

PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)**UNIVERSIDAD DE CANTABRIA****SEPTIEMBRE - 2003**

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II**Tiempo máximo: 1 hora y 30 minutos**

1.-El ejercicio consta de tres bloques de problemas y cada bloque tiene dos opciones. Debe responderse necesariamente a los tres bloques, escogiendo en cada uno de ellos una sola de las opciones (A o B).

2.- Debe exponerse con claridad el planteamiento del problema o el método utilizado para su resolución. Todas las respuestas deben ser razonadas.

3.- Todas las preguntas se puntúan igual.

BLOQUE 1 (Álgebra)

1-A) a) Estudiar, según los valores de a, el sistema siguiente:

$$\left. \begin{array}{l} ax + y + 2z = 1 \\ x - 2y = 0 \\ ax + y - z = 1 \end{array} \right\}.$$

b) Resolver el sistema para $a = 1$.

a)

$$M = \begin{pmatrix} a & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \\ a & 1 & -1 \end{pmatrix} ; ; M' = \begin{pmatrix} a & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ a & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|M| = \begin{vmatrix} a & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \\ a & 1 & -1 \end{vmatrix} = 2a + 2 + 4a + 1 = 6a + 3 = 3(2a + 1) = 0 \Rightarrow a = \underline{\underline{-\frac{1}{2}}}$$

Para $a \neq -\frac{1}{2} \Rightarrow \text{Rango } M = \text{Rango } M' = 3 = n^{\circ} \text{ incógnitas} \Rightarrow \underline{\underline{\text{Compatible det er min ado}}}$

Para $a = -\frac{1}{2}$ el rango de M' es:

$$\left\{ \begin{array}{l} M' \Rightarrow \{C_1, C_2, C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1+1-1-1=0 \\ M' \Rightarrow \{C_1, C_3, C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -1 & 1 \end{vmatrix} = -1-2 = -3 \neq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{\underline{a = -\frac{1}{2} \Rightarrow \text{Rango } M' = 3}}$$

Para $a = -\frac{1}{2} \Rightarrow \text{Rango } M \neq \text{Rango } M' \Rightarrow \underline{\underline{\text{Incompatible}}}$

b)

Para $a = 1$ el sistema es: $\left. \begin{array}{l} x + y + 2z = 1 \\ x - 2y = 0 \\ x + y - z = 1 \end{array} \right\}$. De la segunda ecuación: $x = 2y$. Sustituyendo en las ecuaciones primera y tercera, resulta:

$\left. \begin{array}{l} 3y + 2z = 1 \\ 3y - z = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow$

$$\underline{\underline{z=0}} \quad ;; \quad \underline{\underline{y=\frac{1}{3}}} \quad ;; \quad \underline{\underline{x=\frac{2}{3}}}$$

2-A) Dar una respuesta razonada a las siguientes cuestiones:

a) En una matriz intercambiamos dos filas. ¿Qué se puede decir del determinante de la nueva matriz obtenida?

b) Se sabe que $\det(A) = 5$ y que A es una matriz de orden dos. ¿Cuánto vale $\det(3A)$?

c) Dos matrices A y B son inversas una de la otra. ¿Cuánto vale $\det(B)$?

d) Si A es una matriz inversible de orden 3. ¿Cuánto vale el determinante de la matriz adjunta de A?

a)

Una de las propiedades de los determinantes es que “si se intercambian dos filas o dos columnas, el valor del determinante cambia de signo”.

El valor del determinante de la matriz obtenida es el mismo del determinante de la primera matriz, pero de signo contrario.

b)

El producto de una matriz por un número es otra matriz cuyos elementos resultan de multiplicar cada elemento de la primera matriz por el número.

Otra propiedad de los determinantes: “si se multiplican o dividen los elementos de una fila o una columna de un determinante, el valor del determinante queda multiplicado o dividido por el número”.

Siendo A una matriz cuadrada de orden 2, $\det(3A) = 3 \cdot 3 \cdot \det(A) = 9 \cdot \det(A)$.

$$\det(3A) = 9 \cdot \det(A) \Rightarrow \det(A) = 5 \Rightarrow \det(3A) = 9 \cdot 5 = \underline{\underline{45 = \det(3A)}}$$

c)

Sabemos que el producto de una matriz por su inversa es la matriz identidad. Si B es la matriz inversa de A se cumple: $A \cdot B = I$.

$$|A \cdot B| = |I| \Rightarrow |A| \cdot |B| = 1 \Rightarrow \underline{\underline{|B| = \frac{1}{|A|}}}$$

De lo anterior se deduce que el determinante de la inversa de una matriz es igual a la inversa del determinante de la matriz dada.

d)

Sabiendo que: $A \cdot \text{Adj.}(A) = |A| \cdot I$, para una matriz de orden 3 sería:

$$A \cdot Adj.(A) = |A| \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |A| & 0 & 0 \\ 0 & |A| & 0 \\ 0 & 0 & |A| \end{pmatrix}.$$

Pasando a determinantes:

$$|A| \cdot |Adj.(A)| = \begin{vmatrix} |A| & 0 & 0 \\ 0 & |A| & 0 \\ 0 & 0 & |A| \end{vmatrix} = |A|^3 \Rightarrow |Adj.(A)| = \frac{|A|^3}{|A|} = |A|^2$$

$$\underline{\underline{|Adj.(A)| = |A|^2}}$$

BLOQUE 2 (Análisis)

2-A) Considerar la función $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$. Calcular:

- Su dominio, cortes con los ejes e intervalos de crecimiento.
- Sus asíntotas.
- A partir de los datos anteriores, representar gráficamente la función.

a)

El dominio de la función $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ es el conjunto de valores reales de x tales que $x^2 - 1 \geq 0$; ; $x^2 \geq 1$; ; $|x| \geq 1$.

$$\underline{\underline{D(f) \Rightarrow (-\infty, -1) \cup (1, \infty)}}$$

Los cortes con los ejes son:

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{\underline{Eje X}} \Rightarrow y = f(x) = 0 \Rightarrow \sqrt{x^2 - 1} = 0 \ ; \ ; \ x = \pm 1 \Rightarrow \underline{\underline{A(-1, 0) \ ; \ ; \ B(1, 0)}} \\ \underline{\underline{Eje Y}} \Rightarrow x = 0 \Rightarrow y = f(0) = \sqrt{-1} \Rightarrow x \notin R \Rightarrow \underline{\underline{No tiene}} \end{array} \right.$$

Para estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento, derivamos:

$$f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 - 1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \underline{\underline{f'(x) > 0 \Rightarrow x > 0 \Rightarrow (1, \infty) \Rightarrow Creciente}} \\ \underline{\underline{f'(x) < 0 \Rightarrow x < 0 \Rightarrow (-\infty, -1) \Rightarrow Decreciente}} \end{array} \right.$$

b)

Las asíntotas de la función son las siguientes:

Horizontales: son los valores finitos que toma y cuando x tiende a valer infinito; son de la forma $y = k$.

$$y = k = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 - 1} = \infty \Rightarrow \underline{\underline{No tiene}}$$

Verticales: son los valores de x que anulan el denominador.

No tiene asíntotas verticales

Oblicuas: Son de la forma $y = mx + n$ ($m \neq 0$; $m \neq \infty$).

$$m_1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{x^2 - 1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} = 1 = m_1$$

$$n_1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - m_1 x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - 1} - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 - 1} - x)(\sqrt{x^2 - 1} + x)}{\sqrt{x^2 - 1} + x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 1 - x^2}{\sqrt{x^2 - 1} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{\sqrt{x^2 - 1} + x} = 0 \Rightarrow \underline{\underline{y_1 = x}}$$

$$m_2 = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{|x|}{x} \sqrt{\frac{x^2 - 1}{x^2}} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{|x|}{x} \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} \right) =$$

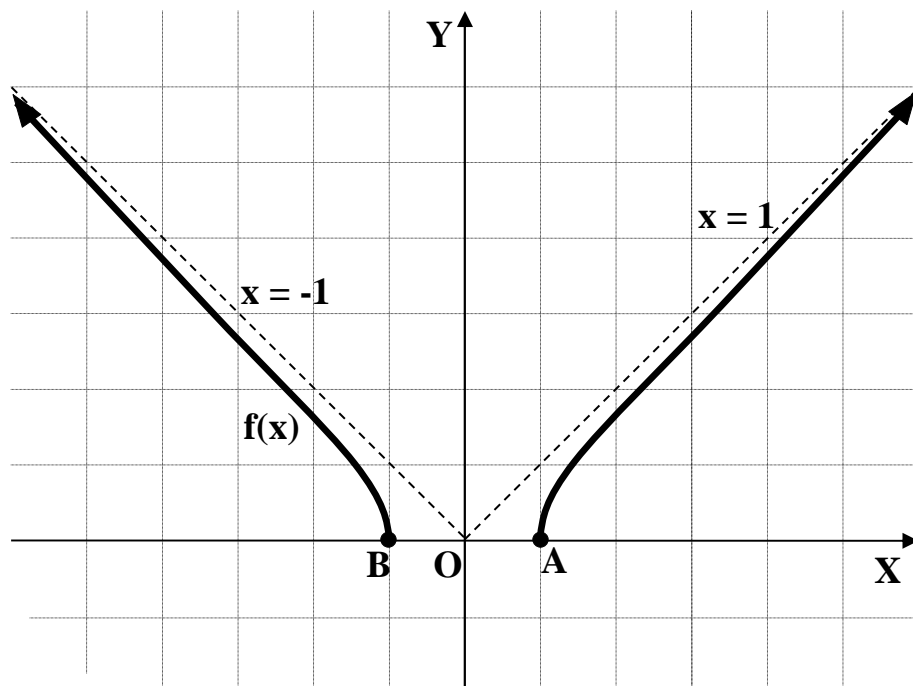
$$= -1 \cdot 1 = \underline{\underline{-1 = m_2}}$$

$$n_2 = \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - m_2 x] = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 - 1} + x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(\sqrt{x^2 - 1} + x)(\sqrt{x^2 - 1} - x)}{\sqrt{x^2 - 1} - x} =$$

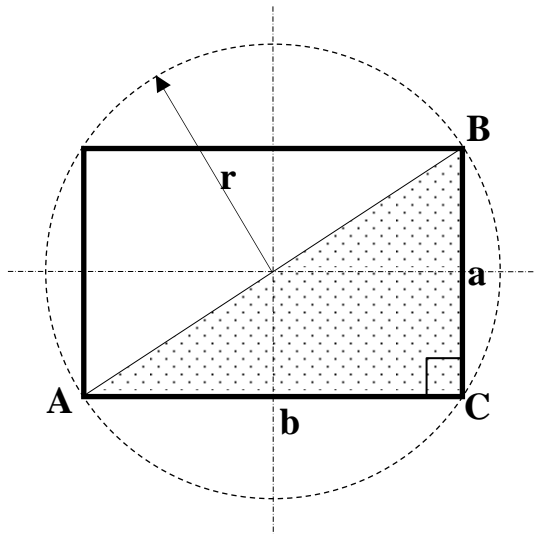
$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 1 - x^2}{\sqrt{x^2 - 1} - x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-1}{\sqrt{x^2 - 1} - x} = \frac{-1}{\infty + \infty} = \frac{-1}{\infty} = 0 \Rightarrow \underline{\underline{y_2 = -x}}$$

c)

La representación aproximada de la función es la siguiente:



2-B) Calcular las dimensiones del rectángulo de área máxima que puede inscribirse en una circunferencia de 2 m de radio.



El área del rectángulo es: $S = \frac{a \cdot b}{2}$.

Del triángulo rectángulo ABC se deduce que:

$$(2r)^2 = a^2 + b^2 \quad ; \quad 4r^2 = a^2 + b^2 \quad ; \quad b = \sqrt{4r^2 - a^2}$$

Sustituyendo el valor de b en el área:

$$S = \frac{a \cdot b}{2} = \frac{1}{2} a \sqrt{4r^2 - a^2} = \frac{1}{2} \sqrt{4r^2 a^2 - a^4}$$

Para que el área sea máxima, su derivada tiene que ser cero:

$$S' = \frac{1}{2} \cdot \frac{8r^2 a - 4a^3}{2\sqrt{4r^2 a^2 - a^4}} = \frac{2r^2 a - a^3}{\sqrt{4r^2 a^2 - a^4}} = 0 \Rightarrow 2r^2 a - a^3 = 0 \quad ; \quad a(2r^2 - a^2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 0 \\ a_2 = r\sqrt{2} \end{cases}$$

La primera de las soluciones carece de sentido lógico. (sería para mínimo).

Los valores de a y b son: $a = r\sqrt{2}$.

$$b = \sqrt{4r^2 - a^2} = \sqrt{4r^2 - 2r^2} = \sqrt{2r^2} = \underline{\underline{r\sqrt{2}}} = b = a.$$

Como puede comprobarse, se trata de un cuadrado.

El valor del área máxima es:

$$S = \frac{a \cdot b}{2} = \frac{(r\sqrt{2}) \cdot (r\sqrt{2})}{2} = \frac{2r^2}{2} = r^2 = 2^2 = 4$$

El valor del área máxima es 4 m².

BLOQUE 3 (Geometría)

3-A) Se consideran los puntos P(2, 1, -1), Q(1, 4, 1) y R(1, 3, 1).

a) Comprobar que P, Q y R no están alineados y calcular el área del triángulo que determinan.

b) Calcular la ecuación del plano π que los contiene a los puntos P, Q y R.

c) Calcular la ecuación de la recta r que pasa por A(1, 1, -1) y es perpendicular al plano π obtenido en el apartado anterior.

a)

$$\vec{u} = \overrightarrow{PQ} = Q - P = (1, 4, 1) - (2, 1, -1) = (-1, 3, 2)$$

$$\vec{v} = \overrightarrow{QR} = R - Q = (1, 3, 1) - (1, 4, 1) = (0, -1, 0)$$

Como puede apreciarse, los vectores \vec{u} y \vec{v} son linealmente independientes, lo cual significa, en efecto, que los puntos P, Q y R no están alineados, como teníamos que comprobar.

El área del triángulo que forman es la mitad del área del paralelogramo que determinan los vectores \vec{u} y \vec{v} :

$$S = \frac{1}{2} \cdot \left\| \begin{array}{ccc} i & j & k \\ -1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{array} \right\| = \frac{1}{2} \cdot |k - 2i| = \frac{1}{2} \cdot |-2i + k| = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(-2)^2 + 1^2} = \frac{\sqrt{5}}{2} u^2 = S$$

b)

El plano π pedido es el que tiene como vectores directores \vec{u} y \vec{v} y contiene a uno cualquiera de los puntos dados, por ejemplo P:

$$\pi(P; \vec{u}, \vec{v}) \equiv \begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z+1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad ;; \quad (z+1) + 2(x-2) = 0 \quad ;; \quad z+1 + 2x - 4 = 0$$

$$\underline{\underline{\pi \equiv 2x + z - 3 = 0}}$$

c)

La recta r pedida tiene como vector director a un vector normal del plano π :

$$r \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \vec{n} = (2, 0, 1) \\ A(1, 1, -1) \end{array} \right\} \Rightarrow r \equiv \underline{\underline{\left\{ \begin{array}{l} x = 1 + 2k \\ y = 1 \\ z = -1 + k \end{array} \right\}}}$$

3-B) Se considera el segmento \overline{AB} de extremos A(5, 3, 1) y B(4, 2, -1).

a) Calcular las ecuaciones de los tres planos (paralelos entre si) siguientes:

- π_1 : pasa por A y es perpendicular al segmento \overline{AB} .
- π_2 : pasa por B y es perpendicular al segmento \overline{AB} .
- π_3 : es perpendicular al segmento \overline{AB} y lo divide en dos partes iguales.

b) ¿Cuál es la distancia entre π_1 y π_3 ? ¿Cuál es la distancia entre π_1 y π_2 ?

a)

$$\vec{v} = \overrightarrow{AB} = B - A = (4, 2, -1) - (5, 3, 1) = (-1, -1, -2).$$

El vector \vec{v} es normal los planos π_1 , π_2 y π_3 , por lo cual sus ecuaciones son:

$$\left. \begin{array}{l} \pi_1 \equiv -x - y - 2z + D = 0 \\ A(5, 3, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow -5 - 3 - 2 + D = 0 \ ; \ ; \ D = 10 \Rightarrow \underline{\underline{\pi_1 \equiv x + y + 2z - 10 = 0}}$$

$$\left. \begin{array}{l} \pi_2 \equiv -x - y - 2z + D = 0 \\ B(4, 2, -1) \end{array} \right\} \Rightarrow -4 - 2 + 2 + D = 0 \ ; \ ; \ D = 4 \Rightarrow \underline{\underline{\pi_2 \equiv x + y + 2z - 4 = 0}}$$

$$\text{El punto medio del segmento } \overline{AB} \text{ es: } \left\{ \begin{array}{l} A(5, 3, 1) \\ B(4, 2, -1) \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{\underline{M\left(\frac{9}{2}, \frac{5}{2}, 0\right)}}.$$

$$\left. \begin{array}{l} \pi_3 \equiv -x - y - 2z + D = 0 \\ M\left(\frac{9}{2}, \frac{5}{2}, 0\right) \end{array} \right\} \Rightarrow -\frac{9}{2} - \frac{5}{2} - 0 + D = 0 \ ; \ ; \ D = 7 \Rightarrow \underline{\underline{\pi_3 \equiv x + y + 2z - 7 = 0}}$$

b)

Para hallar la distancia de π_1 y π_3 la obtenemos tomando un punto, por ejemplo de π_1 y calculando su distancia a π_3 :

Un punto de π_1 es A(5, 3, 1) y la distancia de un punto a un plano viene dada por la fórmula: $d(P, \pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$. El plano es: $\pi_3 \equiv x + y + 2z - 7 = 0$.

$$d(\pi_1, \pi_3) = d(A, \pi_3) = \frac{|1 \cdot 5 + 1 \cdot 3 + 2 \cdot 1 - 7|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 2^2}} = \frac{|5 + 3 + 2 - 7|}{\sqrt{1 + 1 + 4}} = \frac{3}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{2} = \underline{\underline{u = d(\pi_1, \pi_3)}}$$

Para hallar la distancia de π_1 y π_2 la obtenemos tomando un punto, por ejemplo de π_1 y calculando su distancia a π_2 :

Un punto de π_1 es $A(5, 3, 1)$. El plano es: $\pi_2 \equiv x + y + 2z - 4 = 0$.

$$d(\pi_1, \pi_2) = d(A, \pi_2) = \frac{|1 \cdot 5 + 1 \cdot 3 + 2 \cdot 1 - 4|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 2^2}} = \frac{|5 + 3 + 2 - 4|}{\sqrt{1 + 1 + 4}} = \frac{6}{\sqrt{6}} = \underline{\underline{\sqrt{6}}} = d(\pi_1, \pi_2)$$
