PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

JUNIO - 2010

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II — Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

1.- Debe escogerse una sola de las opciones.

2.- Debe exponerse con claridad el planteamiento de la respuesta o el método utilizado para su resolución. Todas las respuestas deben ser razonadas.

3.- No se permite el uso de calculadoras gráficas ni programables.

OPCIÓN 1

1º) Considera el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} x+y+z=1 \\ mx+y+(m-1)z=2 \\ x+my+z=m \end{cases}$, $m \in R$. Estúdialo para los distintos valores del parámetro m y resuélvelo cuando sea compatible (calculando todas sus soluciones).

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m & 1 & m-1 \\ 1 & m & 1 \end{pmatrix} \;;;\; M'=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ m & 1 & m-1 & 2 \\ 1 & m & 1 & m \end{pmatrix}.$$

El rango de M en función del parámetro m es el siguiente:

$$|M|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m & 1 & m-1 \\ 1 & m & 1 \end{vmatrix}=1+m^2+(m-1)-1-m-m(m-1)=m^2+m-1-m-m^2+m=$$

$$=m-1=0 \;\Rightarrow\; \underline{m=1}$$

$$\underline{\underline{Para\ m\neq 1 \Rightarrow\ Rango\ M=Rango\ M'=3=n^o\ incóg. \Rightarrow\ Compatible\ Determinado}}$$

$$Para\ \ m=1\ \Rightarrow\ M=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}\Rightarrow Rango\ \ M\ \ \Rightarrow\ \{F_1=F_2\}\Rightarrow\ \underline{Rango\ \ M=2}$$

$$Para\ \ m=1\ \Rightarrow\ M'=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&0&2\\1&1&1&1\end{pmatrix}\Rightarrow Rango\ \ M'\ \ \Rightarrow\ \{F_1=F_2\}\Rightarrow\ \underline{Rango\ \ M'=2}.$$

$$\underline{\underline{Para\ m=1\ \Rightarrow\ Rango\ \ M=2=Rango\ M'=2<n^{o}\ \ incóg.\ \Rightarrow\ Compatible\ \ Indeterminado}}$$

Para $m\neq 1\ \Rightarrow$ Resolvemos aplicando la regla de Cramer.

$$x=\frac{\begin{vmatrix}1&1&1\\2&1&m-1\\m&m&1\end{vmatrix}}{m-1}=\frac{1+2m+m(m-1)-m-2-m(m-1)}{m-1}=\frac{m-1}{m-1}=\underline{\underline{1=x}}.$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix}1&1&1\\m&2&m-1\\1&m&1\end{vmatrix}}{m-1}=\frac{2+m^2+m-1-2-m-m(m-1)}{m-1}=\frac{m^2-1-m^2+m}{m-1}=\frac{m-1}{m-1}=\underline{\underline{1=y}}.$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix}1&1&1\\m&1&2\\1&m&m\end{vmatrix}}{m-1}=\frac{m+m^2+2-1-2m-m^2}{m-1}=\frac{-m+1}{m-1}=\underline{\underline{-1=z}}.$$

Para m = 1 el sistema resulta: $\begin{cases}x+y+z=1\\x+y=2\\x+y+z=1\end{cases}$ equivalente al sistema $\begin{cases}x+y+z=1\\x+y=2\end{cases}$.

Parametrizando una incógnita, por ejemplo $\underline{x=\lambda}$, resulta: $\underline{y=2-\lambda}$, siendo el valor de z: $z=1-x-y=1-\lambda-2+\lambda=\underline{-1=z}$.

$$\underline{\underline{Solución:\ \begin{cases}x=\lambda\\y=2-\lambda,\ \ \forall\lambda\in R\\z=-1\end{cases}}}$$

****

2º) a) Determina la función verificando las siguientes condiciones: $h(0)=0$, $h'(0)=9$ y $h''(x)=-6x$ para todo $x \in R$.

b) Razona si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera o falsa. En el caso de que consideres que la afirmación es falsa por un ejemplo ilustrativo.

I) Si una función, $f: R \to R$, es continua y creciente, entonces es derivable en todo R.

II) La recta $y = mx + 2$ es tangente a la función $g(x)=2mx^2 - x + 4$ en x = 1 para cualquier valor del parámetro m.

----

a)

De la expresión $h''(x)=-6x$ se deduce lo siguiente:

$$h'(x)=\int h''(x)\cdot dx=\int(-6x)\cdot dx=-6\int x\cdot dx=-6\cdot\frac{x^2}{2}+K_1=\underline{-3x^2+K_1=h'(x)}.$$

Teniendo en cuenta que $h'(0)=9 \Rightarrow -3\cdot 0^2+K_1=9$;; $K_1=9 \Rightarrow \underline{h'(x)=-3x^2+9}$.

De la expresión $h'(x)=-3x^2+9$ se deduce:

$$h(x)=\int h'(x)\cdot dx=\int(-3x^2+9)\cdot dx=-3\cdot\frac{x^3}{3}+9x+K_2=\underline{-x^3+9x+K_2=h(x)}.$$

Teniendo en cuenta que $h(0)=0 \Rightarrow K_2=0$.

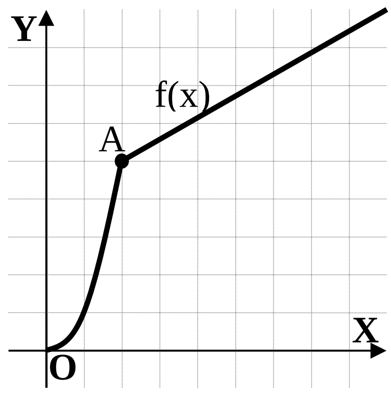
La función pedida es: $\underline{\underline{h(x)=-x^3+9x}}$.

b)

I) Si una función, $f: R \to R$, es continua y creciente, entonces es derivable en todo R.

Es falso.

Un ejemplo es la función de la gráfica adjunta.



La función f(x) es continua creciente y sin embargo no es derivable en A.

II) La recta $y = mx + 2$ es tangente a la función $g(x)=2mx^2 - x + 4$ en x = 1 para cualquier valor del parámetro m.

La derivada de una función en un punto es el valor de la tangente a la función en ése punto.

La derivada de la función g(x) es: $g'(x) = 4mx - 1$.

Para x = 1 es: $\underline{g'(1) = 4m - 1}$.

Por otra parte el valor de la pendiente (tangente) de la recta es m, por lo tanto:

La afirmación es falsa.

****

3º) Considera la recta: $s \equiv \begin{cases} x = 5 + t \\ y = t \\ z = -2 - 2t \end{cases} \quad (r \in R)$.

a) Halla un punto A de la recta s que equidiste de los puntos B(1, 0, 1) y C(2, 4, -2).

b) Calcula el área del triángulo cuyos vértices son los puntos B(1, 0, 1) y C(2, 4, -2) y D(11, 0, 0).

----

a)

Un punto genérico de la recta s es $A(5+t,\ t,\ -2-2t)$.

Si el punto A de la recta s equidista de los puntos B(1, 0, 1) y C(2, 4, -2) tiene que cumplirse que: $\overline{AB} = \overline{AC}$.

$$\overline{AB} = \sqrt{(5+t-1)^2 + (t-0)^2 + (-2-2t-1)^2} = \sqrt{(4+t)^2 + t^2 + (-3-2t)^2}.$$

$$\overline{AC} = \sqrt{(5+t-2)^2 + (t-4)^2 + (-2-2t+2)^2} = \sqrt{(3+t)^2 + (t-4)^2 + (-2t)^2}.$$

$$\sqrt{(4+t)^2 + t^2 + (-3-2t)^2} = \sqrt{(3+t)^2 + (t-4)^2 + (-2t)^2} \ ;;$$

$$(4+t)^2 + t^2 + (-3-2t)^2 = (3+t)^2 + (t-4)^2 + (-2t)^2 \ ;;$$

$$16 + 8t + t^2 + t^2 + 9 + 12t + 4t^2 = 9 + 6t + t^2 + t^2 - 8t + 16 + 4t^2 \ ;; \ 8t + 12t = 6t - 8t \ ;;$$

$$20t = -2t \ ;; \ 22t = 0 \ ;; \ \underline{t = 0}.$$

<u>El punto pedido es A(5, 0, -2)</u>

b)

Los puntos B(1, 0, 1) y C(2, 4, -2) y D(11, 0, 0) determinan los vectores $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{BD}$ y $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AD}$, que son los siguientes:

$$\overrightarrow{u} = \overrightarrow{BD} = D - B = (11,\ 0,\ 0) - (1,\ 0,\ 1) = (10,\ 0,\ -1).$$

$$\overrightarrow{v} = \overrightarrow{CD} = D - C = (11,\ 0,\ 0) - (2,\ 4,\ -2) = (9,\ -4,\ 2).$$

Sabiendo que el área del triángulo es la mitad del módulo del producto vectorial de los dos vectores que lo determinan:

$$S = \frac{1}{2} \cdot \left| \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} \right| = \frac{1}{2} \cdot \left\| \begin{matrix} i & j & k \\ 10 & 0 & -1 \\ 9 & -4 & 2 \end{matrix} \right\| = \frac{1}{2} \cdot \left| -9j - 40k - 4i - 20j \right| = \frac{1}{2} \cdot \left| -4i - 29j - 40k \right| =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(-4)^2 + (-29)^2 + (-40)^2} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{16 + 841 + 1600} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2457} \cong \underline{\underline{24'78\ u^2 = S}}\,.$$

****

OPCIÓN 2

1º) Considera la matriz: $A = \begin{pmatrix} 0 & m & 3 \\ m & \frac{1}{3} & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, donde $m \in R$.

a) Indica para qué valores del parámetro m la matriz es regular (inversible).

b) Para m > 3 razona si $B = \begin{pmatrix} 0 & m & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{3} & -1 & -1 \end{pmatrix}$ es la matriz inversa de A.

c) Para m = 0 determina las matrices diagonales D que cumplen: A · D = D · A.

----

a)

Una matriz es regular o inversible cuando su determinante es distinto de cero.

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & m & 3 \\ m & \frac{1}{3} & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -3m + 2m - 2 + m^2 = m^2 - m - 2 = 0.$$

$$m = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} \Rightarrow \underline{m_1 = -1} \;;;\; \underline{m_2 = 2}.$$

$$\underline{\underline{La\ \ matriz\ \ A\ \ es\ \ regular\ \ (inversible)\ \ \forall m \in R,\ \{m \neq -1,\ \ m \neq 2\}}}$$

b)

La matriz B es la inversa de A cuando se cumple que A · B = B · A = I, siendo I la matriz unidad de orden 3.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & m & 3 \\ m & \frac{1}{3} & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & m & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{3} & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+0+1 & 0+0-3 & 0+m-3 \\ 0+0+\frac{1}{3} & m^2+0-1 & 3m+\frac{1}{3}-1 \\ 0-0-\frac{1}{3} & 2m-0+1 & 6-1+1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -3 & m-3 \\ \frac{1}{3} & m^2-1 & 3m-\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & 2m+1 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{A \cdot B \neq I,\ \forall m \in R}.$$

$$\underline{\underline{La\ \ matriz\ \ B\ \ no\ \ es\ \ inversa\ \ de\ \ A,\ \ \forall m \in R}}$$

c)

Para m = 0 es $A=\begin{pmatrix}0 & 0 & 3\\ 0 & \frac{1}{3} & 1\\ 2 & -1 & -1\end{pmatrix}$. Su matriz inversa, que se va a obtener por el método de Gauss-Jordan, es la siguiente:

$$(A/I)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{3} & 1 & 0 & 1 & 0\\ 2 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right) \Rightarrow \{F_1 \leftrightarrow F_3\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc}2 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & \frac{1}{3} & 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0\end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{F_1 \to \tfrac{1}{2}F_1\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2}\\ 0 & \frac{1}{3} & 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0\end{array}\right) \Rightarrow \{F_2 \to 3F_3\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2}\\ 0 & 1 & 3 & 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0\end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{F_1 \to F_1 + \tfrac{1}{2}F_2\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 1 & 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2}\\ 0 & 1 & 3 & 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0\end{array}\right) \Rightarrow \{F_3 \to \tfrac{1}{3}F_3\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 1 & 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2}\\ 0 & 1 & 3 & 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & 0 & 0\end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l}F_1 \to F_1 - F_3\\ F_2 \to F_2 - 3F_3\end{array}\right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2}\\ 0 & 1 & 0 & -1 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & 0 & 0\end{array}\right) \Rightarrow \underline{A^{-1}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{3} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2}\\ -1 & 3 & 0\\ \frac{1}{3} & 0 & 0\end{pmatrix}}.$$

Las matrices D pedidas son de la forma $D=\lambda \cdot A^{-1},\ \forall \lambda R\ (\lambda \neq 0)$.

$$\underline{\underline{Solución:\ D=\lambda \cdot \begin{pmatrix}-\frac{1}{3} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2}\\ -1 & 3 & 0\\ \frac{1}{3} & 0 & 0\end{pmatrix},\ \forall \lambda \in R\ (\lambda \neq 0)}}$$

Por ejemplo, para $\lambda = 6$ es $D=\begin{pmatrix}-2 & 9 & 3\\ -6 & 18 & 0\\ 2 & 0 & 0\end{pmatrix}$:

$$\left.\begin{array}{l} A \cdot D=\begin{pmatrix}0 & 0 & 3\\ 0 & \frac{1}{3} & 1\\ 2 & -1 & -1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}-2 & 9 & 3\\ -6 & 18 & 0\\ 2 & 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6 & 0 & 0\\ 0 & 6 & 0\\ 0 & 0 & 6\end{pmatrix}\\ D \cdot A=\begin{pmatrix}-2 & 9 & 3\\ -6 & 18 & 0\\ 2 & 0 & 0\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}0 & 0 & 3\\ 0 & \frac{1}{3} & 1\\ 2 & -1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6 & 0 & 0\\ 0 & 6 & 0\\ 0 & 0 & 6\end{pmatrix}\end{array}\right\} \Rightarrow \underline{A \cdot D = D \cdot A}.$$

****

2º) Considera la función $f : R \to R$ definida por $f(x) = \begin{cases} x^2 & si \quad x < 0 \\ 2x & si \quad x \geq 0 \end{cases}$.

a) Determina si la función es derivable en x = 0.

b) Estudia el crecimiento y decrecimiento de f y dibuja su gráfica.

c) Calcula el área de la región limitada por la gráfica de la función f, el eje de abscisas (y = 0) y las rectas verticales x = -3 y x = 2.

----

a)

Para que una función sea derivable en un punto es condición necesaria que sea continua en ese punto.

Para que f(x) sea continua para x = 0 tiene que cumplirse que los límites por la izquierda y por la derecha sean iguales, e igual al valor de la función en ese punto:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} x^2 = \underline{0} \\ \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} (2x) = \underline{0} = f(0) \end{array}\right\} \Rightarrow \text{ f(x) es continua para x = 0.}$$

Una función es derivable en un punto si, y solo si, existen la derivada por la izquierda y por la derecha en ese punto y además, son iguales.

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & si \quad x < 0 \\ \\ 2 & si \quad x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'(0^-) = 2 \cdot 0 = \underline{0} \\ \\ f'(0^+) = \underline{2} \end{cases} \Rightarrow \underline{f'(0^-) \neq f'(0^-)}.$$

<u>La función f(x) no es derivable en x = 0.</u>

b)

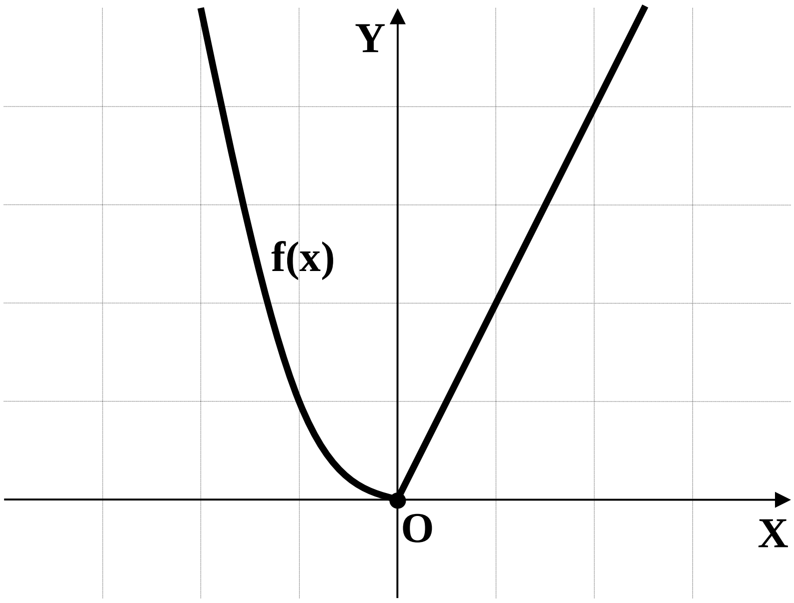
Para x < 0 es $f'(x) < 0$ y para x > 0 es $f'(x) = 2 > 0$. Teniendo en cuenta lo anterior y que el dominio de la función es R:

$$\underline{\underline{Decrecimiento: \ (-\infty, \ 0)}}$$

$$\underline{\underline{Crecimiento: \ (0, \ +\infty)}}$$

La representación gráfica de la función es, por la izquierda del origen una parábola convexa $(\cup)$ con vértice en el origen, y por la derecha del origen es una recta afín que tiene de pendiente m = 2.

En la figura adjunta se representa gráficamente la función.



c)

Como el área de la región limitada por la gráfica de la función f, el eje de abscisas (y = 0) y las rectas verticales x = -3 y x = 2 esta toda ella en la parte positiva del eje de ordenadas su valor es el siguiente:

$$S=\int_{-3}^{0} x^2 \cdot dx+\int_{0}^{2} 2x \cdot dx=\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-3}^{0}+\left[\frac{2x^2}{2}\right]_{0}^{2}=0-\left[\frac{(-3)^3}{3}\right]+2^2-0^2=9+4=\underline{\underline{13\ u^2=S}}$$

****

3º) Considera los puntos A(0, 1, -2), B(1, 2, 0), C(0, 0, 1) y D(1, 0, m), donde $m \in R$.

a) Determina el valor del parámetro m para que los cuatro puntos sean coplanarios.

b) Calcula el punto de plano $\pi \equiv x + y - z - 2 = 0$ más próximo al punto C.

----

a)

Los puntos A(0, 1, -2), B(1, 2, 0), C(0, 0, 1) y D(1, 0, m) son coplanarios cuando los vectores que determinan, $\{\overrightarrow{u}, \ \overrightarrow{v} \ \ y \ \ \overrightarrow{w}\}$, son linealmente dependientes.

$$\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB} = B - A = (1, \ 2, \ 0) - (0, \ 1, \ -2) = (1, \ 1, \ 2).$$

$$\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC} = C - A = (0, \ 0, \ 1) - (0, \ 1, \ -2) = (0, \ -1, \ 3).$$

$$\overrightarrow{w} = \overrightarrow{AD} = D - A = (1, \ 0, \ m) - (0, \ 1, \ -2) = (1, \ -1, \ m+2).$$

Los vectores $\{\overrightarrow{u}, \ \overrightarrow{v} \ \ y \ \ \overrightarrow{w}\}$ son linealmente dependientes cuando el rango de la matriz que determinan es menor que tres, o sea: que el determinante que forman es 0.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & m+2 \end{vmatrix} = 0 \ ;; \ -(m+2) + 3 + 2 + 3 = 0 \ ;; \ 8 - m - 2 = 0 \ ;; \ 6 - m = 0 \ ;; \ \underline{m = 6}.$$

<u>Los puntos A, B, C y D son coplanarios cuando m = 6.</u>

b)

El plano $\pi \equiv x + y - z - 2 = 0$ tiene como vector director o normal a $\overrightarrow{n} = (1, \ 1, \ -1)$.

La recta que pasa por C(0, 0, 1) y tiene como vector director a $\overrightarrow{n}$ es, expresada por unas ecuaciones paramétricas la siguiente: $r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 - \lambda \end{cases}$.

El punto P más cercano de C a π es la intersección del plano π y la recta r:

$$\left. \begin{array}{l} \pi \equiv x + y - z - 2 = 0 \\ r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 - \lambda \end{cases} \end{array} \right\} \Rightarrow \lambda + \lambda - (1 - \lambda) - 2 = 0 \ ;; \ 2\lambda - 1 + \lambda - 2 = 0 \ ;; \ 3\lambda - 3 = 0 \ ;; \ \underline{\lambda = 1}.$$

<u>El punto pedido es P(1, 1, 0).</u>

****