

PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)**UNIVERSIDAD DE CANTABRIA****JUNIO - 2007**

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II**Tiempo máximo: 1 hora y 30 minutos**

- 1.-El examen consta de tres bloques de ejercicios y cada bloque tiene dos opciones. De cada bloque debe escogerse uno sola de las opciones (A o B).
- 2.- Debe exponerse con claridad el planteamiento de la respuesta o el método utilizado para su resolución. Todas las respuestas deben ser razonadas.
- 3.- No se permite el uso de calculadoras gráficas ni programables.

BLOQUE 1

1-A) Un cajero automático contiene 1.330 euros repartidos en billetes de tres tipos distintos: 10, 20 y m euros. En el cajero hay en total 97 billetes y el número de billetes de 10 euros es el doble del número de billetes de 20 euros.

- a) Plantea un sistema de ecuaciones lineales cuya resolución permita averiguar cuántos billetes hay de cada tipo.
- b) Prueba que para $m \in \{5, 50, 100, 200, 500\}$ el sistema es compatible determinado.
- c) Razona si en el cajero puede haber billetes de 100 euros.

a)

Siendo x, y, z el número de billetes de 10, 20 y m euros, respectivamente, sería:

$$\left. \begin{array}{l} 10x + 20y + mz = 1330 \\ x + y + z = 197 \\ x = 2y \end{array} \right\} \text{ o el sistema equivalente: } \left. \begin{array}{l} 10x + 20y + mz = 1330 \\ x + y + z = 197 \\ \underline{\underline{x - 2y = 0}} \end{array} \right\}.$$

b)

Para que el sistema sea compatible determinado es necesario que el rango de la matriz de coeficientes sea tres, es decir: el determinante que determinan tiene que ser

distinto de cero.

$$\text{La matriz de coeficientes es } M = \begin{pmatrix} 10 & 20 & m \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$|M| = \begin{vmatrix} 10 & 20 & m \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = -2m + 20 - m + 20 = 40 - 3m = 0 \Rightarrow \underline{m \notin N}$$

De lo anterior se deduce que:

Para $m \in \{5, 50, 100, 200, 500\}$ el sistema es C.D., como debíamos probar

c)

Para que en el cajero haya billetes de 100 euros es necesario que las soluciones del sistema que se obtiene sustituyendo m por 100 tenga soluciones en N .

$$\text{El sistema es } \left. \begin{array}{l} 10x + 20y + 100z = 1330 \\ x + y + z = 197 \\ x - 2y = 0 \end{array} \right\} \text{ o mejor: } \left. \begin{array}{l} x + 2y + 10z = 133 \\ x + y + z = 197 \\ x - 2y = 0 \end{array} \right\}.$$

Para resolverlo tenemos en cuenta que $x = 2y$, con lo cual resulta el sistema:

$$\left. \begin{array}{l} 2y + 2y + 10z = 133 \\ 2y + y + z = 197 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} 4y + 10z = 133 \\ 3y + z = 197 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} -4y - 10z = -133 \\ 30y + 10z = 1970 \end{array} \right\} \Rightarrow 26y = 1837 ;;$$

$$y = \frac{1837}{26} = 70'65 \Rightarrow \underline{y \notin N}$$

En el cajero no puede haber billetes de 100 euros.

1-B) Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} m & -1 & 4 \\ 3 & m & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, donde $m \in R$.

a) Determina para qué valores de m la matriz A es regular (invertible).

b) Para $m = 1$ resuelve el sistema de ecuaciones lineales: $AX = B$, con $B = \begin{pmatrix} 11 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$.

c) Calcula $C - A^{-1} \cdot B$, siendo $C = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$ y B definida en el apartado anterior.

Indicación: No se necesita calcular A^{-1} .

a)

Una matriz es invertible cuando su determinante es distinto de cero:

$$|A| = \begin{vmatrix} m & -1 & 4 \\ 3 & m & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = m^2 + 4m + 3 = 0 \quad ; \quad m = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} = \frac{-4 \pm 2}{2} \Rightarrow \begin{cases} m_1 = -1 \\ m_2 = -3 \end{cases}$$

A es invertible $\forall m \in R, \{m \neq -1, m \neq -3\}$

b)

Para $m = 1$ es $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $AX = B \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$, siendo $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. El sistema de ecuaciones lineales resultante es $\left. \begin{array}{l} x - y + 4z = 11 \\ 3x + y = 5 \\ -x + z = 2 \end{array} \right\}$.

Su resolución más sencilla es la siguiente:

$$x - y + 4z = 11 \Rightarrow \begin{cases} y = 5 - 3x \\ z = 2 + x \end{cases} \Rightarrow x - (5 - 3x) + 4(2 + x) = 11 \quad ; ;$$

$$x - 5 + 3x + 8 + 4x = 11 \quad ; ; \quad 8x = 8 \quad ; ; \quad \underline{x = 1}$$

$$\underline{\underline{Solución: \quad x = 1 \quad ; ; \quad y = 2 \quad ; ; \quad z = 3}}$$

c)

Si en la ecuación $AX = B$ multiplicamos los dos términos por la izquierda por A^{-1} resulta:

$$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B \quad ; ; \quad I \cdot X = A^{-1} \cdot B \quad ; ; \quad A^{-1} \cdot B = X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{C - A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}}}$$

BLOQUE 2

2-A) Considera la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \begin{cases} \text{sen } x & \text{si } x \leq 0 \\ bx + x^2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$ con $b \in \mathbb{R}$.

a) Calcula el valor de b para que f sea derivable en $x = 0$.

b) Para $b = -2$ y el intervalo $[-2\pi, 3]$, determina los puntos de corte con los ejes, extremos relativos (máximos y mínimos), la curvatura y dibuja la gráfica de la función de f .

c) Calcula el área comprendida entre la curva $y = \text{sen } x$ y la recta $y = 0$ en el intervalo $[-2\pi, 0]$.

a)

Para que una función sea derivable en un punto es condición necesaria que sea continua en ese punto.

Para que $f(x)$ sea continua para $x = 0$ tiene que cumplirse que los límites por la izquierda y por la derecha sean iguales, e igual al valor de la función en ese punto:

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \text{sen } x = \underline{0} = f(0) \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (bx + x^2) = \underline{0} \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{b \in \mathbb{R}}$$

La función es continua en $x = 0$ para cualquier valor real de b .

Una función es derivable en un punto si, y solo si, existen la derivada por la izquierda y la derivada por la derecha en ese punto y además, son iguales.

$$f'(x) = \begin{cases} \cos x & \text{si } x \leq 0 \\ b + 2x & \text{si } x > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'(0^-) = \underline{1} \\ f'(0^+) = \underline{b} \end{cases} \Rightarrow \underline{b = 1}$$

La función es derivable en $x = 0$ para $b = 1$.

b)

$$\text{Para } b = -2 \text{ la función es } f(x) = \begin{cases} \text{sen } x & \text{si } x \leq 0 \\ x^2 - 2x & \text{si } x > 0 \end{cases}.$$

En el intervalo $[-2\pi, 0]$ la función es $f(x) = \text{sen } x$.

Los puntos de corte con los ejes son los siguientes:

$$\text{sen } x = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_1 = 0 \\ x_2 = -\pi \\ x_3 = -2\pi \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{\underline{O(0, 0), A(-\pi, 0) \text{ y } B(-2\pi, 0)}}.$$

Los posibles extremos relativos son para los valores de x que anulan la primera

$$\text{derivada: } f'(x) = \cos x = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_1 = -\frac{\pi}{2} \\ x_2 = -\frac{3\pi}{2} \end{array} \right\}.$$

Para diferenciar entre máximos y mínimos se recurre a la segunda derivada; si los valores de la segunda derivada, para los valores que anulan la primera, son positivos o negativos, se tratará de mínimos o máximos, respectivamente.

$$f''(x) = -\text{sen } x \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} f''(-\frac{\pi}{2}) = -\text{sen}\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \text{sen}\frac{\pi}{2} = 1 > 0 \Rightarrow \underline{\underline{Mín. para } x = -\frac{\pi}{2}} \\ f''(-\frac{3\pi}{2}) = -\text{sen}\left(-\frac{3\pi}{2}\right) = \text{sen}\frac{3\pi}{2} = -1 < 0 \Rightarrow \underline{\underline{Máx. para } x = -\frac{3\pi}{2}} \end{array} \right.$$

$$f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \text{sen}\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1 \Rightarrow \underline{\underline{Mínimo}} \Rightarrow \underline{\underline{C\left(-\frac{\pi}{2}, -1\right)}}$$

$$f\left(-\frac{3\pi}{2}\right) = \text{sen}\left(-\frac{3\pi}{2}\right) = 1 \Rightarrow \underline{\underline{Máximo}} \Rightarrow \underline{\underline{D\left(-\frac{3\pi}{2}, 1\right)}}$$

La curvatura de la función la determina su segunda derivada: la función es convexa (\cup) en los intervalos donde la segunda derivada es negativa y cóncava (\cap) cuando la segunda derivada es positiva.

En el intervalo considerado $[-2\pi, 0]$ la curvatura es la siguiente:

$$f''(x) = -\text{sen } x \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} f''(x) < 0 \Rightarrow \underline{\underline{Convexa (\cup)}} \Rightarrow x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right) \\ f''(x) > 0 \Rightarrow \underline{\underline{Cóncava (\cap)}} \Rightarrow x \in \left(-2\pi, -\frac{3\pi}{2}\right) \end{array} \right.$$

En el intervalo $(0, 3]$ la función es $f(x) = x^2 - 2x$.

Los puntos de corte con los ejes son los siguientes:

$$x^2 - 2x = 0 \ ; \ ; \ x(x-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \underline{O(0, 0)} \text{ y } \underline{E(2, 0)}.$$

Los posibles extremos relativos son para los valores de x que anulan la primera derivada:

$$f'(x) = 2x - 2 = 2(x-1) = 0 \Rightarrow \underline{x=1}.$$

$$f''(x) = 2 > 0$$

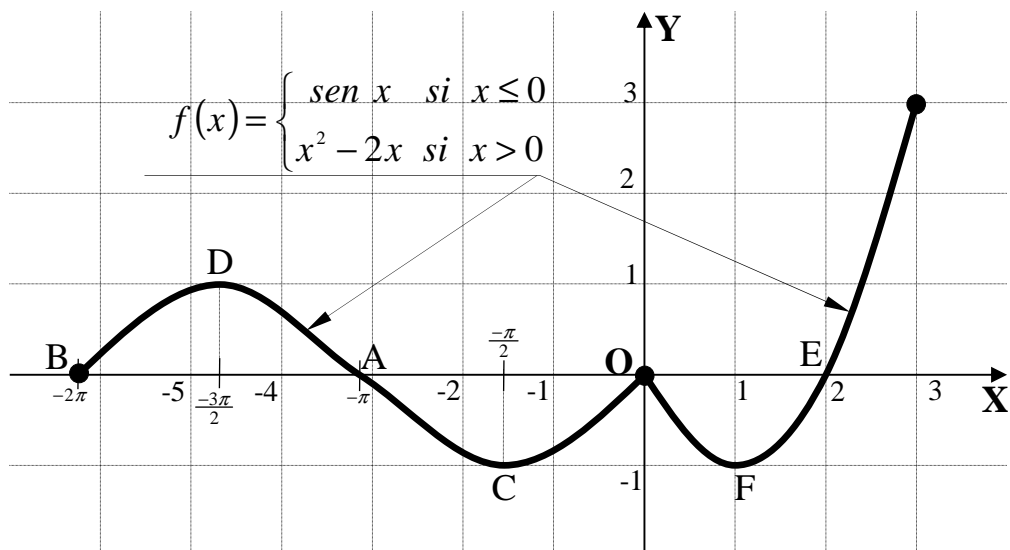
$$f''(x) = 2 > 0 \Rightarrow \underline{\text{Mínimo para } x=1}$$

$$f(1) = 1^2 - 2 \cdot 1 = 1 - 2 = -1 \Rightarrow \underline{\underline{\text{Mínimo}}} \Rightarrow \underline{\underline{F(1, -1)}}$$

En el intervalo considerado $(0, 3]$ la curvatura es la siguiente:

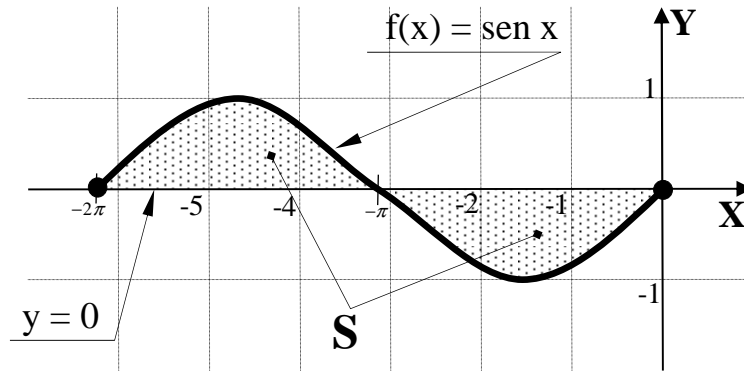
$$f''(x) = 2 > 0 \Rightarrow \underline{\underline{\text{Convexa } (\cup)}} \Rightarrow \underline{\underline{x \in (0, 3)}}$$

La representación gráfica, aproximada, de la función es la siguiente:



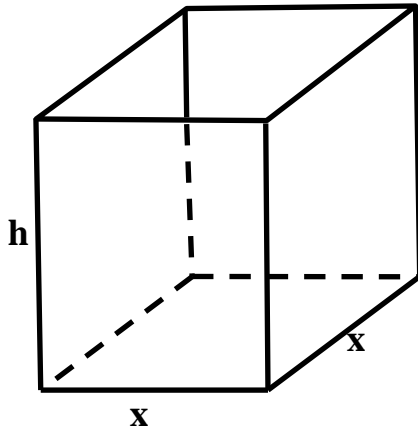
c)

Teniendo en cuenta que la recta $y = 0$ es el eje de abscisas y que en el intervalo $(-\pi, 0)$ las ordenadas de la superficie son negativas, la superficie pedida, que es la sombreada en la figura que está a continuación, es la siguiente:



$$\begin{aligned}
 S &= \int_{-2\pi}^{-\pi} \text{sen } x \cdot dx + \int_{-\pi}^0 \text{sen } x \cdot dx = [-\cos x]_{-2\pi}^{-\pi} + [-\cos x]_{-\pi}^0 = -[\cos x]_{-2\pi}^{-\pi} - [\cos x]_{-\pi}^0 = \\
 &= -[\cos(-\pi) - \cos(-2\pi)] - [\cos(-\pi) - \cos 0] = -\cos \pi + \cos 2\pi - \cos \pi + \cos 0 = \\
 &= -2\cos \pi + \cos 2\pi + \cos 0 = -2 \cdot (-1) + 1 + 1 = \underline{\underline{4}} = S
 \end{aligned}$$

2-B) Queremos hacer un envase con tapa y forma de prisma regular con base cuadrada y cuya capacidad sea de 10.000 cm^3 . Sabiendo que cada cm^2 del material de la base sale un 50 % más caro que cada cm^2 del material empleado para el resto del prisma, halla las dimensiones del envase para que su precio sea el menor posible.



Sabiendo que el volumen es 10.000 cm^3 :

$$V = x^2 \cdot h = 10.000 \Rightarrow h = \frac{10.000}{x^2}. \quad (*)$$

La superficie de la base es $S_1 = x^2$ y la superficie del resto del envase es: $S_2 = x^2 + 4xh$ y que, teniendo en cuenta el valor de h se puede poner de la forma siguiente:

$$S_2 = x^2 + 4xh = x^2 + 4x \cdot \frac{10.000}{x^2} = x^2 + \frac{40.000}{x} = \frac{x^3 + 40.000}{x} = S_2$$

Al ser el valor de la base el 50 % debe afectarse de un coeficiente de 1'5, con lo cual el precio es el siguiente, en función del lado de la base:

$$\begin{aligned} \text{Precop} = P &= \frac{x^3 + 40.000}{x} + 1'5 \cdot x^2 = \frac{x^3 + 40.000}{x} + \frac{3x^2}{2} = \frac{2x^3 + 80.000 + 3x^3}{2x} = \\ &= \frac{5x^3 + 80.000}{2x} = P \end{aligned}$$

Para que el precio sea mínimo, su derivada tiene que ser cero:

$$P' = \frac{15x^2 \cdot 2x - (5x^3 + 80.000) \cdot 2}{4x^2} = \frac{15x^3 - 5x^3 - 80.000}{2x^2} = \frac{10x^3 - 80.000}{x^2} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 10x^3 - 80.000 = 0 \quad ; ; \quad x^3 - 8.000 = 0 \quad ; ; \quad x^3 = 8.000 = 20^3 \quad ; ; \quad \underline{x = 20 \text{ cm}}$$

Sustituyendo el valor de x en (*) obtenemos el valor de h :

$$h = \frac{10.000}{20^2} = \frac{10.000}{400} = \frac{100}{4} = \underline{25 \text{ cm} = h}$$

El envase es un prisma cuadrangular regular de 20 cm de base y 25 cm de altura.

BLOQUE 3

3-A) Considera la recta $r \equiv \frac{x-1}{-4} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{1}$ y el plano $\pi \equiv 3x + 4y - 6 = 0$.

a) Comprueba que r y π son paralelos.

b) Calcula la distancia entre r y π .

c) Determina dos rectas distintas que estén contenidas en π y sean paralelas a r .

a)

Para que la recta r y el plano π sean paralelos es necesario que el vector director de la recta sea paralelo (linealmente dependiente) al vector normal del plano.

El vector director de la recta r es $\vec{v} = (-4, 3, 1)$.

El vector normal del plano π es $\vec{n} = (3, 4, 0)$.

Para que dos vectores sean paralelos, su producto escalar tiene que ser cero:

$$\vec{v} \cdot \vec{n} = (-4, 3, 1) \cdot (3, 4, 0) = -12 + 12 + 0 = 0$$

En efecto, r y π son paralelos, como teníamos que comprobar.

b)

La distancia entre r y π es la misma que la distancia de un punto cualquiera de la recta al plano. Un punto de la recta r es, por ejemplo, $P(1, 2, 3)$.

Sabiendo que la distancia del punto $P_0(x_0, y_0)$ al plano genérico de ecuación $\pi \equiv Ax + By + Cz + D = 0$ es $d(P_0, \pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$; aplicándola al punto $P(1, 2, 3)$ y al plano $\pi \equiv 3x + 4y - 6 = 0$ es:

$$d(r, \pi) = d(P, \pi) = \frac{|3 \cdot 1 + 4 \cdot 2 - 6|}{\sqrt{3^2 + 4^2 + 0^2}} = \frac{|3 + 8 - 6|}{\sqrt{9 + 16 + 0}} = \frac{5}{\sqrt{25}} = 1 \text{ u} = \underline{\underline{d(r, \pi)}}$$

c)

El haz de rectas paralelas a r tienen todas como vector director a $\vec{v} = (-4, 3, 1)$.

Para encontrar dos rectas paralelas a r y que estén contenidas en el plano π basta encontrar dos puntos del plano, que no pertenezcan a r , y determinar las rectas que pa-

sen por ellos con el vector director $\vec{v} = (-4, 3, 1)$.

Dos puntos pertenecientes al plano $\pi \equiv 3x + 4y - 6 = 0$ y que no pertenecen a la recta $r \equiv \frac{x-1}{-4} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{1}$ son, por ejemplo, A(2, 0, 0) y B(-2, 3, 0).

Las rectas pedidas son:

$$s \equiv \frac{x-2}{-4} = \frac{y}{3} = \frac{z}{1} \quad \text{y} \quad t \equiv \frac{x+2}{-4} = \frac{y-3}{3} = \frac{z}{1}$$

3-B) Considera los puntos A(1, 1, 1), B(2, 0, -1), C(5, 2, 1) y D(4, 3, 3).

a) Justifica que los puntos son los vértices consecutivos de un paralelogramo.

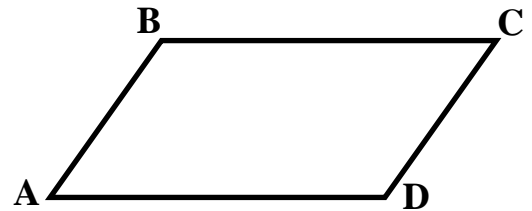
b) Razona si dicho paralelogramo es un rectángulo.

c) Determina una ecuación general del plano que contiene a los cuatro puntos.

a)

Siendo el paralelogramo de la forma que indica la figura, tiene que cumplirse que:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}.$$



$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = B - A = (2, 0, -1) - (1, 1, 1) = (1, -1, -2) \\ \overrightarrow{DC} = C - D = (5, 2, 1) - (4, 3, 3) = (1, -1, -2) \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$$

En efecto, los puntos A, B, C y D son los vértices consecutivos de un paralelogramo.

b)

Para que el paralelogramo sea un rectángulo tienen que ser perpendiculares los vectores $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$, o sea, que su producto vectorial tiene que ser cero.

$$\overrightarrow{BC} = C - B = (5, 2, 1) - (2, 0, -1) = (3, 2, 2).$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = (1, -1, -2) \cdot (3, 2, 2) = 3 - 2 - 4 = 3 - 6 = -3 \neq 0$$

El paralelogramo A, B, C y D no es un rectángulo.

c)

Para determinar la ecuación de un plano se necesitan dos vectores linealmente independientes y un punto.

La ecuación general del plano π que contiene a los puntos A, B, C y D es la siguiente:

$$\pi(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0 \;;$$

$$-2(x-1)-6(y-1)+2(z-1)+3(z-1)+4(x-1)-2(y-1)=0 \ ;;$$

$$2(x-1)-8(y-1)+5(z-1)=0 \ ;; \ 2x-2-8y+8+5z-5=0 \ ;;$$

$$\underline{\underline{\pi \equiv 2x-8y+5z+1=0}}$$
