PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

SEPTIEMBRE - 2006

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

El ejercicio consta de tres bloques de problemas y cada bloque tiene dos opciones. Debe responderse necesariamente a los tres bloques, escogiendo en cada uno de ellos una sola de las opciones (A o B). Debe exponerse con claridad el planteamiento del problema o el método utilizado para su resolución. Todas las respuestas deben ser razonadas. No se permite el uso de calculadoras gráficas ni programables.

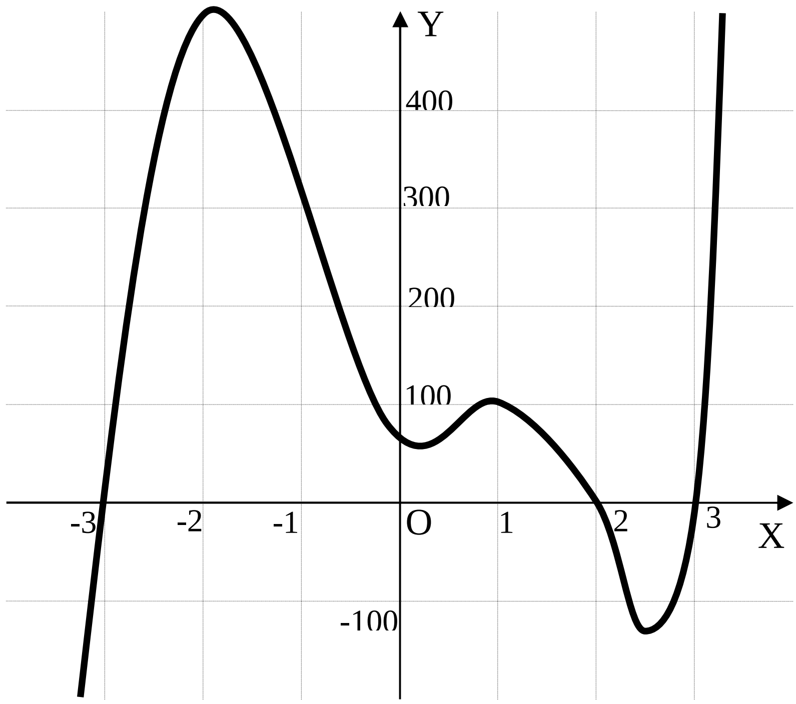
BLOQUE 1

1-A) Considera la función $f : R \to R$ definida por $f(x) = x^3 + 3x^2 + ax + b$.

a) Calcula los valores de las constantes α y b para que f tenga como recta tangente en su punto de inflexión a la recta y = 1.

b) Para los valores de α y b dibuja la gráfica de la función, analizando previamente los intervalos de crecimiento y decrecimiento, los puntos de corte con los ejes, la existencia de asíntotas y la curvatura.

1-B) El dibujo adjunto corresponde a la gráfica de f.



a) Haz la representación gráfica de la función –f en [-3, 3].

b) Con los datos que tienes y sabiendo que f es derivable dos veces, en todo el campo de los números reales, haz un dibujo que pueda corresponder a la derivada $f'(x)$ en $[-3, 3]$. Explica cómo construyes este dibujo.

c) Si f es estrictamente creciente en (-∞, -3) y en (3, +∞), ¿cuántos extremos (máximos y mínimos) tiene $f'(x)$? y ¿cuántos tiene $-f(x)$? Para responder a cada pregunta elige una y sólo una de las tres opciones siguientes y justifica tu elección:

1) Tiene al menos cuatro puntos extremos.
2) Tiene exactamente cuatro puntos extremos.

3) Tiene exactamente seis puntos extremos.

BLOQUE 2

2-A) Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & m & -3 \\ 4 & 1 & m \end{pmatrix}$, donde m es un número real.

a) Determina para qué valores de m la matriz A es regular (inversible).

b) Para m = 1 resuelve los tres sistemas de ecuaciones siguientes: $A \cdot u = e_1$, $A \cdot v = e_2$ y $A \cdot w = e_3$, donde e_1, e_2 y e_3 son, respectivamente, la primera, segunda y tercera columnas de la matriz unidad (identidad) de orden tres.

c) Considera la matriz B de dimensión 3 x 3 cuyas columnas son los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ obtenidos en el apartado anterior: $B = \left(\vec{u} \quad \vec{v} \quad \vec{w} \right)$. Razona si B es la matriz inversa de A con m = 1.

2-B) Di si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas y justifica tu respuesta. Para las afirmaciones que consideres que son falsas, pon un ejemplo ilustrativo.

a) Si A y B son dos matrices cuadradas cualesquiera, entonces $(A+B)\cdot(A-B) = A^2 - B^2$.

b) Si A, B y C son tres matrices cuadradas que verifican A · B = A · C, entonces B = C.

c) Si A es una matriz cuadrada y t es un número real que cumplen t · A = (O), entonces t = 0 y A = (O).
Notación: (O) indica la matriz cuyos elementos son todos iguales a cero.

BLOQUE 3

3-A) Considera los puntos A(1, -3, 2), B(1, 1, 2) y C(1, 1, -1):

a) Determina una ecuación general del plano que contiene los tres puntos.

b) Halla un punto D para que A, B, C y D sean los vértices consecutivos de un rectángulo.

c) Halla un punto D para que A, B, C y D sean los vértices de un paralelogramo que no sea rectángulo.

d) Calcula el área del paralelogramo obtenido en el apartado anterior.

3-B) Considera las rectas $r \equiv x-3 = y-4 = \frac{z-5}{2}$ y $s \equiv \frac{x-5}{-2} = \frac{y-4}{-1} = \frac{z-m}{2}$, donde $m \in R$.

a) Estudia, según los valores del parámetro m, las posiciones relativas de las dos rectas. En el caso de que se corten las rectas r y s, calcula el punto de corte.

b) Cuando sean coplanarias, determina una ecuación general del plano que las contiene.

c) Estudia la posición relativa del plano del apartado anterior con el plano que pasa por los puntos A(3, 4, 5), B(5, 4, -3) y C(1, 2, 1).

Indicación: no es necesario construir el plano que pasa por esos tres puntos.

****