

PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)**UNIVERSIDAD DE CANTABRIA****SEPTIEMBRE - 2002**

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II**Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos**

- 1.-El ejercicio consta de tres bloques de problemas y cada bloque tiene dos opciones. Debe responderse necesariamente a los tres bloques, escogiendo en cada uno de ellos una sola de las opciones (A o B).
- 2.- Debe exponerse con claridad el planteamiento del problema o el método utilizado para su resolución. Todas las respuestas deben ser razonadas.
- 3.- Todas las preguntas se puntúan igual.
- 4.- No se permite el uso de calculadoras gráficas ni programables.

BLOQUE 1 (Álgebra)

1-A) Resolver la ecuación:
$$\begin{vmatrix} x-1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & x-1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & x-1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x-1 \end{vmatrix} = 0.$$

Sumando la primera fila a todas las demás, resulta:

$$\begin{vmatrix} x-1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & x & 0 & 0 \\ 0 & 2 & x-2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & x \end{vmatrix} = (x-1) \cdot \begin{vmatrix} x & 0 & 0 \\ 2 & x-2 & 2 \\ 2 & 0 & x \end{vmatrix} = x \cdot (x-1) \cdot \begin{vmatrix} x-2 & 2 \\ 0 & x \end{vmatrix} =$$

$$= x \cdot (x-1) \cdot x \cdot (x-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \underline{\underline{x_1 = x_2 = 0}} \\ \underline{\underline{x_3 = 1}} \\ \underline{\underline{x_4 = 2}} \end{cases}$$

2-A) a) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ b & a & 1 & -1 \\ a & -1 & a & 0 \\ -2 & -b & a & 0 \end{pmatrix}$, determinar a y b para que $A^T = -A$,

siendo A^T la matriz traspuesta de A.

b) Para los valores a y b obtenidos, calcular $\det(A)$, $\det(A^T)$ y $\det(3A)$.

a)

$$-A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & -2 \\ -b & -a & -1 & 1 \\ -a & 1 & -a & 0 \\ 2 & b & -a & 0 \end{pmatrix} \quad ;: \quad A^T = \begin{pmatrix} 0 & b & a & -2 \\ 1 & a & -1 & -b \\ 0 & 1 & a & a \\ 2 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A^T = -A \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 0 & b & a & -2 \\ 1 & a & -1 & -b \\ 0 & 1 & a & a \\ 2 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & -2 \\ -b & -a & -1 & 1 \\ -a & 1 & -a & 0 \\ 2 & b & -a & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \underline{\underline{b = -1}} \\ \underline{\underline{a = 0}} \end{cases}$$

b)

$$\text{Para } \begin{cases} a=0 \\ b=-1 \end{cases} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & \langle 1 \rangle & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ \langle -2 \rangle & 1 & 0 \end{vmatrix} = -2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -2 \cdot 2 = \underline{\underline{-4 = |A|}}$$

$$|A^T| = |A| = \underline{\underline{-4 = |A^T|}}$$

$$|3A| = 3^4 \cdot |A| = 3^4 \cdot (-4) = 81 \cdot -4 = \underline{\underline{-324 = |3A|}}$$

BLOQUE 2 (Análisis)

2-A) Dada la función $f(x) = x - \sqrt{\frac{2}{x+1}}$, se pide:

a) Dominio, cortes con los ejes e intervalos de crecimiento y decrecimiento.

b) Área del recinto limitado por la función $f(x)$, el eje OX y las rectas $x = 0$ y $x = 3$.

a)

El dominio de $f(x)$ es el conjunto de valores reales de x , tales que: $\frac{2}{x+1} > 0$.

$$\underline{\underline{D(f) \Rightarrow (-1, \infty)}}$$

Los cortes con los ejes son:

$$\underline{\underline{Eje X}} \Rightarrow y = f(x) = 0 \Rightarrow x - \sqrt{\frac{2}{x+1}} = 0 \quad ; ; \quad x = \sqrt{\frac{2}{x+1}} \quad ; ; \quad x^2 = \frac{2}{x+1} \quad ; ; \quad x^3 + x^2 - 2 = 0$$

Aplicando Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & & 1 & 2 & 2 \\ \hline & 1 & 2 & 2 & \boxed{0} \end{array}$$

El único valor real de x es el hallado. El punto de corte es A(1, 0)

$$\underline{\underline{Eje Y}} \Rightarrow x = 0 \Rightarrow y = f(0) = 0 - \sqrt{\frac{2}{0+1}} = -\sqrt{2} \Rightarrow \underline{\underline{B(0, -\sqrt{2})}}$$

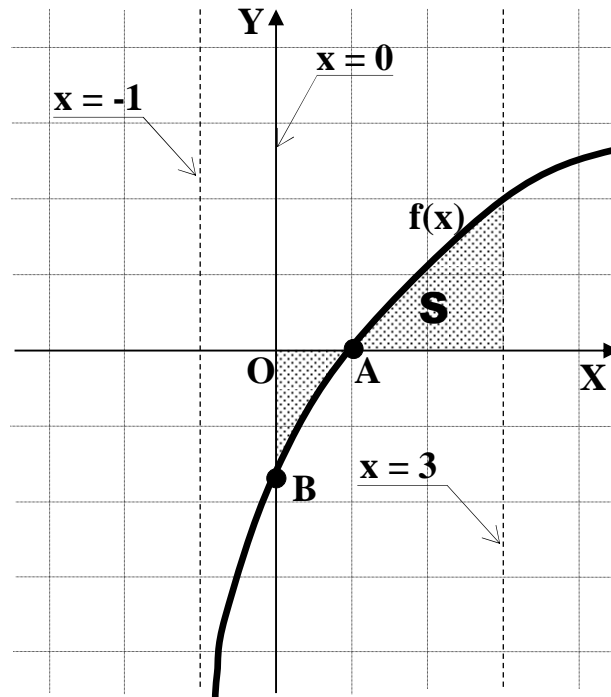
Para estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento, derivamos:

$$\begin{aligned} f(x) &= x - \sqrt{\frac{2}{x+1}} = x - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x+1}} \quad ; ; \quad f'(x) = 1 - \frac{-\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x+1}}}{x+1} = 1 + \frac{\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{x+1}}}{x+1} = \\ &= 1 + \frac{\sqrt{2}}{2(x+1)\sqrt{x+1}} = 1 + \frac{\sqrt{2}\sqrt{x+1}}{2(x+1)^2} = f'(x) \quad ; ; \quad \underline{\underline{f'(x) > 0, \forall x \in D(f)}} \end{aligned}$$

La función es monótona creciente en su dominio.

b)

Para calcular el área del recinto limitado por la función $f(x)$, el eje OX y las rectas $x = 0$ y $x = 3$, hacemos una representación aproximada de la situación:



$$S = \int_{-1}^0 f(x) \cdot dx + \int_0^3 f(x) \cdot dx = [F(x)]_{-1}^0 + [F(x)]_0^3 = F(0) - F(-1) + F(3) - F(0) =$$

$$= F(0) - 2F(0) + F(3) = S \quad (*)$$

$$F(x) = \int f(x) \cdot dx = \int \left(x - \sqrt{\frac{2}{x+1}} \right) \cdot dx = \int x \cdot dx - \int \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x+1}} \cdot dx = \frac{x^2}{2} - \sqrt{2} \cdot \int \frac{dx}{\sqrt{x+1}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x+1=t \\ dx=dt \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{x^2}{2} - \sqrt{2} \cdot \int \frac{dt}{\sqrt{t}} = \frac{x^2}{2} - \sqrt{2} \cdot \frac{t^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} = \frac{x^2}{2} - \frac{2\sqrt{2}}{3} \cdot \sqrt{t} = \frac{x^2}{2} - \frac{2\sqrt{2}}{3} \cdot \sqrt{x+1} = F(x)$$

Sustituyendo en (*) el valor obtenido de F(x):

$$S = F(0) - 2F(0) + F(3) = \left(0 - \frac{2\sqrt{2}}{3} \cdot \sqrt{1} \right) - 2 \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{2\sqrt{2}}{3} \cdot \sqrt{2} \right) + \left(\frac{9}{2} - \frac{2\sqrt{2}}{3} \cdot \sqrt{4} \right) =$$

$$= -\frac{2\sqrt{2}}{3} - 2 \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{4}{3} \right) + \frac{9}{2} - \frac{4\sqrt{2}}{3} = -\frac{6\sqrt{2}}{3} - 1 + \frac{8}{3} + \frac{9}{2} = \frac{16+27-6-12\sqrt{2}}{6} = \frac{37-12\sqrt{2}}{6} =$$

$$= \underline{\underline{\frac{37}{6} - 2\sqrt{2} u^2 \cong 3'24 u^2 = S}}$$

2-B) Se consideran todos los pares de números reales positivos x, y , tales que $x \cdot y = 2002$. Se pide:

- a) Determinar el par x, y cuya suma $x + y$ es mínima y calcular el valor de dicha suma.
- b) Probar que entre todos los pares existentes, puede elegirse x, y de forma que $x + y$ sea tan grande como se quiera.

a)

$$P = x \cdot y = 2002 \quad ; ; \quad y = \frac{2002}{x}$$

$$S = x + y = x + \frac{2002}{x} = \frac{x^2 + 2002}{x}$$

$$S' = \frac{2x \cdot x - (x^2 + 2002)}{x^2} = \frac{2x^2 - x^2 - 2002}{x^2} = \frac{x^2 - 2002}{x^2} \quad ; ; \quad S' = 0 \Rightarrow x^2 - 2002 = 0 \quad ; ;$$

$$x^2 = 2002 \quad ; ; \quad x = \pm \sqrt{2002} \quad ; ; \quad x > 0 \Rightarrow \underline{\underline{x = \sqrt{2002}}} \quad ; ; \quad y = \frac{2002}{x} = \frac{2002}{\sqrt{2002}} = \underline{\underline{\sqrt{2002}}} = y$$

La suma mínima es:

$$S = \sqrt{2002} + \sqrt{2002} = \underline{\underline{2\sqrt{2002}}} = S$$

b)

En efecto, de todos los pares elegidos pueden elegirse un par x, y tal que su suma sea tan grande como queramos.

Siendo $y = \frac{2002}{x}$, haciendo x infinitamente pequeña, y se hace infinitamente grande, es decir:

$$y = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2002}{x} = \infty$$

BLOQUE 3 (Geometría)

3-A) Se consideran las rectas $r \equiv \begin{cases} x - 2y = 1 \\ 2y - z = 0 \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x + 2y + z = 7 \\ y + 2z = 5 \end{cases}$, se pide:

a) Probar que r y s están en un mismo plano π .

b) Determinar la posición de la recta $t \equiv x = y + 1 = -z - 2$ respecto del plano π y respecto de la recta s.

c) Ecuación de la recta r', paralela a r, que se corta con s y con t.

a)

En primer lugar expresamos las rectas r y s en ecuaciones paramétricas:

$$r \equiv \begin{cases} x - 2y = 1 \\ 2y - z = 0 \end{cases} \Rightarrow \underline{z = k} \Rightarrow 2y = k \quad ; ; \quad \underline{y = \frac{1}{2}k} \quad ; ; \quad x = 1 + 2y = \underline{1 + k = x} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 1 + k \\ y = \frac{1}{2}k \\ z = k \end{cases}$$

$$s \equiv \begin{cases} x + 2y + z = 7 \\ y + 2z = 5 \end{cases} \Rightarrow \underline{z = k} \Rightarrow \underline{y = 5 - 2k} \quad ; ; \quad x = 7 - 2y - z = 7 - 10 + 4k - k =$$

$$= \underline{-3 + 3k = x} \Rightarrow s \equiv \begin{cases} x = -3 + 3k \\ y = 5 - 2k \\ z = k \end{cases}$$

Un vector director y un punto de cada una de las rectas son:

$$r \Rightarrow \begin{cases} \vec{u} = (2, 1, 2) \\ A(1, 0, 0) \end{cases} \quad ; ; \quad s \Rightarrow \begin{cases} \vec{v} = (3, -2, 1) \\ B(-3, 5, 0) \end{cases}$$

Si las rectas están contenidas en el mismo plano, los vectores \vec{u} , \vec{v} y $\vec{w} = \overrightarrow{AB}$ tienen que ser linealmente independiente, o lo que es lo mismo: el rango de la matriz que constituyen tiene que ser menor de 3.

$$\vec{w} = \overrightarrow{AB} = B - A = (-3, 5, 0) - (1, 0, 0) = \underline{(-4, 5, 0) = \vec{w}}$$

$$\text{Rango de } \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \\ -4 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 30 - 4 - 16 - 10 = 0$$

Las rectas r y s están en un mismo plano π , c.q.d.

b)

El plano π puede determinarse por los vectores \vec{u} y \vec{v} y, por ejemplo, el punto A:

$$\pi(A; \vec{u}, \vec{w}) \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y & z \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad ; ; \quad (x-1) + 6y - 4z - 3z + 4(x-1) - 2y = 0 \quad ; ;$$

$$5(x-1) + 4y - 7z = 0 \quad ; ; \quad 5x - 5 + 4y - 7z = 0 \quad ; ; \quad \underline{\pi \equiv 5x + 4y - 7z - 5 = 0}$$

Para estudiar la posición relativa de $t \equiv \frac{x}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+2}{-1}$ y $\pi \equiv 5x + 4y - 7z - 5 = 0$, en primer lugar expresamos la recta t por unas ecuaciones continuas, es decir, por la intersección de dos planos:

$$t \equiv \begin{cases} x = y + 1 \\ -x = z + 2 \end{cases} \quad ; ; \quad t \equiv \begin{cases} x - y - 1 = 0 \\ x + z + 2 = 0 \end{cases}$$

$$\{\pi, t\} \Rightarrow \begin{cases} x - y - 1 = 0 \\ x + z + 2 = 0 \\ 5x + 4y - 7z - 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 5 & 4 & -7 \end{pmatrix} \quad ; ; \quad M' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 5 & 4 & -7 & -5 \end{pmatrix}$$

$$|M| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 5 & 4 & -7 \end{vmatrix} = -5 - 4 - 7 = -16 \neq 0$$

Rango M = Rango M' = 3 = n° incógnitas \Rightarrow Compatible det er min ado

La recta t y el plano π son secantes

A diferencia del estudio de la posición relativa anterior, el estudio de la posición relativa de las rectas s y t lo vamos a realizar por sus vectores directores.

$$t \equiv \frac{x}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+2}{-1} \quad ; ; \quad s \equiv \begin{cases} x = -3 + 3k \\ y = 5 - 2k \\ z = k \end{cases}$$

Un vector director y un punto de cada una de las rectas son:

$$t \Rightarrow \begin{cases} \vec{c} = (1, 1, -1) \\ P(0, -1, -2) \end{cases} \quad ; ; \quad s \Rightarrow \begin{cases} \vec{v} = (3, -2, 1) \\ B(-3, 5, 0) \end{cases}$$

Los vectores \vec{c} y \vec{v} son linealmente independientes, por lo cual las rectas se cortan o se cruzan.

Si las rectas se cortan están en un mismo plano y los vectores \vec{c} , \vec{v} y $\vec{d} = \overrightarrow{BP}$ tienen que ser linealmente independiente, o lo que es lo mismo: el rango de la matriz que constituyen tiene que ser menor de 3.

$$\vec{d} = \overrightarrow{PB} = P - B = (0, -1, -2) - (-3, 5, 0) = \underline{(3, -6, -2)} = \vec{d}$$

$$\text{Rango de } \{\vec{c}, \vec{v}, \vec{d}\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 3 & -6 & -2 \end{vmatrix} = 4 + 18 + 3 - 6 + 6 + 6 = 31 \neq 0$$

Las rectas t y s se cruzan

c)

La recta r' pedida viene determinada por la intersección de dos planos; uno de ellos es π , intersección de r y s; el otro π' , es un plano que tiene como vectores los de las rectas t y r' (r) y que contiene a t, o sea, vectores directores de t y r y un punto de t:

$$\pi'(P; \vec{u}, \vec{c}) \equiv \begin{vmatrix} x & y+1 & z+2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \quad ; ; \quad -x + 2(y+1) + 2(z+2) - (z+2) - 2x + 2(y+1) = 0 \quad ; ;$$

$$-3x + 4(y+1) + (z+2) = 0 \quad ; ; \quad -3x + 4y + 4 + z + 2 = 0 \quad ; ; \quad \underline{\underline{\pi' \equiv 3x - 4y - z - 6 = 0}}$$

$$\underline{\underline{r' \equiv \begin{cases} 5x + 4y - 7z - 5 = 0 \\ 3x - 4y - z - 6 = 0 \end{cases}}}$$

3-B) Se consideran los puntos A(4, 0, -1) y B(1, 0, 0). Se pide:

a) Ecuación de la recta r determinada por los puntos A y B y de la recta t paralela a r por el punto P(1, 1, 1)

b) Ecuación del plano π que contiene a las rectas r y t.

c) Determinar algún punto C del plano π de forma que los puntos A, B, C formen un triángulo rectángulo con el ángulo recto en C.

a)

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB} = B - A = (1, 0, 0) - (4, 0, -1) = \underline{\underline{(-3, 0, 1)}} = \vec{u}$$

$$r \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \vec{u} = (-3, 0, 1) \\ A(4, 0, -1) \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{\underline{r \equiv \begin{cases} x = 4 - 3k \\ y = 0 \\ z = -1 + k \end{cases}}} \quad ; ; \quad t \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \vec{u} = (-3, 0, 1) \\ P(1, 1, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{\underline{t \equiv \begin{cases} x = 1 - 3k \\ y = 1 \\ z = 1 + k \end{cases}}}$$

b)

$$\vec{v} = \overrightarrow{AP} = P - A = (1, 1, 1) - (4, 0, -1) = \underline{\underline{(-3, 1, 2)}} = \vec{v}$$

$$\pi(P; \vec{u}, \vec{v}) \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ -3 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \quad ; ; \quad -3(y-1) - 3(z-1) - (x-1) + 6(y-1) = 0 \quad ; ;$$

$$-(x-1) + 3(y-1) - 3(z-1) = 0 \quad ; ; \quad -x + 1 + 3y - 3 - 3z + 3 = 0 \quad ; ; \quad \underline{\underline{\pi \equiv x - 3y + 3z - 1 = 0}}$$

c)

Sea C(x, y, z) un punto del plano π . Tiene que ser: $\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BC} \Rightarrow \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$

$$\left. \begin{array}{l} A(4, 0, -1) \\ B(1, 0, 0) \\ C(x, y, z) \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{AC} = C - A = (x, y, z) - (4, 0, -1) = (x-4, y, z+1) \\ \overrightarrow{BC} = C - B = (x, y, z) - (1, 0, 0) = (x-1, y, z) \end{array} \right.$$

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \Rightarrow (x-4, y, z+1) \cdot (x-1, y, z) = 0 \quad ; ; \quad (x-4)(x-1) + y^2 + z(z+1) = 0 \quad ; ;$$

$$x^2 - 5x + 4 + y^2 + z^2 + z = 0 \quad ; ; \quad \underline{\underline{x^2 + y^2 + z^2 - 5x + z + 4 = 0}} \quad (*)$$

Teniendo en cuenta que el punto tiene que pertenecer a π , con su ecuación y (*) formamos un sistema de dos ecuaciones con tres incógnitas. Para resolverlo fijamos una de las incógnitas, por ejemplo, $z = 0$, con lo cual resulta el sistema:

$$\left. \begin{array}{l} x^2 + y^2 - 5x + 4 = 0 \\ x - 3y - 1 = 0 \end{array} \right\} \rightarrow x = 3y + 1 \Rightarrow (3y + 1)^2 + y^2 - 5(3y + 1) + 4 = 0 \ ; \ ;$$

$$9y^2 + 6y + 1 + y^2 - 15y - 5 + 4 = 0 \ ; \ ; \ 10y^2 - 9y = 0 \ ; \ ; \ y(10y - 9) = 0 \Rightarrow \begin{cases} y_1 = 0 \\ y_2 = \frac{9}{10} \end{cases}$$

La primera solución nos proporciona una solución ilógica, ya que el punto C coincide con el punto B(1,0, 0) por lo tanto, consideramos la solución $y = \frac{9}{10}$, que resulta el punto siguiente:

$$x = 3y - 1 = \frac{27}{10} + 1 = \frac{37}{10} = x \Rightarrow \underline{\underline{C\left(\frac{37}{10}, \frac{9}{10}, 0\right)}}$$
