PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

JUNIO - 2008

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

1.-El examen consta de tres bloques de ejercicios y cada bloque tiene dos opciones. De cada bloque debe escogerse uno sola de las opciones (A o B).

2.- Debe exponerse con claridad el planteamiento de la respuesta o el método utilizado para su resolución. Todas las respuestas deben ser razonadas.

3.- No se permite el uso de calculadoras gráficas ni programables.

BLOQUE 1

1-A) Considera el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} x - y + mz = 0 \\ mx + y - z = 0 \\ (m+1)x + z = 0 \end{cases}$, donde $m \in R$.

a) Determina para qué valores de m el sistema es compatible determinado.

b) Determina para que valores de m el sistema es compatible indeterminado.

c) Calcula $A^{-1} \cdot B$, siendo A la matriz de coeficientes del sistema y $B = \begin{pmatrix} m \\ m \\ m+1 \end{pmatrix}$ y m > 3.

(Indicación: no se necesita calcular A^{-1})

----

a)

Se trata de un sistema homogéneo, por lo cual las matrices de coeficientes y ampliada son equivalentes, o sea, tienen el mismo rango para cualquier valor de m.

El sistema es compatible determinado cuando el rango de la matriz de coeficientes es igual al número de incógnitas; en este caso, tres.

La solución del sistema en ese caso es la trivial: x = 0, y = 0, z = 0.

La matriz de coeficientes es $M=\begin{pmatrix} 1 & -1 & m \\ m & 1 & -1 \\ m+1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. El rango de M es tres cuando su determinante sea distinto de cero:

$$|M|=\begin{vmatrix} 1 & -1 & m \\ m & 1 & -1 \\ m+1 & 0 & 1 \end{vmatrix}=1+(m+1)-m(m+1)+m=1+m+1-m^2-m+m=-m^2+m+2=0 \;\;;;$$

$$m^2-m-2=0 \;\;;;\;\; m=\frac{1\pm\sqrt{1+8}}{2}=\frac{1\pm\sqrt{9}}{2}=\frac{1\pm 3}{2} \Rightarrow \underline{m_1=-1} \;\;;;\;\; \underline{m_2=2}$$

$$Para \begin{Bmatrix} m\neq -1 \\ m\neq 2 \end{Bmatrix} \Rightarrow Rango\ \ M=3=n^{o}\ \ incóg. \Rightarrow Sistema\ \ Compatible\ \ Deter\min ado$$

b)

El sistema es compatible indeterminado cuando los rangos de las matrices de coeficientes y ampliada son iguales y menores que el número de incógnitas.

Teniendo en cuenta que el rango de M es mayor o igual que 2, independientemente del valor de m, por existir el menor $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}\neq 0$, el sistema será compatible indeterminado para los valores de m que hacen Rango M = 2.

$$Para \begin{Bmatrix} m=-1 \\ m=2 \end{Bmatrix} \Rightarrow Rango\ \ M=2<n^{o}\ \ incóg. \Rightarrow Sistema\ \ Compatible\ \ In\det er\min ado$$

c)

El sistema $\begin{cases} x-y+mz=m \\ mx+y-z=m \\ (m+1)x+z=m+1 \end{cases}$ puede expresarse de forma matricial del modo siguiente: $A\cdot X=B$, siendo $X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} m \\ m \\ m+1 \end{pmatrix}$.

Multiplicando la expresión $A\cdot X=B$ por la izquierda por A^{-1}, resulta:

$$A^{-1}\cdot A\cdot X=A^{-1}\cdot B \;\;;;\;\; I\cdot X=A^{-1}\cdot B \Rightarrow \underline{A^{-1}\cdot B=X}.$$

$$A^{-1}\cdot B=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

****

1-B) Se desea hallar los números naturales de tres cifras que cumplen las tres condiciones siguientes:

La suma de las tres cifras es un múltiplo de 10.

La suma de las dos primeras cifras es igual a la tercera.

El triple de la primera cifra es igual al doble de la segunda.

a) Formula un sistema de ecuaciones lineales adecuado al problema planteado.

b) Comprueba que el sistema formulado es compatible.

c) Determina el número natural de tres cifras que verifica el enunciado propuesto.

----

a)

Sea N = (abc), no como producto, el representante de todos los números de tres cifras que buscamos.

Según las condiciones impuestas tiene que cumplirse lo siguiente:

$a+b+c=10 \;\; o \;\; a+b+c=20$, por ser la suma de tres dígitos menor que 30.

$a+b=c$ y $3a=2b$.

Pueden formarse los dos siguientes sistemas: $\underline{\underline{\begin{cases} a+b+c=10 \\ a+b-c=0 \\ 3a-2b=0 \end{cases}}}$ y $\underline{\underline{\begin{cases} a+b+c=20 \\ a+b-c=0 \\ 3a-2b=0 \end{cases}}}$.

b)

Según el Teorema de Rouché-Fröbenius, el sistema será compatible cuando las matrices de coeficientes y ampliada tengan el mismo rango.

La matriz de coeficientes es $M=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$, cuyo rango es el siguiente:

$$Rango\ \ M \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \end{vmatrix} = -2-3-3-2=-10 \neq 0 \Rightarrow \underline{Rango\ \ M'=3}.$$

La matriz ampliada M’ tiene también rango 3, por lo cual:

<u>El sistema es compatible determinado.</u>

c)

Los números que satisfacen las condiciones indicadas son los siguientes:

$$\begin{cases} a+b+c=10 & (1) \\ a+b-c=0 & (2) \\ 3a-2b=0 & (3) \end{cases} \Rightarrow (1)+(2) \Rightarrow 2a+2b=10 \Rightarrow \left.\begin{matrix} 2a+2b=10 \\ 3a-2b=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 5a=10 \;;\; \underline{a=2}$$

$$3a-2b=0 \;;\; 3\cdot 2-2b=0 \;;\; 6=2b \;;\; \underline{b=3} \;;\; a+b+c=10 \;;\; 2+3+c=10 \;;\; \underline{c=5}$$

Un número que cumple las condiciones pedidas es el N = 235.

Considerando ahora el sistema $\begin{cases} a+b+c=20 \\ a+b-c=0 \\ 3a-2b=0 \end{cases}$, su resolución es:

$$\begin{cases} a+b+c=20 & (1) \\ a+b-c=0 & (2) \\ 3a-2b=0 & (3) \end{cases} \Rightarrow (1)+(2) \Rightarrow 2a+2b=20 \Rightarrow \left.\begin{matrix} 2a+2b=20 \\ 3a-2b=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 5a=20 \;;\; \underline{a=4}$$

$$3a-2b=0 \;;\; 3\cdot 4-2b=0 \;;\; 12=2b \;;\; \underline{b=6} \;;\; a+b+c=20 \;;\; 4+6+c=20 \;;\; \underline{c=10}?$$

Como c no es un dígito, la solución es única:

$$\underline{\underline{N=235}}$$

****

BLOQUE 2

2-A) Considera la función $f : R \to R$ definida por $f(x) = \dfrac{|x|}{1+x^2}$.

a) Estudia su derivabilidad (calcula la derivada donde exista y justifica la no existencia de derivada donde proceda).

b) Comprueba que tiene como eje de simetría el eje de ordenadas (función simétrica respecto a OY).

c) Determina el punto de corte con los ejes, los intervalos de crecimiento, los puntos de inflexión y las asíntotas de f. Haz su representación gráfica.

----

a)

La función f puede redefinirse de la forma $f(x) = \begin{cases} \dfrac{-x}{1+x^2} & si \quad x < 0 \\ \\ \dfrac{x}{1+x^2} & si \quad x \geq 0 \end{cases}$

La función es continua en R por ser $1 + x^2 \neq 0, \ \forall x \in R$ y derivable en R, excepto para x = 0, cuya derivabilidad es dudosa y que vamos a determinar a continuación.

Una función es derivable en un punto si la función es continua en ese punto y sus derivadas por la izquierda y por la derecha son iguales.

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{-1 \cdot (1+x^2) - (-x) \cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \dfrac{-1 - x^2 + 2x^2}{(1+x^2)^2} = \dfrac{x^2 - 1}{(1+x^2)^2} & si \quad x < 0 \\ \\ \dfrac{1 \cdot (1+x^2) - x \cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \dfrac{1 + x^2 - 2x^2}{(1+x^2)^2} = \dfrac{1 - x^2}{(1+x^2)^2} & si \quad x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f'(0^-) = \dfrac{0^2 - 1}{(1+0^2)^2} = \dfrac{-1}{1} = \underline{-1} \\ \\ f'(0^+) = \dfrac{1 - 0^2}{(1+0^2)^2} = \dfrac{1}{1} = \underline{1} \end{cases} \Rightarrow \underline{f'(0^-) \neq f'(0^+)}$$

<u>La función no es derivable para x = 0.</u>

b)

Una función es simétrica con respecto al eje de ordenadas cuando es f(x) = f(-x).

$$f(-x)=\frac{|-x|}{1+(-x)^2}=\frac{|x|}{1+x^2}=f(x)\ \Rightarrow$$

La función f(x) es simétrica con respecto al eje Y, como debíamos demostrar.

c)

Por ser f(0) = 0 la función corta a los ejes en el punto O(0, 0).

Considerando la derivada de la función: $f'(x)=\begin{cases}\frac{x^2-1}{(1+x^2)^2} & si\ \ x<0\\ \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} & si\ \ x\geq 0\end{cases}$, y que $(1+x^2)^2$ es positivo para cualquier valor real de x, los periodos de crecimiento y decrecimiento son los siguientes:

$$\underline{\underline{Creciente\ \Rightarrow\ f'(x)>0\ \Rightarrow\ x\in(-\infty,\ -1)\cup(0,\ 1)}}$$

$$\underline{\underline{Decreciente\ \Rightarrow\ f'(x)<0\ \Rightarrow\ x\in(-1,\ 0)\cup(1,\ +\infty)}}$$

Los puntos de inflexión son los valores de x que anulan la segunda derivada:

$$f''(x)=\begin{cases}\frac{2x\cdot(1+x^2)^2-(x^2-1)\cdot 2(1+x^2)\cdot 2x}{(1+x^2)^4}=\frac{2x+2x^3-4x^3+4x}{(1+x^2)^3}=\frac{2x(6-x^2)}{(1+x^2)^3} & si\ \ x<0\\ \frac{-2x\cdot(1+x^2)^2-(1-x^2)\cdot 2(1+x^2)\cdot 2x}{(1+x^2)^4}=\frac{-2x-2x^3-4x+4x^3}{(1+x^2)^3}=\frac{2x(x^2-6)}{(1+x^2)^3} & si\ \ x\geq 0\end{cases}$$

Teniendo en cuenta que la función no es derivable para x = 0 (por consiguiente no puede tener punto de inflexión), que es simétrica con respecto al eje OY, los puntos de inflexión son los siguientes:

$$6-x^2=0\ \ ;;\ \ x^2=6\ \ ;;\ \ \underline{x_1=\sqrt{6}}\ \ ;;\ \ \underline{x_2=-\sqrt{6}}\ .$$

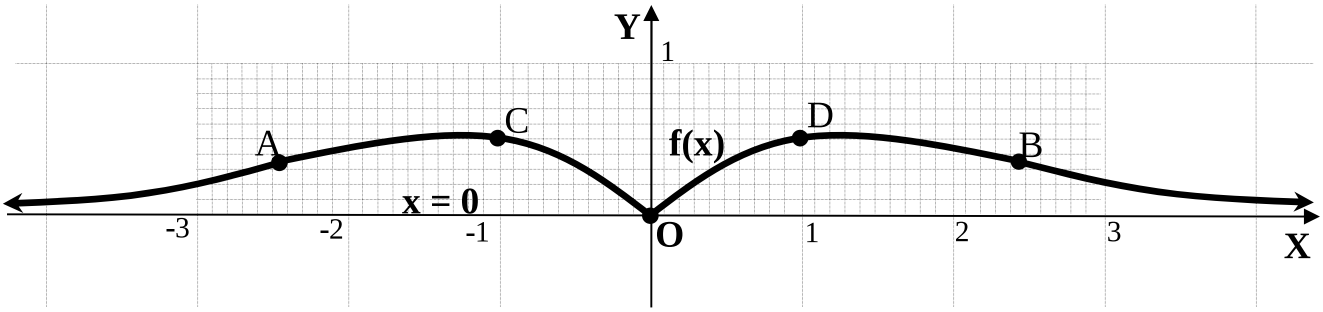
$$f(\pm\sqrt{6})=\frac{|\sqrt{6}|}{1+(\sqrt{6})^2}=\frac{\sqrt{6}}{7}\ \Rightarrow\ \underline{\underline{Puntos\ \ de\ \ inflexión:\ A\left(-\sqrt{6},\ \frac{\sqrt{6}}{7}\right)\ \ y\ \ B\left(\sqrt{6},\ \frac{\sqrt{6}}{7}\right)}}$$

La función f(x) solamente puede tener asíntotas horizontales; no puede tener asíntotas verticales por ser distinto de cero el denominador para cualquier valor real de x y no puede tener asíntotas oblicuas por no tener el numerador un grado más que el denominador.

Las asíntotas horizontales son de la forma y = k, siendo:

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{|x|}{1+x^2} = 0 \Rightarrow \underline{\underline{La \ \ recta \ \ y=0 \ \ (Eje \ \ OX) \ \ es \ \ asíntota \ \ horizontal}}$$

Teniendo en cuenta que la función tiene máximos absolutos para los valores de $|x| = 1$, que son los puntos $C\left(-1, \ \frac{1}{2}\right)$ y $D\left(1, \ \frac{1}{2}\right)$, que $f(x) \geq 0, \ \ \forall x \in R$, la representación gráfica, aproximada, de la función es la siguiente:



****

2-B) Razona si son derivables en el punto x = 0 cada una de las dos funciones siguientes:

a) $f: R \to R$ definida por $f(x) = \begin{cases} x^2 & si \quad x \neq 0 \\ 1 & si \quad x = 0 \end{cases}$.

b) $g: R \to R$ definida por $g(x) = \begin{cases} x^2 \cdot sen\,\frac{1}{x} & si \quad x \neq 0 \\ 0 & si \quad x = 0 \end{cases}$.

Justifica si es verdadera o falsa cada una de las afirmaciones siguientes. Para cada afirmación que consideres falsa por un ejemplo ilustrativo.

c) Si $h: R \to R$ es una función tal que $\lim_{x \to a^-} h'(x) = \lim_{x \to a^+} h'(x)$, entonces h es derivable en x = a.

d) Si una función real de variable real es continua en un punto, entonces es derivable en ese punto.

----

a)

Para que una función sea derivable en un punto es condición necesaria que sea continua en ese punto.

La función f(x) es continua para todo R, excepto para el valor x = 0, que es dudosa su continuidad. Para que la función sea continua para x = 0 tiene que cumplirse que los límites por la izquierda y por la derecha sean iguales, e iguales al valor de la función en ese punto:

$$Para \quad x = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0} x^2 = 0^2 = \underline{0} \\ \\ \lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0} x^2 = 0^2 = \underline{0} \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{f(0) = 1 \neq \lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x)}$$

La función no es continua para x = 0, por lo tanto:

$$\underline{\underline{La \quad función \quad no \quad es \quad derivable \quad para \quad x = 0}}$$

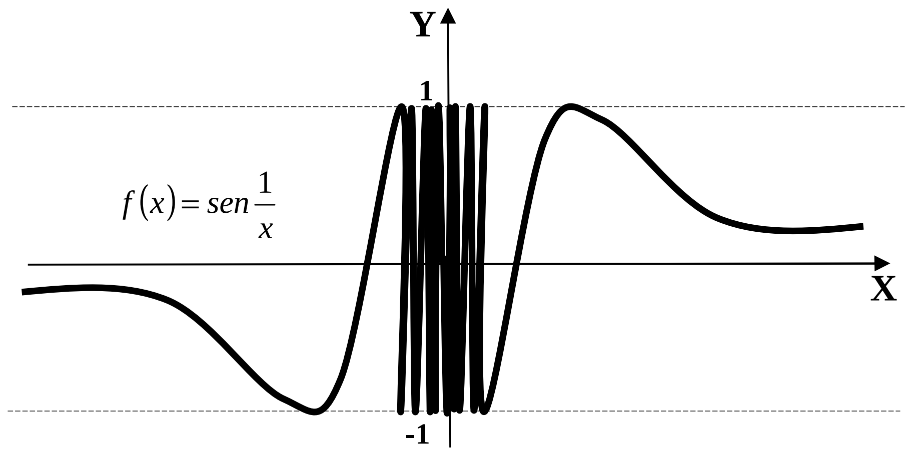
b)

Para justificar la derivabilidad de la función $g: R \to R \Rightarrow g(x) = \begin{cases} x^2 \, sen\,\frac{1}{x} & si \quad x \neq 0 \\ 0 & si \quad x = 0 \end{cases}$

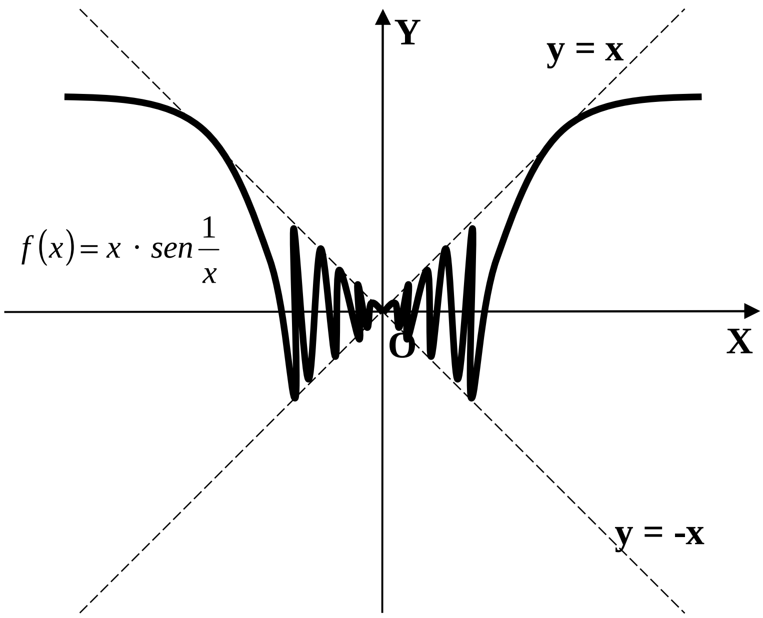
son necesarios, según mi criterio, los siguientes razonamientos previos:

La función $f(x) = sen\,\dfrac{1}{x}$ no es derivable para x = 0 por no estar definida para este valor. Tiene para x = 0 una discontinuidad de tipo esencial o de segunda especie, por lo tanto carece de límite por no tener límites laterales.

La representación gráfica, aproximada, de la función es la siguiente:



Otro ejemplo de aproximación a la pregunta formulada es la función definida como $f(x) = x \cdot sen\,\dfrac{1}{x}$. En este caso las ondas senoidales no oscilan entre -1 y 1, como en el caso de la función $f(x) = sen\,\dfrac{1}{x}$, sino que se establecen entre las rectas y = -x e y = x, como se aprecia en la siguiente figura.



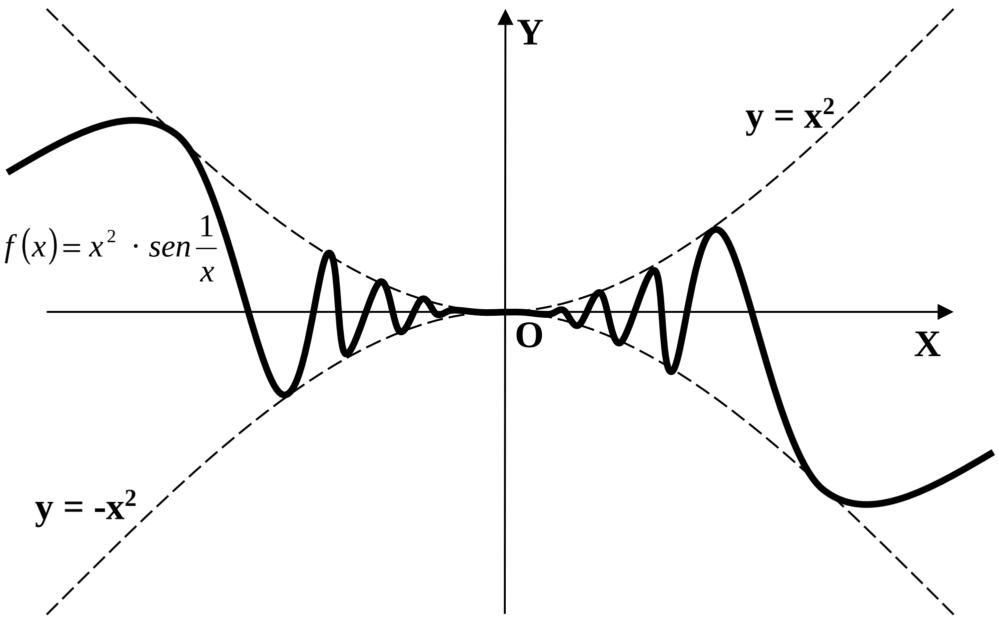
En este caso la función tiene límites laterales para x = 0, que ambos son 0, por lo cual, definiendo como f(0) = 0, la función es continua para x = 0. Sin embargo la función no es derivable para x = 0, como se demuestra a continuación:

$f'(x) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x \cdot sen\frac{1}{x} - 0}{x} = \lim\limits_{x \to 0} sen\,\dfrac{1}{x}$; éste límite no existe, como vimos en el principio de la explicación, por lo tanto la función no es derivable para x = 0.

Finalmente abordamos la cuestión: demostrar si para x = 0 es derivable o no la función $f(x)=x^2 \cdot sen\,\frac{1}{x}$.

Aunque la función es parecida a la anterior se diferencia se diferencian en que la estudiada, $\left[f(x)=x \cdot sen\,\frac{1}{x}\right]$, las ondas senoidales estaban comprendidas entre las rectas y = x e y = -x, mientras que en la función $f(x)=x^2 \cdot sen\,\frac{1}{x}$, las ondas senoidales estás comprendidas entre las parábolas y = x^2 e y = -x^2, que cambia radicalmente la cuestión.

La representación gráfica de la función $f(x)=x^2 \cdot sen\,\frac{1}{x}$ es la siguiente:



Definiendo la función como f(0) = 0, la función $f(x)=x^2 \cdot sen\,\frac{1}{x}$ es continua para x = 0, pues los límites laterales existen y ambos son 0.

Veamos si es derivable:

$$f'(x)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2 \cdot sen\frac{1}{x}-0}{x}=\lim_{x\to 0}\left(x \cdot sen\,\frac{1}{x}\right)=0\,.$$

$$\underline{\underline{La \quad función \quad f(x)=x^2 \cdot sen\,\frac{1}{x} \quad es \quad derivalbe \quad para \quad x=0}}$$

c)

Siendo $h: R \to R$ una función tal que $\lim\limits_{x\to a^-} h'(x)=\lim\limits_{x\to a^+} h'(x)$, entonces h es derivable en x = a, <u>es cierto.</u>

Es condición suficiente que una función es derivable en un punto si existen las derivadas laterales y ambas son iguales.

d)

Si una función real de variable real es continua en un punto, entonces es derivable en ese punto. Es falso.

La condición de continuidad de una función en un punto para que sea derivable es necesaria, pero no suficiente. Por ejemplo, la función $f(x)=|x|$ es continua en x = 0 y, sin embargo, no es derivable para x = 0, por ser sus derivadas laterales por la izquierda y por la derecha –1 y 1, respectivamente.

****

BLOQUE 3

3-A) a) Prueba que si dos vectores $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$ tienen el mismo módulo, entonces los vectores $\overrightarrow{u+v}$ y $\overrightarrow{u-v}$ son ortogonales.

b) Considera los vectores $\overrightarrow{x} = (-1,\ 2,\ 3)$ e $\overrightarrow{y} = (2,\ 3,\ -1)$.

1) Razona si son linealmente independientes los vectores $\overrightarrow{x+y}$ y $\overrightarrow{s-y}$.

2) Calcula el área del paralelogramo que tiene tres vértices consecutivos en los puntos A(1, 5, 2), O(0, 0, 0) y B(-3, -1, 4).

----

a)

Supongamos que $\left(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\right) \cdot \left(\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}\right) = 0$. Entonces tiene que ser:

$$\left(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\right) \cdot \left(\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}\right) = 0 \;\Rightarrow\; \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u} - \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} + \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u} - \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{v} =$$

$$= \left|\overrightarrow{u}\right| \cdot \left|\overrightarrow{u}\right| \cdot \cos\ 0 - \left|\overrightarrow{u}\right| \cdot \left|\overrightarrow{v}\right| \cdot \cos\ \alpha + \left|\overrightarrow{v}\right| \cdot \left|\overrightarrow{u}\right| \cdot \cos\ (-\alpha) - \left|\overrightarrow{v}\right| \cdot \left|\overrightarrow{v}\right| \cdot \cos\ 0 =$$

$$= \left|\overrightarrow{u}\right| \cdot \left|\overrightarrow{u}\right| \cdot 1 - \left|\overrightarrow{u}\right| \cdot \left|\overrightarrow{v}\right| \cdot \cos\ \alpha + \left|\overrightarrow{v}\right| \cdot \left|\overrightarrow{u}\right| \cdot \cos\ \alpha - \left|\overrightarrow{v}\right| \cdot \left|\overrightarrow{v}\right| \cdot 1 =$$

$$= \left|\overrightarrow{u}\right|^2 - \left|\overrightarrow{v}\right|^2 = 0 \;\;;;\;\; \left|\overrightarrow{u}\right|^2 = \left|\overrightarrow{v}\right|^2 \;\Rightarrow\; \underline{\underline{\left|\overrightarrow{u}\right| = \left|\overrightarrow{v}\right|}}$$

b)

1)

$$\overrightarrow{x+y} = \overrightarrow{x} + \overrightarrow{y} = (-1,\ 2,\ 3) + (2,\ 3,\ -1) = (1,\ 5,\ 2)$$

$$\overrightarrow{x-y} = \overrightarrow{x} - \overrightarrow{y} = (-1,\ 2,\ 3) - (2,\ 3,\ -1) = (-3,\ -1,\ 4)$$

$$\frac{1}{-3} \neq \frac{5}{-1} \neq \frac{2}{4} \;\Rightarrow\; \underline{\underline{\overrightarrow{x+y}\ \ y\ \ \overrightarrow{s-y}\ \ son\ \ linealmente\ \ independientes}}$$

2)

Los vectores que determinan el paralelogramo son los siguientes:

$$\overrightarrow{OA} = \underline{(1,\ 5,\ 2)} \;\; y \;\; \overrightarrow{OB} = \underline{(-3,\ -1,\ 4)}.$$

El área del paralelogramo que determinan los vectores $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$ es igual que el módulo del producto vectorial de los vectores, por lo tanto:

$$S_{PARALELO.} = \left| \overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB} \right| = \left\| \begin{matrix} i & j & k \\ 1 & 5 & 2 \\ -3 & -1 & 4 \end{matrix} \right\| = \left| 20i - 6j - k + 15k + 2i - 4j \right| = \left| 22i - 10j + 14k \right| =$$

$$= 2 \cdot \left| 11i - 5j + 7k \right| = 2 \cdot \sqrt{11^2 + (-5)^2 + 7^2} = 2 \cdot \sqrt{121 + 25 + 49} = \underline{\underline{2\sqrt{195}\ u^2 \cong 27'93\ u^2 S_{PARALELO.}}}$$

****

3-B) Considera las rectas $r \equiv \begin{cases} x+y-z-4=0 \\ x+2y-7=0 \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x-2=0 \\ y+5=0 \end{cases}$.

a) Estudia la posición relativa de las rectas r y s.

b) Halla un punto A de r y otro punto B de s tales que $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB}$ sea perpendicular a ambas rectas.

c) ¿Cuántos cuadrados se pueden construir teniendo un vértice en el punto A y un lado en la recta s? Calcula su área.

----

a)

Realizamos el estudio de la posición relativa de las rectas por vectores directores.

En primer lugar expresamos las rectas por ecuaciones paramétricas:

$$r \equiv \begin{cases} x+y-z-4=0 \\ x+2y-7=0 \end{cases} \Rightarrow z=\lambda \;;;\; \left.\begin{matrix} x+y=4+\lambda \\ x+2y=7 \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} -x-y=-4-\lambda \\ x+2y=7 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \underline{y=3-\lambda}$$

$$x+2y=7 \;;;\; x=7-2y=7-2(3-\lambda)=7-6+2\lambda=\underline{1+2\lambda=x} \Rightarrow \underline{r \equiv \begin{cases} x=1+2\lambda \\ y=3-\lambda \\ z=\lambda \end{cases}}$$

$$s \equiv \begin{cases} x-2=0 \\ y+5=0 \end{cases} \Rightarrow \underline{z=\lambda} \;;;\; \underline{x=2} \;;;\; \underline{y=-5} \Rightarrow \underline{s \equiv \begin{cases} x=2 \\ y=-5 \\ z=\lambda \end{cases}}$$

Un punto y un vector director de cada recta son: $\begin{cases} r \Rightarrow \underline{\overrightarrow{a}=(2,\ -1,\ 1)} \;;;\; \underline{P(1,\ 3,\ 0)} \\ \\ s \Rightarrow \underline{\overrightarrow{b}=(0,\ 0,\ 1)} \;;;\; \underline{Q(2,\ -5,\ 0)} \end{cases}$.

Evidentemente los vectores directores son linealmente independientes, lo cual significa que las recta r y s se cruzan o se cortan. Para diferenciar el caso vamos a determinar un vector $\overrightarrow{c}$ tal que tenga como origen un punto de r, P(1, 3, 0) y como extremo un punto de s, Q(2, -5, 0):

$$\overrightarrow{c}=\overrightarrow{PQ}=Q-P=(2,\ -5,\ 0)-(1,\ 3,\ 0)=(1,\ -8,\ 0).$$

Si los vectores $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ y $\overrightarrow{c}$ son coplanarios, las rectas se cortan; en caso contrario, se cruzan.

Tres vectores son coplanarios cuando el rango de la matriz que determinan es menor que tres.

$$Rango\ \left\{\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}\right\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -8 & 0 \end{vmatrix} = -1+16 = 15 \neq 0 \ \Rightarrow\ \underline{Rango\ \left\{\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}\right\} = 3}$$

<u>Las rectas r y s se cruzan.</u>

b) Halla un punto A de r y otro punto B de s tales que $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ sea perpendicular a ambas rectas.

Un punto genérico de r es $A(1+2\lambda,\ 3-\lambda,\ \lambda)$.

Un punto genérico de s es $B(2,\ -5,\ \lambda)$.

El vector pedido es $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ es el siguiente:

$$\vec{v} = \overrightarrow{AB} = B - A = (2,\ -5,\ \lambda) - (1+2\lambda,\ 3-\lambda,\ \lambda) = (1-2\lambda,\ -8+\lambda,\ 0).$$

Sabiendo que el producto vectorial de dos vectores es un vector perpendicular común a cada uno de los vectores factores, el vector $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ tiene que ser linealmente dependiente del producto vectorial de los vectores directores de las rectas:

$$\overrightarrow{w'} = \vec{a} \wedge \vec{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -i - 2j = (-1,\ -2,\ 0)$$

Tiene que cumplirse que: $\frac{1-2\lambda}{-1} = \frac{-8+\lambda}{-2}$;; $2-4\lambda = -8+\lambda$;; $10 = 5\lambda$;; $\underline{\lambda = 2}$.

Siendo $A(1+2\lambda,\ 3-\lambda,\ \lambda)$ y $B(2,\ -5,\ \lambda)$, los puntos pedidos son:

<u>A(5, 1, 2) y B(2, -5, 2)</u>

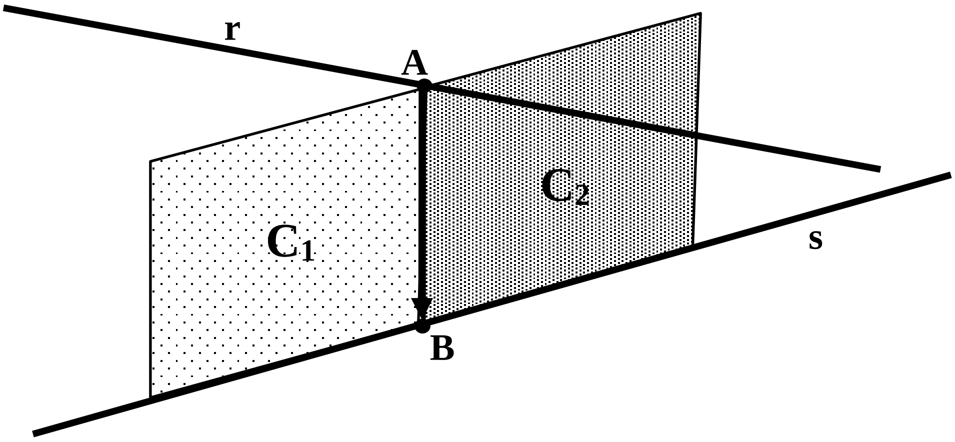
c)

<u>Se pueden construir dos cuadrados con vértice en A y uno de sus lados contenido en la recta s.</u>

Con objeto de ilustrar la solución dada se hace un dibujo que facilita la comprensión de la solución dada.

La superficie es el cuadrado del vector $\vec{v} = \overrightarrow{AB} = (-3,\ -6,\ 0)$:

$$S_{CUADRADO} = \sqrt{(-3)^2 + (-6)^2 + 0^2} = \sqrt{9+36} = \sqrt{45} = \underline{\underline{3\sqrt{5}\ u^2 = S_{CUADRADO}}}$$


r
A
C$_2$
C$_1$
s
B

****