-1}.$$

$$Para\ \begin{Bmatrix} m\neq 1 \\ m\neq -1 \end{Bmatrix}\Rightarrow Rango\ M=Rango\ M'=3=n^o\ incóg.\Rightarrow Compatible\ determinado$$

$$Para\ \ m=1 \Rightarrow M'=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ -1 & -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow Rango\ \ de\ \ M' \Rightarrow \{C_2=2C_1\} \Rightarrow \{C_1,\ C_3,\ C_4\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 6-1-1-2=6-4=2 \neq 0 \Rightarrow \underline{Rango\ \ M'=3}.$$

$$\underline{\underline{Para\ \ m=1 \Rightarrow Rango\ \ M \neq Rango\ \ M' \Rightarrow Incompatible}}$$

$$Para\ \ m=-1 \Rightarrow M'=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \{F_1=-F_3\} \Rightarrow \underline{Rango\ \ de\ \ M'=2}.$$

$$\underline{\underline{Para\ \ m=-1 \Rightarrow Rango\ \ M = Rango\ \ M'=2 < n^o\ \ incóg. \Rightarrow Compatible\ \ indeterminado}}$$

Resolvemos para el caso de $\begin{Bmatrix} m \neq 1 \\ m \neq -1 \end{Bmatrix}$, en cuyo caso el sistema es compatible determinado:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} m-1 & 2 & m \\ m & m+1 & 2m+1 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix}}{m^2-1}=\frac{m^2-1-2m^2+4(2m+1)-2m(m+1)-2m+2(m-1)(2m+1)}{m^2-1}=$$

$$=\frac{-1-m^2+8m+4-2m^2-2m-2m+(2m-2)(2m+1)}{m^2-1}=\frac{3-3m^2+4m+4m^2+2m-4m-2}{m^2-1}=$$

$$=\frac{m^2+2m+1}{m^2-1}=\frac{(m+1)^2}{(m+1)(m-1)}=\underline{\underline{\frac{m+1}{m-1}}}=x.$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & m-1 & m \\ 1 & m & 2m+1 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{m^2-1}=\frac{m+2m-(m-1)(2m+1)+m^2-2(2m+1)-(m-1)}{m^2-1}=$$

$$=\frac{3m-(2m^2+m-2m-1)+m^2-4m-2-m+1}{m^2-1}=\frac{m^2-2m-2m^2-m+2m+1-1}{m^2-1}=\frac{-m^2-m}{m^2-1}=$$

$$=\frac{-m(m+1)}{(m+1)(m-1)}=\underline{\underline{\frac{-m}{m-1}}}=y.$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix}1 & 2 & m-1\\ 1 & m+1 & m\\ -1 & -2 & 2\end{vmatrix}}{m^2-1}=\frac{2(m+1)-2m-2(m-1)+m^2-1+2m-4}{m^2-1}=\frac{2m+2-2m+2+m^2-5}{m^2-1}=$$

$$=\frac{m^2-1}{m^2-1}=\underline{\underline{1=z}}.$$

Para m = -1 el sistema es $\begin{cases}x+2y-z=-2\\ x-z=-1\\ -x-2y+z=2\end{cases}$, equivalente al sistema $\begin{cases}x+2y-z=-2\\ x-z=-1\end{cases}$, que es compatible indeterminado.

Para resolverlo hacemos $\underline{z=\lambda}$, es $\underline{x=-1+\lambda}$.

$x+2y-z=-2$;; $2y=-2+\lambda-x=-2+\lambda+1-\lambda=-1$;; $\underline{y=-\frac{1}{2}}$.

$$\underline{\underline{Solución:\begin{cases}x=-1+\lambda\\ y=-\frac{1}{2} & \forall\lambda\in R\\ z=\lambda\end{cases}}}$$

****

2º) a) Determina los valores de α y b para que la función $f(x)=\begin{cases} \dfrac{e^x-x-a}{b\,sen\left(x^2\right)} & si\ \ x\neq 0 \\ \dfrac{1}{2} & si\ \ x=0 \end{cases}$ sea continua en x = 0.

b) Determina la función $g:R\rightarrow R$ que verifica $g(0)=1$, $g'(0)=3$ y $g''(x)=(2+x)e^x+2$ $\forall x\notin R$.

----

a) Para que la función f(x) sea continua para x = 0 tiene que ser $\lim_{x\rightarrow 0}\dfrac{e^x-x-a}{b\,sen\left(x^2\right)}=\dfrac{1}{2}$.

$\lim_{x\rightarrow 0}\dfrac{e^x-x-a}{b\,sen\left(x^2\right)}=\dfrac{e^0-0-a}{b\cdot sen\ 0}=\dfrac{1-a}{b\cdot 0}=\dfrac{1-a}{0}$. Para que $\lim_{x\rightarrow 0}\dfrac{e^x-x-a}{b\,sen\left(x^2\right)}=\dfrac{1}{2}$ es $\underline{\underline{a=1}}$.

Continuando con el límite: $\lim_{x\rightarrow 0}\dfrac{e^x-x-a}{b\,sen\left(x^2\right)}=\dfrac{0}{0}\Rightarrow In\det.\Rightarrow L´Hopital\Rightarrow$

$$\Rightarrow \lim_{x\rightarrow 0}\frac{e^x-1}{b\cdot 2x\cdot\cos\left(x^2\right)}=\frac{1-1}{b\cdot 0\cdot 1}=\frac{0}{0}\Rightarrow In\det.\Rightarrow L´Hopital\Rightarrow \lim_{x\rightarrow 0}\frac{e^x}{2b\cdot\left[\cos\left(x^2\right)-2x\cdot sen\left(x^2\right)\right]}=$$

$$=\lim_{x\rightarrow 0}\frac{e^0}{2b\cdot[\cos 0-2\cdot 0\cdot sen\ 0]}=\frac{1}{2b\cdot 1}=\frac{1}{2b}=\frac{1}{2}\Rightarrow \underline{\underline{b=1}}.$$

b)

$$g'(x)=\int g''(x)\cdot dx=\int\left[(2+x)e^x+2\right]\cdot dx=\int 2e^x\cdot dx+\int xe^x\cdot dx+2\int dx=\underline{2e^x+2x+A=g'(x)}.$$

$$A=\int xe^x\cdot dx\Rightarrow \left.\begin{cases} u=x\rightarrow du=dx \\ e^x\,dx=dv\rightarrow v=e^x \end{cases}\right\}\Rightarrow A=e^x\cdot x-\int e^x\,dx=\underline{e^x\cdot x-e^x+C=A}.$$

Sustituyendo el valor de A obtenido en la expresión de $g'(x)$:

$$g'(x)=2e^x+2x+x\cdot e^x-e^x+C=e^x+2x+x\cdot e^x+C=\underline{(1+x)\cdot e^x+2x+C=g'(x)}.$$

$$g'(0)=3\Rightarrow (1+0)\cdot e^0+2\cdot 0+C=3\ ;;\ 1+C=3\ ;;\ \underline{C=2}\Rightarrow \underline{g'(x)=(1+x)\cdot e^x+2x+2}.$$

$$g(x)=\int g'(x)\cdot dx=\int\left[(1+x)e^x+2x+2\right]\cdot dx=\int\left(e^x+x\cdot e^x+2x+2\right)\cdot dx=$$

$$=e^x+x\cdot e^x-e^x+x^2+2x+C_2=\underline{x\cdot e^x+x^2+2x+C_2=g(x)}.$$

$$g(0)=1\Rightarrow 0\cdot e^0+0+0+C_2=1\ ;;\ \underline{C_2=1}\Rightarrow \underline{\underline{g(x)=x\cdot e^x+x^2+2x+1}}.$$

****

3º) a) Sean $\vec{u}$ y $\vec{v}$ dos vectores ortogonales y de módulo 1. Hallar los valores del parámetro α para que los vectores $\vec{u}+a\cdot\vec{v}$ y $\vec{u}-a\cdot\vec{v}$ formen un ángulo de 60º.

b) Halla un vector $\vec{z}$ de módulo 1 y que sea ortogonal a los vectores $\vec{x}=(1,\ 2,\ 1)$ e $\vec{y}=(0,\ 1,\ 1)$.

c) Justifica se es verdadera o falsa la afirmación siguiente. Si la consideras falsa, pon un ejemplo ilustrativo.

"Si $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ son tres vectores no nulos que cumplen que $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{a}\times\vec{c}$, entonces $\vec{b}=\vec{c}$".

----

a)

Por ser $\vec{u}$ y $\vec{v}$ dos vectores ortogonales es $\left|\vec{u}+a\cdot\vec{v}\right|=\left|\vec{u}-a\cdot\vec{v}\right|$, $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$ y $\vec{u}\cdot\vec{u}=\vec{v}\cdot\vec{v}=1$.

Sabiendo que el producto de dos vectores es el producto de sus módulos por el coseno del ángulo que forman:

$$\left(\vec{u}+a\cdot\vec{v}\right)\cdot\left(\vec{u}-a\cdot\vec{v}\right)=\vec{u}\cdot\vec{u}-a\cdot\vec{u}\cdot\vec{v}+a\cdot\vec{u}\cdot\vec{v}-a^2\cdot\vec{v}\cdot\vec{v}=\vec{u}\cdot\vec{u}-a^2\cdot\vec{v}\cdot\vec{v}=$$

$$=\left|\vec{u}\right|\cdot\left|\vec{u}\right|\cdot\cos 0-a^2\cdot\left|\vec{v}\right|\cdot\left|\vec{v}\right|\cdot\cos 0=1\cdot 1\cdot 1-a^2\cdot 1\cdot 1=\underline{1-a^2}.$$

$$\left|\vec{u}+a\cdot\vec{v}\right|=\sqrt{\left(\vec{u}+a\cdot\vec{v}\right)\cdot\left(\vec{u}+a\cdot\vec{v}\right)}=\sqrt{\vec{u}\cdot\vec{u}+a\cdot\vec{u}\cdot\vec{v}+a\cdot\vec{u}\cdot\vec{v}+a^2\cdot\vec{v}\cdot\vec{v}}=\sqrt{1+a^2}.$$

$$\left(\vec{u}+a\cdot\vec{v}\right)\cdot\left(\vec{u}-a\cdot\vec{v}\right)=\left|\vec{u}+a\cdot\vec{v}\right|\cdot\left|\vec{u}-a\cdot\vec{v}\right|\cdot\cos 60º\Rightarrow 1-a^2=\left(\sqrt{1+a^2}\right)^2\cdot\frac{1}{2}\ ;;$$

$$2\cdot\left(1-a^2\right)=1+a^2\ ;;\ 2-2a^2=1+a^2\ ;;\ 3a^2=1\ ;;\ a^2=\frac{1}{3}\Rightarrow \underline{\underline{a=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}}}.$$

b) Halla un vector $\vec{z}$ de módulo 1 y que sea ortogonal a los vectores $\vec{x}=(1,\ 2,\ 1)$ e $\vec{y}=(0,\ 1,\ 1)$.

Un vector ortogonal a los vectores $\vec{x}=(1,\ 2,\ 1)$ e $\vec{y}=(0,\ 1,\ 1)$ es cualquiera que sea linealmente dependiente de su producto vectorial.

$$\vec{z'}=\vec{x}\times\vec{y}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}=2i+k-i-j=i-j+k=(1,\ -1,\ 1)\Rightarrow \underline{\vec{z}=(a,\ -a,\ a)}.$$

Para que $\vec{z}=(a,\ -a,\ a)$ tenga modulo 1 ha de ser:

$$\left|\overrightarrow{z}\right| = 1 \Rightarrow \sqrt{a^2 + (-a)^2 + a^2} = \sqrt{3a^2} = 1 \;;\; 3a^2 = 1 \;;\; a^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow \underline{a = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}}.$$

Los vectores $\overrightarrow{z}$ que cumplen la condición pedida son los siguientes:

$$\underline{\underline{\overrightarrow{z_1} = \left(\frac{\sqrt{3}}{3},\ -\frac{\sqrt{3}}{3},\ \frac{\sqrt{3}}{3}\right)}} \text{ y } \underline{\underline{\overrightarrow{z_2} = \left(-\frac{\sqrt{3}}{3},\ \frac{\sqrt{3}}{3},\ -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)}}$$

c)

"Si $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ son tres vectores no nulos que cumplen que $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{c}$, entonces $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{c}$".

La expresión anterior no siembre es cierta; evidentemente si $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{c}$ se cumple la expresión $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{c}$, pero teniendo en cuenta que el módulo del producto vectorial de dos vectores es el producto de sus módulos por el seno del ángulo que forman y teniendo en cuenta que los ángulos β y (180º – β) tienen el mismo seno, existe otro vector que también cumple la condición.

Lo aclaramos con un ejemplo.

Sean los vectores $\overrightarrow{a} = (1,\ 0,\ 0)$, $\overrightarrow{b} = (2,\ 1,\ 0)$ y $\overrightarrow{c} = (-2,\ 1,\ 0)$.

$$\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = k = (0,\ 0,\ 1) \;;\; \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{c} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = k = (0,\ 0,\ 1).$$

$$\underline{\underline{\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{c} \;\; y \;\; \overrightarrow{b} \neq \overrightarrow{c}}}$$

****

OPCIÓN 2

1º) Considera las matrices $A=\begin{pmatrix} m-1 & 1 & 0 \\ m-1 & m+2 & 2 \\ m-1 & m+2 & m+1 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, donde $m\in R$.

a) Determina para qué valores del parámetro m la matriz A es regular (inversible).

b) Para m = 1, calcula la matriz X que cumple que $X-B^2=A\cdot B$.

c) Para m = 1, estudia si el sistema $A\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 8 \end{pmatrix}$ tiene solución. En caso afirmativo, calcula su solución.

----

a)

Una matriz es regular o inversible cuando su determinante es distinto de cero.

$$|A|=\begin{vmatrix} m-1 & 1 & 0 \\ m-1 & m+2 & 2 \\ m-1 & m+2 & m+1 \end{vmatrix}=(m-1)\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & m+2 & 2 \\ 1 & m+2 & m+1 \end{vmatrix}=$$

$$=(m-1)\cdot[(m+2)(m+1)+2-2\cdot(m+2)-(m+1)]=(m-1)\cdot(m^2+m+2m+2+2-2m-4-m-1)=$$

$$=(m-1)\cdot(m^2-1)=(m-1)^2(m+1)=0 \Rightarrow \underline{m_1=m_2=1} \ ;; \ \underline{m_3=-1}.$$

<u>La matriz A es inversible para cualquier valor real de m, excepto m = 1 y m = -1.</u>

b)

$$X-B^2=A\cdot B \ ;; \ X=B^2+A\cdot B=\underline{(B+A)\cdot B=X}.$$

Para m = 1 es $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

$$X=\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}\right]\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 1+1-0 & 0-1-0 & -1+1+1 \\ 1+2+0 & 0-2+0 & -1+2-3 \\ 0+3+0 & 0-3+0 & -0+3-1 \end{pmatrix}=\underline{\underline{\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & -2 \\ 3 & -3 & 2 \end{pmatrix}=X}}.$$

c)

Para m = 1 es $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ y la ecuación resulta: $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 8 \end{pmatrix}$.

El sistema resulta: $\left.\begin{array}{l} x=2 \\ 3y+2z=8 \\ 3y+2z=8 \end{array}\right\}$, que es equivalente a $\left.\begin{array}{l} x=2 \\ 3y+2z=8 \end{array}\right\}$, que es un sistema de dos ecuaciones con tres incógnitas, <u>compatible indeterminado</u>.

Haciendo $\underline{z=\lambda}$ es $3y=8-2\lambda$;; $\underline{y=\frac{8}{3}-\frac{2}{3}\lambda}$.

$$\underline{\underline{Solución: \begin{cases} x=2 \\ y=\frac{8}{3}-\frac{2}{3}\lambda, \quad \forall \lambda \in R \\ z=\lambda \end{cases}}}$$

****

2º) a) Sea $f: R \to R$ una función derivable en todos los puntos tal que $f(2)=0$ y $f'(2)=-3$. Considera la función $h(x)=e^{f(x)}+x\cdot\cos[f(x)]+[f(x)]^2$. Calcula razonadamente $h'(2)$.

b) Determina si la función $g(x)=\frac{1}{1+|x|}$ es derivable en x = 0.

c) Justifica si la siguiente afirmación es verdadera o falsa. Si consideras que es falsa, pon un ejemplo ilustrativo.

"Si $f: R \to R$ es una función con $f'(x)=\begin{cases} -1 & si \ \ x<0 \\ 1 & si \ \ x>0 \end{cases}$ entonces la función f no es continua".

----

a)

$$h'(x)= f'(x)\cdot e^{f(x)}+1\cdot\cos[f(x)]-x\cdot f'(x)\cdot sen[f(x)]+2\cdot[f(x)]\cdot f'(x).$$

$$h'(2)= f'(2)\cdot e^{f(2)}+1\cdot\cos[f(2)]-2\cdot f'(2)\cdot sen[f(2)]+2\cdot[f(2)]\cdot f'(2)=$$

$$=-3\cdot e^0+1\cdot\cos 0-2\cdot(-3)\cdot sen\ 0+2\cdot 0\cdot(-3)=-3\cdot 1+1\cdot 1-2\cdot(-3)\cdot 0+0=-3+1=-2.$$

$$\underline{\underline{h'(2)=-2}}$$

b)

La función $g(x)=\frac{1}{1+|x|}$ se puede redefinir de la forma $g(x)=\begin{cases} \frac{1}{1-x} & si \ \ x<0 \\ \frac{1}{1+x} & si \ \ x\geq 0 \end{cases}$.

Para que una función sea derivable en un punto es condición necesaria que sea continua en ese punto, por lo cual, estudiamos en primer lugar su continuidad.

La función f(x) es continua para x = 0 por ser $g(0^-)=g(0^+)=1$.

Una función es derivable en un punto si, y solo si, existen la derivada por la izquierda y la derivada por la derecha en ese punto y además, son iguales.

$$f'(x)=\begin{cases} \frac{1}{(1-x)^2} & si \ \ x<0 \\ \frac{-1}{(1+x)^2} & si \ \ x<0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'(0^-)=\underline{1} \\ f'(0^+)=\underline{-1} \end{cases} \Rightarrow \underline{\underline{f(x) \ no \ es \ derivable \ \ para \ \ x=0}}.$$

c)

De la expresión $f'(x)=\begin{cases} -1 & si \ \ x<0 \\ 1 & si \ \ x>0 \end{cases}$ se deduce que $f(x)=\begin{cases} -x+C_1 & si \ \ x<0 \\ x+C_2 & si \ \ x>0 \end{cases}$.

Una función es continua en un punto si sus límites laterales son iguales e igual al valor de la función en ese punto.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} (-x + C_1) = C_1 \\ \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} (x + C_2) = C_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{C_1 = C_2}$$

La afirmación: "Si $f : R \to R$ es una función con $f'(x) = \begin{cases} -1 & si \;\; x < 0 \\ 1 & si \;\; x > 0 \end{cases}$ entonces la función f no es continua" <u>es verdadera cuando se considere una misma constante y falsa cuando las constantes que se tomen para x < 0 sea diferente a la que se tome para x > 0</u>.

****

3º) Considera los planos $\pi_1 \equiv 2x-y+z=3$, $\pi_2 \equiv x-y+z=2$ y $\pi_3 \equiv 3x-y-az=b$, donde $a,\ b\in R$.

a) Determina el valor de los parámetros α y b para que los tres planos se corten en una recta r.

b) Calcula unas ecuaciones paramétricas de la recta r.

c) Halla una ecuación general del plano π que contiene a la recta r y que pasa por el punto Q(2, 1, 3).

----

a)

Los tres planos se cortan en una recta cuando el sistema que forman sea compatible indeterminado y con un grado de libertad, es decir, cuando los rangos de las matrices de coeficientes y ampliada sean iguales a dos.

Las matrices son $M=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & a \end{pmatrix}$;; $M'=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & a & b \end{pmatrix}$.

$$|M|=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & a \end{vmatrix}=0\ ;;\ -2a-1-3+3+2+a=0\ ;;\ -a+1=0\ \Rightarrow\ \underline{a=1}.$$

Para α = 1 es $M'=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 & b \end{pmatrix} \Rightarrow \{C_3=-C_2\} \Rightarrow\ Rango\ \ M'=2\ \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & b \end{vmatrix}=0$;;

$$2b+3+6-9-4-b=0\ ;;\ b-4=0\ \Rightarrow\ \underline{b=4}.$$

<u>Los planos se cortan en una recta para α = 1 y b = 4.</u>

La recta r la determinan dos cualesquiera de los planos: $\underline{\underline{r\equiv\begin{cases} 2x-y+z=3 \\ x-y+z=2 \end{cases}}}$.

b)

La expresión de r por unas ecuaciones paramétricas es la siguiente:

$$r\equiv\begin{cases} 2x-y+z=3 \\ x-y+z=2 \end{cases} \Rightarrow\ \underline{z=\lambda}\ ;;\ \left.\begin{array}{r} 2x-y=3-\lambda \\ x-y=2-\lambda \end{array}\right\}\ \left.\begin{array}{r} 2x-y=3-\lambda \\ -x+y=-2+\lambda \end{array}\right\} \Rightarrow\ \underline{x=1}.$$

$$x-y=2-\lambda\ ;;\ y=x-2+\lambda=1-2+\lambda=\underline{-1+\lambda=y}.$$

$$\underline{\underline{r \equiv \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 + \lambda \\ z = \lambda \end{cases}}}$$

c)

Un punto y un vector director de r son P(1, -1, 0) y $\overrightarrow{v} = (0,\ -1,\ 1)$.

Los puntos P y Q determinan el vector $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{PQ} = Q - P = (1,\ 2,\ 3)$.

La expresión general del plano π pedido es la siguiente:

$$\pi(Q;\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}) \equiv \begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z-3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0\ ;;\ 2(x-2) - (z-3) + 3(x-2) - (y-1) = 0\ ;;$$

$$5(x-2) - y + 1 - z + 3 = 0\ ;;\ 5x - 10 - y - z + 4 = 0.$$

$$\underline{\underline{\pi \equiv 5x - y - z - 6 = 0}}$$

****