

PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)**UNIVERSIDAD DE CANTABRIA****JUNIO - 2009**

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II**Tiempo máximo: 1 hora y 30 minutos**

- 1.- Debe escogerse una sola de las opciones.
- 2.- Debe exponerse con claridad el planteamiento de la respuesta o el método utilizado para su resolución. Todas las respuestas deben ser razonadas.
- 3.- No se permite el uso de calculadoras gráficas ni programables.

BLOQUE 1

1º) Justifica si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera o falsa. En caso de que consideres que la afirmación es falsa pon un ejemplo ilustrativo.

a) Si A y B son dos matrices cuadradas cualesquiera, entonces $A \cdot B = B \cdot A$.

b) Si B es una matriz cuadrada, entonces $(I + B)^2 = I + 2B + B^2$.

c) La suma de matrices regulares (invertibles) es una matriz regular (invertible).

a)

En general, es falso. Sin embargo, existen matrices que cumplen la propiedad conmutativa.

Ejemplo: Las matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ cumplen que $A \cdot B = B \cdot A$.

$$\left. \begin{array}{l} A \cdot B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+6 & -2+8 \\ 3+6 & 6+8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 9 & 14 \end{pmatrix} \\ B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+6 & 2+4 \\ -3+12 & 6+8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 9 & 14 \end{pmatrix} \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{A \cdot B = B \cdot A}.$$

En particular se cumple siempre que $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$.

b)

Es verdadera.

$$(I+B)^2 = (I+B) \cdot (I+B) = I^2 + I \cdot B + B \cdot I + B^2 = I + B + B + B^2 = \underline{I + 2B + B^2}.$$

c)

En general, es falso.

Por ejemplo, la matriz identidad y su opuesta son inversibles y su suma, que es la matriz nula, no es inversible.

2º) De un sistema de ecuaciones lineales con tres incógnitas se sabe que tiene un parámetro $m \in R$ tal que:

1 -- Si se multiplica por la primera incógnita se obtiene el resultado de restar al número 1 la suma de las otras dos incógnitas.

2 -- Si se multiplica por la segunda incógnita se obtiene el resultado de restar al parámetro m la suma de las otras dos incógnitas.

3 -- Si se multiplica por la tercera incógnita se obtiene el resultado de restar al cuadrado de m la suma de las otras dos incógnitas.

a) Formula el sistema de ecuaciones lineales descrito.

b) Determina para qué valores de m el sistema es compatible determinado.

c) Determina para qué valores de m el sistema es compatible indeterminado y calcula todas las soluciones.

a)

$$\text{El sistema resulta: } \left. \begin{array}{l} mx = 1 - y - z \\ my = m - x - z \\ mz = m^2 - x - y \end{array} \right\} \text{ equivalente a } \left\{ \begin{array}{l} mx + y + z = 1 \\ x + my + z = m \\ \underline{\underline{x + y + mz = m^2}} \end{array} \right.$$

b)

Para que el sistema sea compatible determinado es necesario que la matriz de coeficientes tenga rango tres, o sea, que su determinante sea distinto de cero.

$$\text{La matriz de coeficientes es } M = \begin{pmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{pmatrix}.$$

$$|M| = \begin{vmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{vmatrix} = m^3 + 1 + 1 - m - m - m = m^3 - 3m + 2 = 0. \text{ Resolviendo por Ruffini:}$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & -3 & 2 \\ 1 & & 1 & 1 & -2 \\ \hline & 1 & 1 & -2 & \boxed{0} \\ 1 & & 1 & 2 & \\ \hline & 1 & 2 & & \boxed{0} \\ -2 & & -2 & & \\ \hline & 1 & & & \boxed{0} \end{array}$$

Las raíces diferentes son $m = 1$ y $m = -2$.

$$\text{Para } \begin{cases} m \neq 1 \\ m \neq -2 \end{cases} \Rightarrow \text{Rango } M = 3 = n^\circ \text{ incóg.} \Rightarrow \text{Compatible determinado}$$

c)

Para $m = 1$ la matriz ampliada es $M' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, en cuyo caso la matriz de coeficientes y la matriz ampliada tienen rango 1.

$$\text{Para } m = 1 \Rightarrow \text{Rango } M = \text{Rango } M' = 1 < n^\circ \text{ incóg.} \Rightarrow \text{Compatible indeterminado}$$

(con dos grados de libertad)

El sistema se transforma en la ecuación $x + y + z = 1$, cuyas soluciones son:

$$\text{Solución: } \begin{cases} x = 1 - \lambda - \mu \\ y = \lambda \\ z = \mu \end{cases}, \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

Para $m = 2$ es $M' = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, cuyo rango es 3 por ser:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 16 + 1 + 2 - 2 - 4 - 4 = 19 - 10 = 9 \neq 0.$$

$$\text{Para } m = 2 \Rightarrow \text{Rango } M = 2 ; ; \text{Rango } M' = 3 \Rightarrow \text{Incompatible}$$

BLOQUE 2

1º) Considera la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{si } x < -1 \\ -\frac{1}{x} & \text{si } -1 \leq x < 0 \\ x^2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$.

a) Determina si la función es continua en los puntos $x = -1$ y $x = 0$.

b) En el intervalo $(-1, 0)$ estudia si f crece o decrece, su curvatura y si tiene asíntotas.

c) Razona si la función es derivable en $x = -1$ y dibuja su gráfica para $x \in [-2, 2]$.

a)

La función $f(x)$ es continua para todo \mathbb{R} , excepto para los valores $x = -1$ y $x = 0$, que es dudosa su continuidad. Para que la función sea continua para $x = -1$ tiene que cumplirse que los límites por la izquierda y por la derecha sean iguales, e iguales al valor de la función en ese punto:

$$\text{Para } x = -1 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} (x+2) = \underline{1} \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \left(-\frac{1}{x}\right) = f(-1) = \underline{1} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = f(-1) = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)}.$$

La función es continua para $x = -1$

Para que la función sea continua para $x = 0$ tiene que cumplirse que los límites por la izquierda y por la derecha sean iguales, e iguales al valor de la función en ese punto:

$$\text{Para } x = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{x}\right) = \underline{+\infty} \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 = f(0) = \underline{0} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \neq f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)}.$$

La función no es continua para $x = 0$

b)

En el intervalo $(-1, 0)$ la función es $f(x) = -\frac{1}{x}$.

$$f'(x) = -\frac{-1}{x^2} = \frac{1}{x^2} > 0, \forall x \in (-1, 0).$$

La función $f(x)$ es monótona creciente en $(-1, 0)$.

$$f''(x) = \frac{-1 \cdot 2x}{x^4} = -\frac{2}{x^3} > 0, \forall x \in (-1, 0).$$

La función es convexa (U) en su dominio.

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = -\infty.$$

La recta $x = 0$ (eje Y) es asíntota vertical de la función.

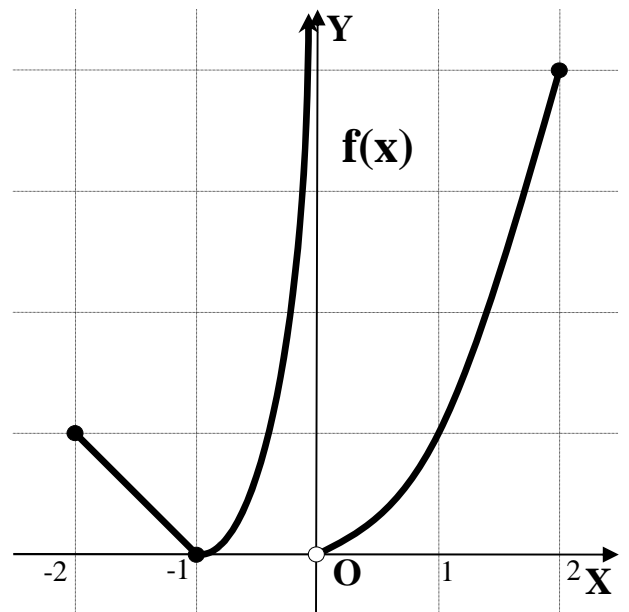
c)

Para que la función $f(x)$ sea derivable en $x = -1$ es necesario que sea continua para $x = -1$, cosa que hemos comprobado en el apartado a).

Para que la función sea derivable para $x = 1$ tiene que ser derivable por la izquierda y por la derecha y ser ambas derivadas iguales.

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < -1 \\ \frac{1}{x^2} & \text{si } x \geq -1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(-1) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < -1 \\ 1 & \text{si } x \geq -1 \end{cases}$$



La función $f(x)$ es derivable en $x = -1$.

La gráfica de $f(x)$ para $x \in [-2, 2]$ es la que aparece en el dibujo adjunto.

2º) a) Considera la función $g(x) = x^3 + px^2 + q$. Determina las constantes p y q sabiendo que, en $x = 2$, g alcanza un valor mínimo: 3.

b) Halla una función $f : R \rightarrow R$ que sea una primitiva de $f(x) = x$ y que su gráfica pase por el punto $A(1, 2)$.

c) Justifica si es verdadera o falsa la afirmación siguiente: “Una función polinómica de segundo grado no tiene puntos de inflexión” Si la consideras falsa pon un ejemplo ilustrativo.

a)

$$g'(x) = 3x^2 + 2px \Rightarrow g'(0=2) \Rightarrow 3 \cdot 2^2 + 2p \cdot 2 = 0 \;; \; 12 + 4p = 0 \;; \; 3 + p = 0 \Rightarrow \underline{\underline{p = -4}}.$$

$$g(2) = 3 \Rightarrow 2^3 + 4 \cdot 2^2 + q = 3 \;; \; 8 + 16 + q = 3 \;; \; q = 3 - 24 \Rightarrow \underline{\underline{q = -21}}.$$

b)

Una primitiva de $f(x) = x$ es $F(x) = \int x \cdot dx = \underline{\underline{\frac{x^2}{2} + C = F(x)}}$.

Teniendo en cuenta que $F(1) = 2 \Rightarrow \frac{1^2}{2} + C = 2 \;; \; C = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$.

La función pedida es $\underline{\underline{F(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{3}{2} = \frac{1}{2}(x^2 + 3)}}$.

c)

Es cierto.

Para que una función tenga un punto de inflexión es necesario que su segunda derivada sea cero y su tercera derivada sea distinta de cero.

Si la función polinómica es de segundo grado, la tercera derivada es siempre cero, por lo cual no puede tener puntos de inflexión.

BLOQUE 3

1º) a) Sean \vec{u} y \vec{v} dos vectores tales que $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = 17$ y $|\vec{u}| = 9$. Calcula el módulo del vector \vec{v} .

b) Considera los vectores $\vec{a} = (2, -1, 4)$ y $\vec{b} = (0, 3, m)$ con $m \in R$. Hallar el valor de m para que \vec{a} y \vec{b} sean ortogonales. Para $m = 0$ calcula el área del paralelogramo que tiene por lados los vectores \vec{a} y \vec{b} .

a)

$$\begin{aligned} & (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = 17 \quad ; ; \quad \vec{u} \cdot \vec{u} - \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{u} - \vec{v} \cdot \vec{v} = \\ & = |\vec{u}| \cdot |\vec{u}| \cdot \cos 0 - |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos \alpha + |\vec{v}| \cdot |\vec{u}| \cdot \cos(-\alpha) - |\vec{v}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos 0 = \\ & = |\vec{u}| \cdot |\vec{u}| \cdot 1 - |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos \alpha + |\vec{v}| \cdot |\vec{u}| \cdot \cos \alpha - |\vec{v}| \cdot |\vec{v}| \cdot 1 = \\ & = |\vec{u}|^2 - |\vec{v}|^2 = 17 \quad ; ; \quad 9^2 - |\vec{v}|^2 = 17 \quad ; ; \quad 81 - 17 = |\vec{v}|^2 \quad ; ; \quad |\vec{v}|^2 = 64 \Rightarrow \underline{\underline{|\vec{v}| = 8}}. \end{aligned}$$

b)

Dos vectores son ortogonales (perpendiculares) cuando su producto escalar es 0.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Rightarrow (2, -1, 4) \cdot (0, 3, m) = 0 \quad ; ; \quad 0 - 3 + 4m = 0 \quad ; ; \quad 4m = 3 \Rightarrow \underline{\underline{m = \frac{3}{4}}}.$$

Para $m = 0$ es $\vec{b} = (0, 3, 0)$.

El área de un paralelogramo es el módulo del producto vectorial de los vectores que lo determinan:

$$S = |\vec{a} \times \vec{b}| = \left| \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & 0 \end{vmatrix} \right| = |6k - 12j| = 6 \cdot |-2j + k| = 6 \cdot \sqrt{(-2)^2 + 1^2} = \underline{\underline{6\sqrt{5} u^2 = S}}.$$

2º) Considera los planos $\pi_1 \equiv x - 2y + 2z + 1 = 0$, la recta $r \equiv \begin{cases} x - y = 0 \\ z + 1 = 0 \end{cases}$ y el punto $A(1, 0, -1)$.

a) Halla una ecuación general del plano que pasa por el punto A, es perpendicular a π_1 y además es paralelo a la recta r.

b) Se desea construir un cuadrado que tenga un vértice en el punto A y un lado sobre la recta s. Determina la longitud de un lado del cuadrado y las coordenadas del vértice que está en la recta r y es consecutivo al vértice A.

a)

Un vector director de r puede ser cualquiera que sea linealmente dependiente del producto vectorial de los vectores normales de los planos que la determinan, que son los siguientes: $\vec{n}_1 = (1, -1, 0)$ y $\vec{n}_2 = (0, 0, 1)$.

$$\vec{v}'_r = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -i - j \Rightarrow \vec{v}_r = (1, 1, 0).$$

El vector normal de $\pi_1 \equiv x - 2y + 2z + 1 = 0$ es $\vec{n} = (1, -2, 2)$.

La ecuación general del plano pedido es la siguiente:

$$\pi(A; \vec{v}_r, \vec{n}) = \begin{vmatrix} x-1 & y & z+1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 0 \quad ; \quad 2(x-1) - 2(z+1) - (z+1) - 2y = 0 \quad ;$$

$$2(x-1) - 3(z+1) - 2y = 0 \quad ; \quad 2x - 2 - 3z - 3 - 2y = 0.$$

$$\underline{\underline{\pi \equiv 2x - 2y - 3z - 5 = 0}}$$

b)

El haz de planos γ perpendiculares a la recta r tiene por ecuación general la siguiente: $\gamma \equiv x + y + D = 0$.

De los infinitos planos del haz γ , el que contiene al punto $A(1, 0, -1)$ es el que satisface su ecuación:

$$\left. \begin{array}{l} \gamma \equiv x + y + D = 0 \\ A(1, 0, -1) \end{array} \right\} \Rightarrow 1 + 0 + D = 0 \quad ; \quad \underline{\underline{D = -1}} \Rightarrow \underline{\underline{\beta \equiv x + y - 1 = 0}}.$$

El punto B intersección de la recta r con el plano β es el vértice buscado:

$$r \equiv \begin{cases} x - y = 0 \\ z + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \underline{z = -1} ;; 2x - 1 = 0 ;; \underline{x = \frac{1}{2}} ;; y = x = \underline{\frac{1}{2}} = y \Rightarrow \underline{\underline{B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1\right)}}.$$

$$\beta \equiv x + y - 1 = 0$$

La longitud del lado del cuadrado es la longitud del segmento \overline{AB} :

$$\overline{AB} = \sqrt{\left(\frac{1}{2} - 1\right)^2 + \left(\frac{1}{2} - 0\right)^2 + (-1 + 1)^2} = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} + 0} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{2}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ unid.} = \underline{\underline{\overline{AB}}}.$$
