PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

JUNIO - 2003

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II   Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

1.-El ejercicio consta de tres bloques de problemas y cada bloque tiene dos opciones. Debe responderse necesariamente a los tres bloques, escogiendo en cada uno de ellos una sola de las opciones (A o B).
2.- Debe exponerse con claridad el planteamiento del problema o el método utilizado para su resolución. Todas las respuestas deben ser razonadas.
3.- Todas las preguntas se puntúan igual.

BLOQUE 1 (Álgebra)

1-A) Calcular el valor de m para que el sistema $\left.\begin{array}{r} x+(m-1)y-z=0 \\ (m-1)x+3y+z=m \\ y+z=1 \end{array}\right\}$:

a) Tenga una única solución. Calcular dicha solución para m = 0.

b) Tenga infinitas soluciones.

c) ¿Hay algún valor de m para el cual el sistema no tiene solución? Justificar la respuesta.

----

a)

$$M=\begin{pmatrix} 1 & m-1 & -1 \\ m-1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \;;;\; M'=\begin{pmatrix} 1 & m-1 & -1 & 0 \\ m-1 & 3 & 1 & m \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|M|=\begin{vmatrix} 1 & m-1 & -1 \\ m-1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}=3-m+1-1-m^2+2m-1=-m^2+m+2=0 \;;;\; m^2-m-2=0$$

$$m=\frac{1\pm\sqrt{1+8}}{2}=\frac{1\pm\sqrt{9}}{2}=\frac{1\pm 3}{2}\Rightarrow\begin{cases} \underline{m_1=2} \\ \underline{m_2=-1} \end{cases}$$

$$Para \left\{\begin{matrix} m \neq 2 \\ m \neq -1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow Rango\, M = Rango\ M' = 3 = n^o\ incógnitas \Rightarrow \underline{Compatible\ \ det er min ado}$$

Para m = 0 resulta el sistema: $\left.\begin{matrix} x - y - z = 0 \\ -x + 3y + z = 0 \\ y + z = 1 \end{matrix}\right\}$. Aplicando Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{-1+3}{3+1-1-1} = \frac{2}{2} = \underline{\underline{1 = x}} \quad ;; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{2} = \frac{1-1}{2} = \frac{0}{2} = \underline{\underline{0 = y}}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{2} = \frac{3-1}{2} = \frac{2}{2} = \underline{\underline{1 = z}}$$

b)

Para que el sistema tenga infinitas soluciones es necesario que los rangos de las matrices de coeficientes y ampliada sean iguales; este rango tiene que ser menor o igual a dos.

$Para\ \ m = 2\ \ el\ \ rango\ \ de\ \ M'\ \ es:$

$$\left.\begin{matrix} M' \Rightarrow \{C_1,\ C_2,\ C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 2 - 1 = 0 \\ \\ M' \Rightarrow \{C_1,\ C_3,\ C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 2 + 1 = 0 \\ \\ M' \Rightarrow \{C_2,\ C_3,\ C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 2 - 2 + 3 = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow Rango\ M' = 2$$

$$\underline{\underline{Para\ \ m = 2\ \ \Rightarrow Rango\, M = Rango\ M' = 2 < n^o\ incógnitas \Rightarrow Compatible\ \ In det er min ado}}$$

$Para\ \ m=-1\ \ el\ \ rango\ \ de\ \ M'\ \ es:$

$$\left.\begin{array}{l} M' \Rightarrow \{C_1,\ C_2,\ C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3+1-4=0 \\ \\ M' \Rightarrow \{C_1,\ C_3,\ C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1+1-2=0 \\ \\ M' \Rightarrow \{C_2,\ C_3,\ C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2+1-2+3=0 \end{array}\right\} \Rightarrow Rango\ M'=2$$

$$\underline{\underline{Para\ \ m=-1\ \ \Rightarrow Rango\,M\ = Rango\ \ M'=2 < n^{o}\ \ incógnitas \Rightarrow Compatible\ \ \ Indeterminado}}$$

c)

En este apartado, solamente vamos a resumir:

$$\left.\begin{array}{l} m \neq 2 \\ m \neq -1 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{Sistema\ \ Compatible\ \ Determinado}$$

$$\left.\begin{array}{l} m = 2 \\ m = -1 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{Sistema\ \ Compatible\ \ Indeterminado}$$

Como quiera que se han estudiado todos los valores de m, podemos concluir:

<u>No existe ningún valor real de m para el cual el sistema es incompatible</u>

****

2-A) a) Calcular los valores de m para que la matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -m \\ 0 & m & 3 \\ 4 & 1 & -m \end{pmatrix}$ tenga inversa.

b) Calcular A^{-1} para m = 2.

----

a)

Una matriz tiene inversa cuando su determinante es distinto de cero.

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 0 & -m \\ 0 & m & 3 \\ 4 & 1 & -m \end{vmatrix}=-m^2+4m^2-3=3m^2-3=3\left(m^2-1\right)=0 \Rightarrow \begin{cases} \underline{m_1=1} \\ \underline{m_2=-1} \end{cases}$$

Para que A tenga inversa es necesario que $m \neq 1 \;\; y \;\; m \neq -1$.

b)

Para m = 2 resulta la matriz: $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & -2 \end{vmatrix}=-4+16-3=\underline{9=|A|} \;;;\; A^T=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$Adj\left(A^T\right)=\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -7 & -2 & 4 \\ 12 & 6 & -3 \\ -8 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{A^{-1}=\begin{pmatrix} -\frac{7}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{4}{9} \\ \frac{4}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{8}{9} & -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} \end{pmatrix}}}$$

****

BLOQUE 2 (Análisis)

2-A) Considerar la función $f(x)=\frac{5x+8}{x^2+x+1}$. Calcular:

a) Su dominio, cortes con los ejes e intervalos de crecimiento y decrecimiento.

b) Sus asíntotas.

c) A partir de los datos anteriores, representar gráficamente la función.

----

a)

El dominio de una función racional es R, excepto los valores reales de x que anulan el denominador.

$$x^2+x+1=0\ ;;\ x=\frac{-1\pm\sqrt{1-4}}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}\ \Rightarrow\ x\notin R\ \ \Rightarrow\ \ \underline{\underline{D(f)\Rightarrow R}}$$

Los cortes con los ejes son:

$$\begin{cases}\underline{Eje\ \ X}\Rightarrow y=f(x)=0\ \Rightarrow\ 5x+8=0\ ;;\ x=-\frac{8}{5}\ \ \Rightarrow\ \ \underline{\underline{A\left(-\frac{8}{5},\ 0\right)}}\\ \underline{Eje\ \ Y}\Rightarrow x=0\ \Rightarrow y=f(0)=\frac{8}{1}=8\ \ \Rightarrow\ \ \underline{\underline{B(0,\ 8)}}\end{cases}$$

Para estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento, derivamos:

$$f'(x)=\frac{5(x^2+x+1)-(5x+8)(2x+1)}{(x^2+x+1)^2}=\frac{5x^2+5x+5-10x^2-5x-16x-8}{(x^2+x+1)^2}=$$

$$=\underline{\frac{-5x^2-16x-3}{(x^2+x+1)^2}=f'(x)}$$

$$f'(x)=0\Rightarrow 5x^2+16x+3=0\ ;;\ x=\frac{-16\pm\sqrt{256-60}}{10}=\frac{-16\pm 14}{10}\Rightarrow\begin{cases}\underline{x_1=-\frac{1}{5}}\\ \underline{x_2=-3}\end{cases}$$

Como el denominador de la derivada es siempre positivo, solamente estudiaremos el numerador.

$$f'(x)=\frac{-5x^2-16x-3}{(x^2+x+1)^2}\Rightarrow\begin{cases}\underline{\underline{f'(x)>0\Rightarrow\left(-3,\ -\frac{1}{5}\right)\Rightarrow Creciente}}\\ \underline{\underline{f'(x)<0\Rightarrow(-\infty,\ -3)\cup\left(-\frac{1}{5},\ \infty\right)\Rightarrow Decreciente}}\end{cases}$$

b)

Las asíntotas de la función son las siguientes:

Horizontales: son los valores finitos que toma y cuando x tiende a valer infinito; son de la forma y = k.

$$y = k = \lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{5x+8}{x^2+x+1} = 0 = \underline{\underline{y}} \quad (Eje \;\; X)$$

Verticales: son los valores de x que anulan el denominador.

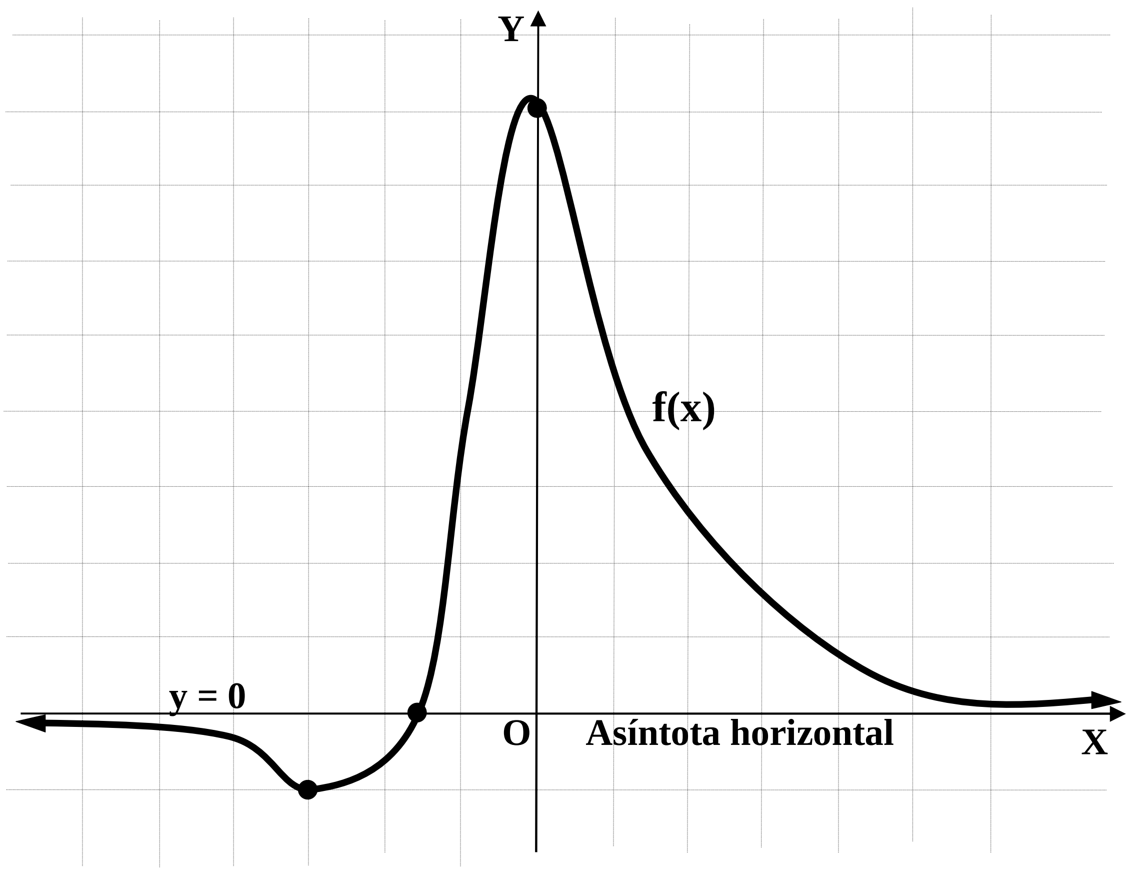
$x^2 + x + 1 = 0$;; $x \notin R \Rightarrow$ No tiene asíntotas verticales

Oblicuas: No tiene.

(Para que una función racional tenga asíntotas oblicuas es necesario que el grado del numerador sea una unidad mayor que el grado del denominador).

c)

La representación aproximada de la función es la siguiente:



****

2-B) a) Calcular la expresión analítica de la función que cumple las siguientes condiciones:
- Es un polinomio de grado 3.
- Corta al eje OX en tres puntos que tienen por abscisas, respectivamente, x = 2, x = 4 y x = 6.
- Su valor en x = 0 es f(0) = -48.

b) Hacer un esquema gráfico de la función f(x) que se haya obtenido en el apartado anterior.

c) Calcular el área del recinto limitado por la gráfica de la función f(x), el eje X y las rectas x = 2 y x = 4.

----

a)

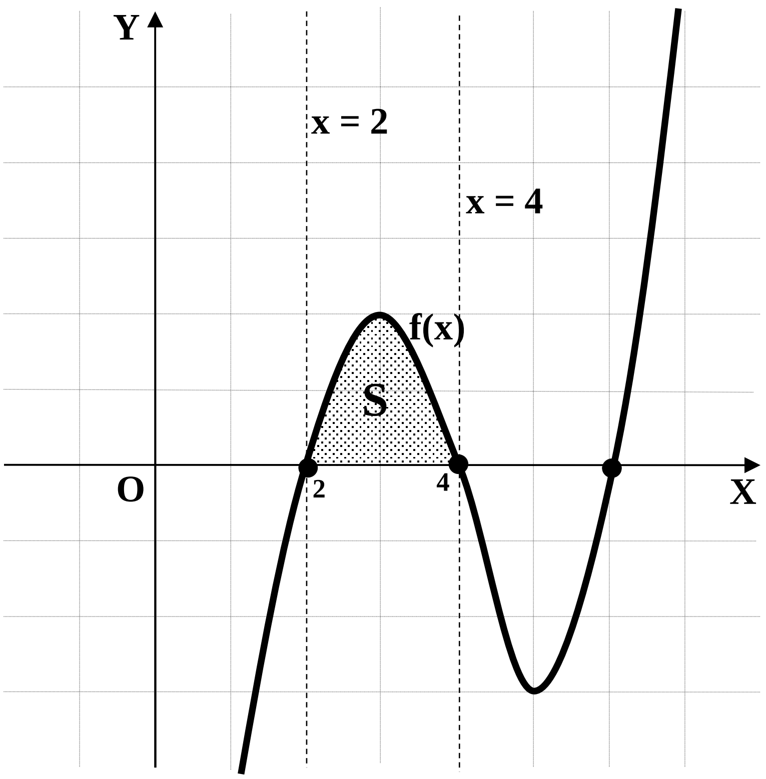
La función f(x), por ser un polinomio de tercer grado y cortar al eje X en los puntos de abscisas indicadas, es de la forma: $f(x) = a(x-2)(x-4)(x-6)$.

Por ser $f(0) = -48 \;\Rightarrow\; a(-2)(-4)(-6) = -48a = -48 \;\Rightarrow\; \underline{a = 1}$

$$\underline{\underline{f(x) = (x-2)(x-4)(x-6)}} \;\; o \;\; \underline{\underline{f(x) = x^3 - 12x^2 + 44x - 48}}$$

b)

La representación gráfica es, aproximadamente, la siguiente:



c)

$$S=\int_2^4 f(x)\cdot dx=\int_2^4 \left(x^3-12x^2+44x-48\right)\cdot dx=\left[\frac{x^4}{4}-\frac{12x^3}{3}+\frac{44x^2}{2}-48x\right]_2^4=$$

$$=\left[\frac{x^4}{4}-4x^3+22x^2-48x\right]_2^4=\left[x\left(\frac{x^3}{4}-4x^2+22x-48\right)\right]_2^4=$$

$$=\left[4(16-64+88-48)\right]-\left[2(2-16+44-48)\right]=4(104-112)-2(46-64)=-4\cdot 8+2\cdot 18=$$

$$=-32+36=\underline{\underline{4\ u^2=S}}$$

****

BLOQUE 3 (Geometría)

3-A) Se considera la recta $r \equiv \begin{cases} x-y=0 \\ x+y-z=0 \end{cases}$ y el punto P(1, 2, -1).

a) Hallar la ecuación del plano π que contiene al punto P y es perpendicular a r.

b) Calcular el área del triángulo cuyos vértices son los puntos de corte del plano que π y los ejes de coordenadas

----

a)

La expresión en unas ecuaciones paramétricas de r es la siguiente:

$$r \equiv \begin{cases} x-y=0 \\ x+y-z=0 \end{cases} \Rightarrow \underline{z=2k} \Rightarrow \begin{cases} x-y=0 \\ x+y=2k \end{cases} \Rightarrow 2x=2k \;\;;;\;\; \underline{x=y=k} \Rightarrow \underline{r \equiv \begin{cases} x=k \\ y=k \\ z=2k \end{cases}}$$

Un vector director de r es $\overrightarrow{v}=(1,\ 1,\ 2)$. Un vector normal al plano π puede ser, recisamente, $\overrightarrow{v}$, por lo cual su expresión es de la forma: $\pi \equiv x+y+2z+D=0$.

Como el plano π tiene que contener al punto P(1, 2, -1), tiene que satisfacer su ecuación:

$$\left.\begin{array}{l} \pi \equiv x+y+2z+D=0 \\ P(1,\ 2,\ -1) \end{array}\right\} \Rightarrow 1+2-2+D=0 \;\;;;\;\; \underline{D=-1} \Rightarrow \underline{\underline{\pi \equiv x+y+2z-1=0}}$$

b)

Los puntos de corte del plano π con los ejes se obtiene haciendo igual a cero las variables que no coincidan con el eje:

$$Eje\ \ X \rightarrow \left\{\begin{array}{l} y=0 \\ z=0 \end{array}\right\} \Rightarrow x=1 \Rightarrow \underline{A(1,\ 0,\ 0)} \quad ;; \quad Eje\ \ Y \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=0 \\ z=0 \end{array}\right\} \Rightarrow y=1 \Rightarrow \underline{B(0,\ 1,\ 0)}$$

$$Eje\ \ Z \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=0 \\ y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow x=\frac{1}{2} \Rightarrow \underline{C\left(0,\ 0,\ \tfrac{1}{2}\right)}$$

Los vectores que determinan el triángulo son:

$$\overrightarrow{AB}=B-A=(0,\ 1,\ 0)-(1,\ 0,\ 0)=\underline{(-1,\ 1,\ 0)} \quad ;; \quad \overrightarrow{AC}=C-A=\left(0,\ 0,\ \tfrac{1}{2}\right)-(1,\ 0,\ 0)=\underline{\left(-1,\ 0,\ \tfrac{1}{2}\right)}$$

El área del triángulo es la mitad del área del paralelogramo que determinan los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$. Conviene saber que el área del paralelogramo es igual que el módulo del producto vectorial de los vectores que lo determinan, por lo tanto:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot \left(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \right) = \frac{1}{2} \cdot \left\| \begin{matrix} i & j & k \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & \frac{1}{2} \end{matrix} \right\| = \frac{1}{4} \cdot \left\| \begin{matrix} i & j & k \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{matrix} \right\| = \frac{1}{2} \cdot \left| \, i + 2k + j \, \right| = \frac{1}{2} \cdot \left| \, i + j + 2k \, \right| =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \sqrt{1^2 + 1^2 + 2^2} = \underline{\underline{\frac{\sqrt{6}}{4} \, u^2 = S_{ABC}}}$$

****

3-B) Dadas las rectas $r \equiv \begin{cases} 4x+2y-z=9 \\ x-y+2z=0 \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x+y-z=0 \\ ax-2y=-2 \end{cases}$.

a) Calcular el valor de a para que las rectas sean paralelas.

b) Para el valor de a obtenido en el apartado anterior, calcular la ecuación del plano π que contiene a las rectas r y s.

----

a)

En primer lugar vamos a expresar las rectas por unas ecuaciones paramétricas:

$$r \equiv \begin{cases} 4x+2y-z=9 \\ x-y+2z=0 \end{cases} \Rightarrow \underline{z=k} \Rightarrow \begin{cases} 4x+2y=9+k \\ x-y=-2k \end{cases} ;; \begin{cases} 4x+2y=9+k \\ 2x+2y=-4k \end{cases} \Rightarrow 6x=9-3k \;;;$$

$$\underline{x=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}k} \;;;\; y=x+2k=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}k+2k=\underline{\frac{3}{2}+\frac{3}{2}k=y} \Rightarrow \underline{r \equiv \begin{cases} x=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}k \\ y=\frac{3}{2}+\frac{3}{2}k \\ z=k \end{cases}}$$

$$y \;\; s \equiv \begin{cases} x+y-z=0 \\ ax-2y=-2 \end{cases} \Rightarrow \underline{z=k} \Rightarrow \begin{cases} x+y=k \\ ax-2y=-2 \end{cases} ;; \begin{cases} 2x+2y=2k \\ ax-2y=-2 \end{cases} \Rightarrow (2+a)x=2-2k \;;;$$

$$\underline{x=\frac{2}{2+a}-\frac{2}{2+a}k} \;;;\; y=-x+k=-\frac{2}{2+a}+\frac{2}{2+a}k+k=\underline{-\frac{2}{2+a}+\frac{4+a}{2+a}k=y} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{s \equiv \begin{cases} x=\frac{2}{2+a}-\frac{2}{2+a}k \\ y=-\frac{2}{2+a}+\frac{4+a}{2+a}k \\ z=k \end{cases}}$$

Siendo las rectas paralelas, sus vectores directores tienen que ser linealmente dependientes, o sea, sus componentes tienen que ser proporcionales.

Los vectores directores son: $r \to \overrightarrow{u}=\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 1\right)$; $s \to \overrightarrow{v}=\left(-\frac{2}{2+a}, \frac{4+a}{2+a}, 1\right)$.

$$\frac{-\frac{1}{2}}{-\frac{2}{2+a}}=\frac{\frac{3}{2}}{\frac{4+a}{2+a}}=\frac{1}{1}\ \Rightarrow\ \frac{1}{2}=\frac{2}{2+a}\ ;;\ 4=2+a\ ;;\ \underline{a=2}$$

b)

Para a = 2, unas ecuaciones paramétricas de las rectas r y s son:

$$\underline{r\equiv\begin{cases} x=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}k \\ y=\frac{3}{2}+\frac{3}{2}k \\ z=k \end{cases}}\ ;;\ \underline{s\equiv\begin{cases} x=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}k \\ y=-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}k \\ z=k \end{cases}}$$

Uno de los vectores del plano pedido π es cualquier vector linealmente dependiente del vector de cualquiera de las rectas, por ejemplo: $\overrightarrow{w}=(-1,\ 3,\ 2)$.

El otro vector que necesitamos puede ser $\overrightarrow{t}=\overrightarrow{AB}$, siendo $A\in r\ \ y\ \ B\in s$. Por ejemplo, para k = 1 los puntos son los siguientes: A(1, 3, 1) y B(0, 1, 1).

$$\overrightarrow{t}=\overrightarrow{AB}=B-A=(0,\ 1,\ 1)-(1,\ 3,\ 1)=(-1,\ -2,\ 0).$$

Como punto puede tomarse cualquiera que pertenezca a una de las rectas; por ejemplo, tomamos el punto B.

$$\pi(B;\ \overrightarrow{w},\ \overrightarrow{t})\equiv\begin{vmatrix} x & y-1 & z-1 \\ -1 & 3 & 2 \\ -1 & -2 & 0 \end{vmatrix}=0\ ;;\ -2(y-1)+2(z-1)+3(z-1)+4x=0$$

$$-2y+2+5z-5+4x=0\ ;;\ \underline{\underline{\pi\equiv 4x-2y+5z-3=0}}$$

****