

**PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)****UNIVERSIDAD DE CANTABRIA****SEPTIEMBRE - 2007**

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

**MATEMÁTICAS II****Tiempo máximo: 1 hora y 30 minutos**

- 1.-El examen consta de tres bloques de ejercicios y cada bloque tiene dos opciones. De cada bloque debe escogerse una sola de las opciones (A o B).
- 2.- Debe exponerse con claridad el planteamiento de la respuesta o el método utilizado para su resolución. Todas las respuestas deben ser razonadas.
- 3.- No se permite el uso de calculadoras gráficas ni programables.

**BLOQUE 1**

1-A) a ) Calcula la expresión analítica de una función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  que verifique las condiciones siguientes:

a1 )  $f'(x) = 2x^3 - 6x^2$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ .

a2 ) El valor mínimo de  $\{f(x) : x \in \mathbb{R}\}$  es  $-12$ .

b ) Calcula los puntos de inflexión de la función  $f$  y en cada uno de ellos determina la ecuación de la recta tangente a la gráfica de  $f$ .

c ) Justifica en cuántos puntos corta la gráfica de  $f$  a los ejes de coordenadas.

Indicación: no es necesario calcular los puntos de corte.

-----

a )

La función pedida  $f$ , según la condición a1) tiene que ser una función primitiva de la función  $f'(x) = 2x^3 - 6x^2$ , o sea:

$$f(x) = \int (2x^3 - 6x^2) \cdot dx = \frac{2x^4}{4} - \frac{6x^3}{3} + C = \frac{1}{2}x^4 - 3x^3 + C = \underline{\underline{f(x)}}$$

Considerando la condición a2), vamos a determinar los mínimos relativos de la función.

$$f'(x)=0 \Rightarrow 2x^3 - 6x^2 = 0 \quad ; ; \quad 2x^2(x-3)=0 \Rightarrow \underline{x_1=0} \quad ; ; \quad \underline{x_2=3}.$$

$$f''(x)=6x^2 - 12x = 6x(x-2) \Rightarrow \begin{cases} f''(0)=0 \rightarrow (\text{para punto de inflexión}) \\ f''(3)=18 > 0 \Rightarrow \underline{\text{Mínimo para } x=3} \end{cases}$$

Por ser -12 el valor de la función en el mínimo, tiene que cumplirse que  $f(3)=12$ :

$$f(3)=\frac{1}{2} \cdot 3^4 - 3 \cdot 3^3 + C = 12 \quad ; ; \quad -\frac{1}{2} \cdot 3^4 + C = 12 \quad ; ; \quad C = 12 + \frac{81}{2} = \underline{\underline{\frac{105}{2}}} = C$$

$$\underline{\underline{f(x) = \frac{1}{2}x^4 - 3x^3 + \frac{105}{2}}}$$

b)

Para que exista un punto de inflexión es condición necesaria que se anule la segunda derivada y que, para esos valores no se anule la tercera derivada.

$$f''(x)=6x^2 - 12x = 6x(x-2) \Rightarrow \underline{x_1=0} \quad ; ; \quad \underline{x_2=2}$$

$$f'''(x)=12x - 12 = 12(x-1) \Rightarrow \begin{cases} f'''(0) = -12 \neq 0 \rightarrow \underline{\underline{P. I. para } x=0} \\ f'''(2) = 12 \neq 0 \rightarrow \underline{\underline{P. I. para } x=2} \end{cases}$$

$$f(x) = \frac{1}{2}x^4 - 3x^3 + \frac{105}{2} \Rightarrow \begin{cases} f(0) = \frac{105}{2} \rightarrow \underline{\underline{P. I. \Rightarrow A\left(0, \frac{105}{2}\right)}} \\ f(2) = 8 - 24 + \frac{105}{2} = \frac{73}{2} \rightarrow \underline{\underline{P. I. \Rightarrow B\left(2, \frac{73}{2}\right)}} \end{cases}$$

La recta tangente a una función en un punto tiene como pendiente el valor de la derivada de la función en ese punto, por lo que las pendientes de las tangentes en los puntos A y B son las siguientes:

$$f'(x) = 2x^3 - 6x^2 \Rightarrow \begin{cases} m_A = f'(0) = \underline{0} = m_A \\ m_B = 2 \cdot 2^3 - 6 \cdot 2^2 = 16 - 24 = \underline{-8} = m_B \end{cases}$$

Sabiendo que la ecuación de la recta que pasa por un punto conocida la pendiente

es  $y - y_0 = m(x - x_0)$ , las ecuaciones de las tangentes pedidas son:

$$\left. \begin{array}{l} A\left(0, \frac{105}{2}\right) \\ m_A = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow t_1 \equiv y - \frac{105}{2} = 0 \cdot (x - 0) \Rightarrow \underline{\underline{t_1 \equiv 2y - 105 = 0}}$$

$$\left. \begin{array}{l} B\left(2, \frac{73}{2}\right) \\ m_B = -8 \end{array} \right\} \Rightarrow t_2 \equiv y - \frac{73}{2} = -8 \cdot (x - 2) ; ; 2y - 73 = -16x + 32 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{t_2 \equiv 2y + 16x - 105 = 0}}$$

c) Justifica en cuántos puntos corta la gráfica de  $f$  a los ejes de coordenadas.

Indicación: no es necesario calcular los puntos de corte.

Para justificar los puntos de corte con los ejes tenemos en cuenta que  $f(x)$  es continua y derivable en su dominio, que es  $\mathbb{R}$ .

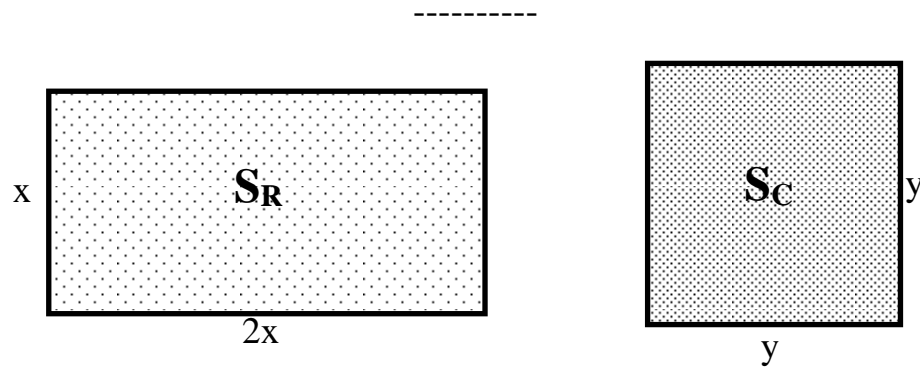
Por tener un mínimo, carecer de máximo y tener dos puntos de inflexión, el mínimo  $M(3, -12)$  es absoluto y, en consecuencia, el recorrido de la función es el siguiente:  $R(f) \Rightarrow [-12, +\infty)$ .

De lo anterior se deduce que

La función corta al eje X en dos puntos y, lógicamente, al de ordenadas en uno.

\*\*\*\*\*

1-B) Un hilo de 34 metros se divide en dos trozos para hacer un cuadrado y un rectángulo. Sabiendo que la base del rectángulo mide el doble que su altura y que se usa todo el hilo en las figuras geométricas indicadas, hallar las longitudes de los trozos de hilo para que la suma de las áreas del cuadrado y del rectángulo sea mínima.



La suma de los perímetros de las dos figuras es 34 metros:

$$\text{Perímetro} = P = 2 \cdot (x + 2x) + 4y = 6x + 4y = 34 \quad ; ; \quad 3x + 2y = 17 \quad ; ; \quad y = \frac{17 - 3x}{2}$$

$$\text{La superficie total es } S_T = S_R + S_C = 2x \cdot x + y^2 = 2x^2 + \frac{(17 - 3x)^2}{4} = S_T.$$

La superficie será mínima cuando su derivada sea cero:

$$S'_T = 4x + \frac{1}{4} \cdot 2(17 - 3x) \cdot (-3) = 4x - \frac{3}{2}(17 - 3x) = 7x - \frac{51}{2} = 0 \Rightarrow x = \frac{51}{14}$$

Sustituyendo el valor de  $x$  en la expresión de  $y$ , resulta:

$$y = \frac{17 - 3 \cdot \frac{51}{14}}{2} = \frac{238 - 153}{28} = \frac{85}{28} = y$$

Las longitudes de los trozos de hilo son las siguientes:

$$L_R = 6x = 6 \cdot \frac{51}{14} = \frac{153}{7} \text{ metros} = L_R \quad ; ; \quad L_C = 4y = 4 \cdot \frac{85}{28} = \frac{85}{7} \text{ metros} = L_C$$

\*\*\*\*\*

## BLOQUE 2

2-A) Considera el sistema de ecuaciones lineales 
$$\begin{cases} x + y + mz = 1 \\ mx + (m-1)y + z = m, \text{ donde } m \in \mathbb{R}. \\ x + y + z = m + 1 \end{cases}$$

a) Determina el carácter del sistema según los valores de  $m$ .

b) Resuelve el sistema cuando sea compatible determinado.

c) Modifica solamente un coeficiente de la última ecuación para que el sistema resultante sea compatible para cualquier valor de  $m$ .

a)

Las matrices de coeficientes y ampliada son:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & m \\ m & m-1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad M' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & m & 1 \\ m & m-1 & 1 & m \\ 1 & 1 & 1 & m+1 \end{pmatrix}$$

El rango de la matriz de coeficientes en función de  $m$  es el siguiente:

$$|M| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & m \\ m & m-1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = m-1 + m^2 + 1 - m(m-1) - 1 - m = m^2 - m^2 + m - 1 =$$

$$= m - 1 = 0 \Rightarrow \underline{m = 1}$$

Para  $m \neq 1 \Rightarrow \text{Rango } M = \text{Rango } M' = 3 = n^\circ \text{ incóg.} \Rightarrow \text{Compatible Determinado}$

$$\text{Para } m = 1 \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \{C_1 = C_3\} \Rightarrow \text{Rango } M' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 + 1 - 1 - 2 = -1 \neq 0 \Rightarrow \underline{\text{Rango } M' = 3}$$

Para  $m = 1 \Rightarrow \text{Rango } M = 2$  ;  $\text{Rango } M' = 3 \Rightarrow \text{Incompatible}$

b)

Resolvemos en el caso de compatible determinado por la Regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & m \\ m & m-1 & 1 \\ m+1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{m-1} = \frac{m-1+m^2+(m+1)-m(m^2-1)-1-m}{m-1} =$$

$$= \frac{-2+m^2+m+1-m^3+m}{m-1} = \frac{-m^3+m^2+2m-1}{m-1} = \underline{\underline{\frac{m^3-m^2-2m+1}{m-1}}} = x$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & m \\ m & m & 1 \\ 1 & m+1 & 1 \end{vmatrix}}{m-1} = \frac{m+m^2(m+1)+1-m^2-m-(m+1)}{m-1} = \frac{m^3+m^2+1-m^2-m-1}{m-1} =$$

$$= \frac{m^3-m}{m-1} = \frac{m(m^2-1)}{m-1} = \frac{m(m+1)(m-1)}{m-1} = \underline{\underline{m(m+1)}} = y$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m & m-1 & m \\ 1 & 1 & m+1 \end{vmatrix}}{m-1} = \frac{(m-1)(m+1)+m+m-(m-1)-m-m(m+1)}{m-1} =$$

$$= \frac{m^2-1+m-m+1-m^2-m}{m-1} = \underline{\underline{-\frac{m}{m-1}}} = z$$

c)

Según el Teorema de Rouché-Fröbenius, basta con que el término independiente de la última ecuación sea 1, con lo cual la matriz ampliada tiene iguales la primera y la cuarta columnas y, en consecuencia, los rangos de la matriz de coeficientes y ampliada tienen el mismo rango, independientemente del valor de m.

$$\text{Solución: } \begin{cases} x + y + mz = 1 \\ mx + (m-1)y + z = m \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$


---

\*\*\*\*\*

2-B) Considera la matriz  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & m \\ 1 & 1 & m \\ m & 0 & 1 \end{pmatrix}$ , donde  $m \in R$ .

a) Determina para qué valores de  $m$  la matriz  $A$  es regular (invertible).

b) Para  $m = 2$  resuelve los tres sistemas de ecuaciones siguientes:  $AX = e_1$ ,  $AY = e_2$  y  $AZ = e_3$ , donde  $e_1$ ,  $e_2$  y  $e_3$  son respectivamente la primera, segunda y tercera columna de la matriz unidad (identidad) de orden tres.

c) Calcula la matriz  $B$  que cumple:  $\frac{1}{3}AB - A = I$  para  $m = 2$ .

(Indicación: con los vectores  $X$ ,  $Y$  y  $Z$  del apartado anterior puedes construir  $A^{-1}$ ).

-----

a)

Una matriz es invertible cuando su determinante es distinto de cero:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & m \\ 1 & 1 & m \\ m & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 2m^2 - m^2 - 2 = 0 \quad ; \quad m^2 - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} m_1 = 1 \\ m_2 = -1 \end{cases}$$

$$\underline{\underline{A \text{ es invertible } \forall m \in R, \{m \neq 1, m \neq -1\}}}$$

b)

Este apartado puede resolverse de las dos formas siguientes:

Primera forma: Utilizando de matriz inversa de  $A$ :

$$\text{Para } m = 2 \text{ es } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, |A| = 2^2 - 1 = 3, A^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} \Rightarrow$$

$$\text{Adj}(A^T) = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 3 & -3 & 0 \\ -2 & 4 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ 1 & -1 & 0 \\ -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}}}$$

$$AX = e_1 \quad ; ; \quad A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot e_1 \quad ; ; \quad I \cdot X = A^{-1} \cdot e_1 \Rightarrow X = A^{-1} \cdot e_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ 1 & -1 & 0 \\ -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 1 \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}}} = X$$

$$AY = e_2 \quad ; ; \quad A^{-1} \cdot A \cdot Y = A^{-1} \cdot e_2 \quad ; ; \quad I \cdot Y = A^{-1} \cdot e_2 \Rightarrow Y = A^{-1} \cdot e_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Y = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ 1 & -1 & 0 \\ -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ -1 \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix}}} = Y$$

$$AZ = e_3 \quad ; ; \quad A^{-1} \cdot A \cdot Z = A^{-1} \cdot e_3 \quad ; ; \quad I \cdot Z = A^{-1} \cdot e_3 \Rightarrow Z = A^{-1} \cdot e_3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Z = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ 1 & -1 & 0 \\ -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ 0 \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}}} = Z$$

Segunda forma:

$$\text{Siendo } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \Rightarrow A \cdot X = e_1 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_3 = 0 \end{cases}$$

Resolviendo por Cramer:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{1}{3} \quad ; ; \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{3} = \underline{\underline{-1}} \quad ; ; \quad x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix}}{3} = \underline{\underline{-\frac{2}{3}}} \Rightarrow X = \underline{\underline{\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -1 \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}}}$$

$$\text{Siendo } Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \Rightarrow A \cdot Y = e_2 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} y_1 + 2y_2 + 2y_3 = 0 \\ y_1 + y_2 + 2y_3 = 1 \\ 2y_1 + y_3 = 0 \end{cases}$$



$$y_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = \underline{-\frac{2}{3}} \quad ; ; \quad y_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{3} = \underline{-1} \quad ; ; \quad y_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix}}{3} = \underline{\frac{4}{3}} \Rightarrow Y = \underline{\underline{\begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ -1 \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix}}}$$

$$\text{Siendo } Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} \Rightarrow A \cdot Z = e_3 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} z_1 + 2z_2 + 2z_3 = 1 \\ z_1 + z_2 + 2z_3 = 0 \\ 2z_1 + z_3 = 0 \end{cases}$$

$$z_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = \underline{\frac{2}{3}} \quad ; ; \quad z_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{3} = \underline{0} \quad ; ; \quad z_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{3} = \underline{-\frac{1}{3}} \Rightarrow Z = \underline{\underline{\begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ 0 \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}}}$$

c)

$$\frac{1}{3}AB - A = I \quad ; ; \quad A \cdot B - 3A = 3I \quad ; ; \quad A \cdot B = 3I + 3A = 3(I + A)$$

Multiplicando por la izquierda por  $A^{-1}$  en la última igualdad, queda:

$$A^{-1} \cdot A \cdot B = 3I + 3A = 3 \cdot A^{-1} \cdot (I + A) \quad ; ; \quad I \cdot B = 3 \cdot A^{-1} \cdot (I + A) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B = 3 \cdot A^{-1} \cdot (I + A) = 3 \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ 1 & -1 & 0 \\ -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \cdot \left[ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right] =$$

$$= 3 \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ 1 & -1 & 0 \\ -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} \frac{2}{3} - \frac{2}{3} + \frac{4}{3} & \frac{2}{3} - \frac{4}{3} + 0 & \frac{2}{3} - \frac{4}{3} + \frac{4}{3} \\ 2 - 1 + 0 & 2 - 2 + 0 & 2 - 2 + 0 \\ -\frac{4}{3} + \frac{4}{3} - \frac{2}{3} & -\frac{4}{3} + \frac{8}{3} - 0 & -\frac{4}{3} + \frac{8}{3} - \frac{2}{3} \end{pmatrix} =$$

$$= 3 \cdot \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ 1 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 3 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & 2 \end{pmatrix}}} = B$$

\*\*\*\*\*

### BLOQUE 3

3-A) Di si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas y justifica tu respuesta. Para las afirmaciones que consideres que son falsas pon un ejemplo ilustrativo.

a) Si tres vectores  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  y  $\vec{w}$  cumplen  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{w}$ , entonces  $\vec{v} = \vec{w}$ .

b) No existen dos vectores  $\vec{v}$  y  $\vec{w}$  cumpliendo  $|\vec{v}|=1$ ,  $|\vec{w}|=2$  y  $|\vec{v} \cdot \vec{w}|=3$ .

c) Si tres vectores  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  y  $\vec{w}$  son linealmente independientes, entonces también lo son los vectores  $\vec{u} + \vec{v}$ ,  $\vec{u} - \vec{v}$  y  $\vec{u} - \vec{v} + \vec{w}$ .

a)

Es falso.

Por ejemplo, si  $\vec{u} = (3, -2, 1)$ ,  $\vec{v} = (4, 1, -2)$  y  $\vec{w} = (3, 0, -1)$  se tiene que:

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u} \cdot \vec{v} = (3, -2, 1) \cdot (4, 1, -2) = 12 - 2 - 2 = 8 \\ \vec{u} \cdot \vec{w} = (3, -2, 1) \cdot (3, 0, -1) = 9 - 0 - 1 = 8 \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{w}}$$

Sin embargo  $\vec{v} \neq \vec{w}$ .

b)

Es cierto.

Teniendo en cuenta que  $\vec{v} \cdot \vec{w} = |\vec{v}| \cdot |\vec{w}| \cdot \cos \alpha$ , siendo  $\alpha$  el ángulo que forman los vectores, sería:

$$|\vec{v} \cdot \vec{w}| = \left| |\vec{v}| \cdot |\vec{w}| \cdot \cos \alpha \right| = |1 \cdot 2 \cdot \cos \alpha| = |2 \cdot \cos \alpha| < 3, \quad \forall \alpha \in R.$$

c)

Es cierto.

Si los vectores  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  y  $\vec{w}$  son linealmente independientes se puede establecer entre ellos una combinación lineal igual a cero:  $\alpha \cdot \vec{u} + \beta \cdot \vec{v} + \gamma \cdot \vec{w} = \vec{0}$ , siendo necesariamente,  $\alpha = \beta = \gamma = 0$ .

Vamos a demostrar que lo mismo se cumple con los vectores  $\vec{u} + \vec{v}$ ,  $\vec{u} - \vec{v}$  y  $\vec{u} - \vec{v} + \vec{w}$ .

$$\alpha \cdot (\vec{u} + \vec{v}) + \beta \cdot (\vec{u} - \vec{v}) + \gamma \cdot (\vec{u} - \vec{v} + \vec{w}) = \vec{0}, \text{ o tambi\u00e9n lo siguiente:}$$

$$(\alpha + \beta + \gamma) \cdot \vec{u} + (\alpha - \beta) \cdot \vec{v} + \gamma \cdot \vec{w} = \vec{0}$$

Como  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  y  $\vec{w}$  son linealmente independientes se tiene que cumplir que:

$$\left. \begin{array}{l} \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ \alpha - \beta = 0 \\ -\beta + \gamma = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Sin embargo: } \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -1 - 1 - 1 = -3 \neq 0, \text{ con lo cual la so-}$$

luci\u00f3n \u00fanica del sistema es la trivial, o sea:  $\alpha = \beta = \gamma = 0$ , lo cual demuestra, en efecto, que los vectores  $\vec{u} + \vec{v}$ ,  $\vec{u} - \vec{v}$  y  $\vec{u} - \vec{v} + \vec{w}$  son linealmente independientes.

\*\*\*\*\*

3-B) Considera la recta y los planos siguientes:

$$\frac{x-2}{-3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-4}{-1}, \pi_1 \equiv -3x+2y-z+2=0 \text{ y } \pi_2 \equiv 2x+2y-2z+3=0.$$

a) Determina la posición relativa de la recta con respecto a cada uno de los planos.

b) Determina la posición relativa de los dos planos.

c) Calcula la distancia de la recta al plano  $\pi_2$ .

a)

El vector director de la recta es  $\vec{v} = (-3, 2, -1)$  y los vectores normales de los planos son  $\vec{n}_1 = (-3, 2, -1)$  y  $\vec{n}_2 = (1, 1, -1)$ .

Por ser el vector director de la recta el mismo que el vector normal del plano  $\pi_1$ , la recta  $r$  es  $\perp$  al plano  $\pi_2$ .

Observando que  $\vec{v} \cdot \vec{n}_2 = (-3, 2, -1) \cdot (1, 1, -1) = -3+2+1=0$ , indica que los vectores son perpendiculares y en consecuencia, la recta  $r$  es paralela al plano  $\pi_1$ .

b)

Por ser  $\vec{v} \cdot \vec{n}_2 = \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0$ , los planos  $\pi_1$  y  $\pi_2$  son perpendiculares.

c)

La distancia entre  $r$  y el plano  $\pi_2$  es la misma que la distancia de un punto cualquiera de la recta al plano. Un punto de la recta  $r$  es, por ejemplo,  $P(2, 1, 4)$ .

Sabiendo que la distancia del punto  $P_0(x_0, y_0)$  al plano genérico de ecuación  $\pi \equiv Ax + By + Cz + D = 0$  es  $d(P_0, \pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$ ; aplicándola al punto  $P(2, 1, 4)$  y al plano  $\pi_2 \equiv 2x + 2y - 2z + 3 = 0$  es:

$$d(r, \pi_2) = d(P, \pi_2) = \frac{|2 \cdot 2 + 2 \cdot 1 - 2 \cdot 4 + 3|}{\sqrt{2^2 + 2^2 + (-2)^2}} = \frac{|4 + 2 - 8 + 3|}{\sqrt{4 + 4 + 4}} = \frac{1}{\sqrt{12}} = \frac{\sqrt{3}}{6} \text{ u} = \underline{\underline{d(r, \pi_2)}}$$

\*\*\*\*\*