0PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

SEPTIEMBRE - 2000

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II — Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

1.-El ejercicio consta de tres bloques de problemas y cada bloque tiene dos opciones. Debe responderse necesariamente a los tres bloques, escogiendo en cada uno de ellos una sola de las opciones (A o B).
2.- Debe exponerse con claridad el planteamiento del problema o el método utilizado para su resolución. Todas las respuestas deben ser razonadas.
3.- Todas las preguntas se puntúan igual.

BLOQUE 1

1-A) Sea la función $f(x)=\frac{\sqrt{x^2+x}}{x-2}$. Se pide:

a) Dominio y cortes con los ejes.

b) Estudio de las asíntotas horizontales, verticales y oblicuas.

c) Hacer una gráfica representando los datos obtenidos antes. Si es posible, completar la definición de f(x) en los puntos en que sea necesario para obtener una nueva función que sea continua en todo R o en todo R salvo un número finito de puntos.

----

a)

La función se puede expresar de la forma $f(x)=\frac{\sqrt{x(x+1)}}{x-2}$, donde se observa que el numerador es real $\forall x \in R \;\; con \;\; -1 \le x \le 0$. Por otra parte la función no está definida para $x=2$ por anularse el denominador. Por todo lo anterior el dominio de f(x) es:

$$\underline{\underline{D(f) \Rightarrow (-\infty,\ -1) \cup (0,\ 2) \cup (2,\ \infty)}}.$$

Los cortes con los ejes son:

$$\begin{cases} \underline{Eje\ \ X} \Rightarrow y=f(x)=0 \;\Rightarrow\; x(x+1)=0 \;\Rightarrow\; \begin{cases} x_1=0 \;\Rightarrow\; \underline{\underline{O(0,\ 0)}} \\ x_2=-1 \;\Rightarrow\; \underline{\underline{A(-1,\ 0)}} \end{cases} \\ \underline{Eje\ \ Y} \Rightarrow x=0 \;\Rightarrow y=f(0)=\frac{0}{-2}=0 \;\;\Rightarrow\;\; \underline{\underline{O(0,\ 0)}} \end{cases}$$

b)

Las asíntotas de la función son las siguientes:

Horizontales: son los valores finitos que toma y cuando x tiende a valer más o menos infinito; son de la forma y = k.

$$y = k = \lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + x}}{x - 2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{x}}}{1 - \frac{2}{x}} = \frac{\sqrt{1+0}}{1-0} = \pm 1 \Rightarrow \begin{cases} \underline{\underline{y_1 = 1}} \\ \underline{\underline{y_2 = -1}} \end{cases}$$

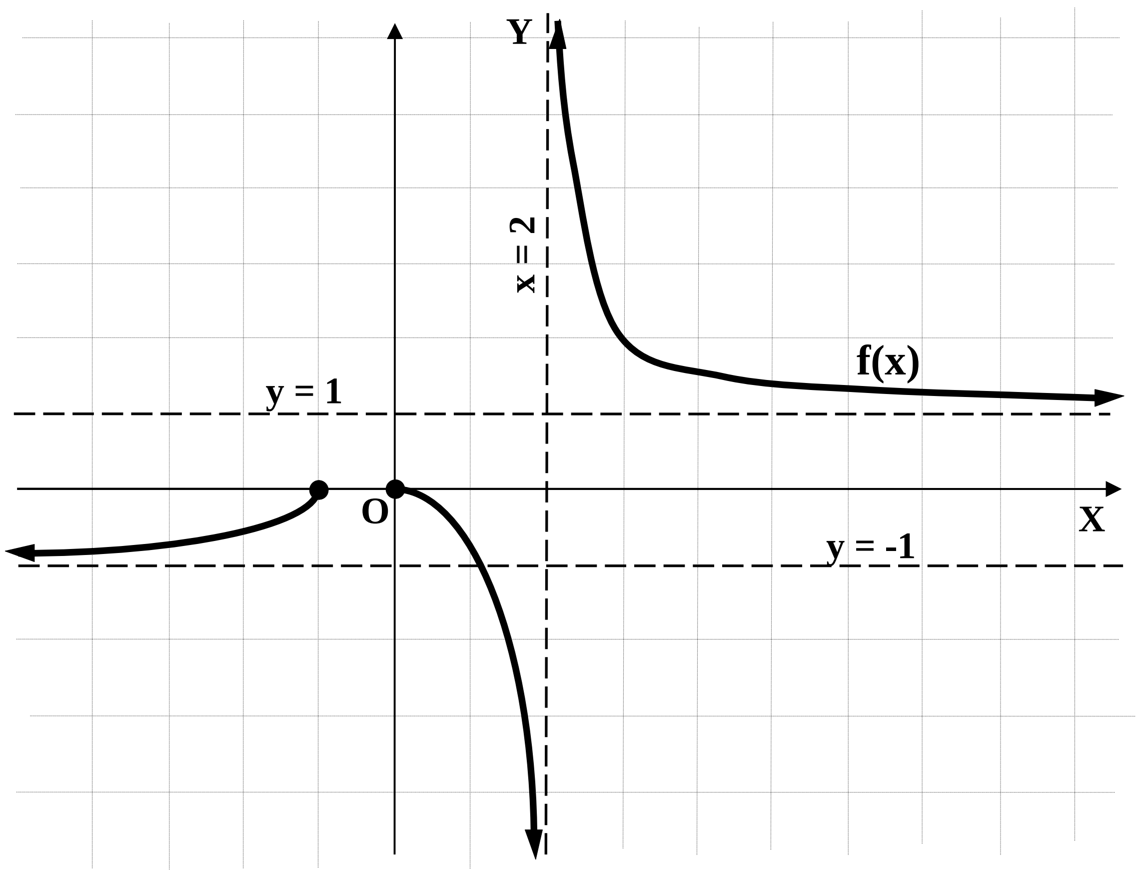
Verticales: son los valores de x que anulan el denominador: $x - 2 = 0 \;\Rightarrow\; \underline{\underline{x = 2}}$

Oblicuas: <u>No tiene.</u>

(Para que una función racional tenga asíntotas oblicuas es necesario que el grado del numerador sea una unidad mayor que el grado del denominador).

c)

La representación de la función es aproximadamente la siguiente:



****

1-B) Para cualquier número real a se considera la siguiente función:

$$f(x)=\begin{cases} x^2+2x & si\ -\infty < x \le 0 \\ sen(ax) & si\ \ 0 < x < \pi \\ (x-\pi)^2+1 & si\ \ \pi \le x < \infty \end{cases}$$

a) Determinar los valores de a para los cuales f(x) es continua en todo R. Estudiar la derivabilidad de f(x) para cada uno de estos valores.

b) Determinar un valor de b para el cual la función sen (bx) tenga exactamente 40 mínimos en el intervalo $(0,\ \pi)$.

----

a)

Para que sea continua para x = 0 tiene que cumplirse que los límites por la izquierda y por la derecha sean iguales, e igual al valor de la función en ese punto:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\left(x^2+2x\right)=\underline{0}=f(0) \\ \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\left[sen\ (ax)\right]=sen\ 0=\underline{0} \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{\underline{x=0 \Rightarrow Continua,\ \forall x\in R}}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to \pi^-} f(x)=\lim\limits_{x\to \pi}\left[sen\ (a\pi)\right]=\underline{sen\ (a\pi)} \\ \\ \lim\limits_{x\to \pi^+} f(x)=\lim\limits_{x\to \pi}\left[(\pi-\pi)^2+1\right]=\underline{1}=f(\pi) \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} \underline{\underline{x=\pi \Rightarrow Continua\ \ para\ \ a=\frac{2k+1}{2}}} \\ \\ \underline{\underline{\forall k\in N}} \end{cases}$$

Una función es derivable en un punto si, y solo si, existen la derivada por la izquierda y la derivada por la derecha en ese punto y además, son iguales.

$$f'(x)=\begin{cases} 2x+2 & si\ -\infty < x \le 0 \\ a\cdot\cos(ax) & si\ \ 0 < x < \pi \\ 2(x-\pi) & si\ \ \pi \le x < \infty \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(0^-)=2 \\ f'(0^+)=a=\frac{2k+1}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow 2=\frac{2k+1}{2}\ \ ;;\ \ 4=2k+1\ \ ;;\ \ 2k=5\ \ ;;\ \underline{k=\frac{5}{2}\Rightarrow k\notin N}$$

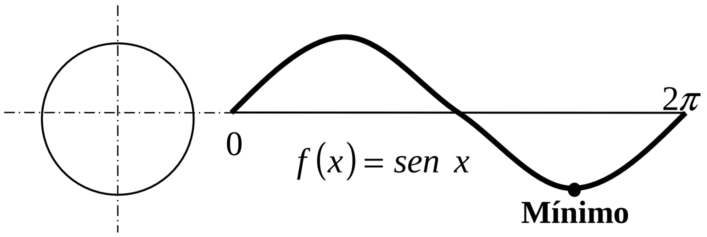
$$\underline{f'(0^-)\neq f'(0^+),\ \forall k\in N}\ \Rightarrow \underline{\underline{No\ \ es\ \ derivable\ \ para\ \ x=0}}$$

$$\left.\begin{array}{l} f'\left(\pi^-\right)=\dfrac{2k+1}{2}\cdot\cos\dfrac{2k+1}{2}\pi,\ \ para\ \ k\in N \Rightarrow f'\left(\pi^-\right)=0 \\ f'\left(\pi^+\right)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{f'\left(\pi^-\right)=f'\left(\pi^+\right)}$$

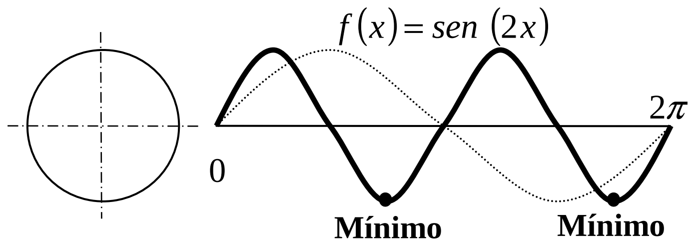
$$\underline{\underline{La\ \ función\ \ es\ \ derivable\ \ para\ \ x=\pi}}$$

b)

Teniendo en cuenta que:



$$\Rightarrow \underline{f(x)=sen\ x \Rightarrow 1\ \ mínimo}$$



$$\Rightarrow \underline{f(x)=sen\ (2x) \Rightarrow 2\ \ mínimos}$$

De lo anterior debe deducirse que la función que tiene exactamente 40 mínimos es:

$$\underline{\underline{f(x)=sen\ (40x)}}$$

****

BLOQUE 2

2-A) Si la matriz $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ tiene rango 1 y la matriz $B=\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$ tiene rango 2, explicar que valores puede tener el rango de las siguientes matrices:

$$C=\begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & y \\ 0 & 0 & z & w \end{pmatrix} \; ; \; D=\begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ x & y & 0 & 0 \\ z & w & 0 & 0 \end{pmatrix} \; y \; E=\begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ x & 0 & y & 0 \\ z & 0 & w & 0 \end{pmatrix}.$$

$$|C|=\begin{vmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & y \\ 0 & 0 & z & w \end{vmatrix}=a\cdot\begin{vmatrix} d & 0 & 0 \\ 0 & x & y \\ 0 & z & w \end{vmatrix}-b\cdot\begin{vmatrix} c & 0 & 0 \\ 0 & x & y \\ 0 & z & w \end{vmatrix}=a\cdot d\cdot\begin{vmatrix} x & y \\ z & w \end{vmatrix}-b\cdot c\cdot\begin{vmatrix} x & y \\ z & w \end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix} x & y \\ z & w \end{vmatrix}\cdot(a\cdot d-b\cdot c)=\begin{vmatrix} x & y \\ z & w \end{vmatrix}\cdot 0=0\Rightarrow \underline{\underline{2\le Rango\ C<4}}$$

$$|D|=\begin{vmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ x & y & 0 & 0 \\ z & w & 0 & 0 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} c & d & 0 \\ x & y & 0 \\ z & w & 0 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x & y \\ z & w \end{vmatrix}\Rightarrow \underline{\underline{Rango\ \ de\ \ D=2}}$$

$$|E|=\begin{vmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ x & 0 & y & 0 \\ z & 0 & w & 0 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} c & d & 0 \\ x & 0 & y \\ z & 0 & w \end{vmatrix}=-d\cdot\begin{vmatrix} x & y \\ z & w \end{vmatrix}\Rightarrow\begin{cases} \underline{\underline{Para\ \ d=0\Rightarrow Rango\ \ de\ \ E=2}} \\ \underline{\underline{Para\ \ d\ne 0\Rightarrow Rango\ \ de\ \ E=3}} \end{cases}$$

****

2-B) Averiguar, según el valor de a, el número de raíces reales que tiene la ecuación:

$$\begin{vmatrix} x^2 & a & a & a \\ a & x^2 & a & a \\ a & a & x^2 & a \\ a & a & a & x^2 \end{vmatrix} = 0 .$$

Sumando a la primera fila todas las demás resulta:

$$\begin{vmatrix} x^2+3a & x^2+3a & x^2+3a & x^2+3a \\ a & x^2 & a & a \\ a & a & x^2 & a \\ a & a & a & x^2 \end{vmatrix} = 0 \;\; ;; \;\; \left(x^2+3a\right)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & x^2 & a & a \\ a & a & x^2 & a \\ a & a & a & x^2 \end{vmatrix} = 0$$

Restando la primera columna a todas las demás queda:

$$\left(x^2+3a\right)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & x^2-a & 0 & 0 \\ a & 0 & x^2-a & 0 \\ a & 0 & 0 & x^2-a \end{vmatrix} = 0 \;\; ;; \;\; \left(x^2+3a\right)\cdot\left(x^2-a\right)^3 = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} x^2+3a=0 \\ x^2-a=0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 = -3a \;\; ;; \;\; x = \pm\sqrt{-3a} \Rightarrow \begin{cases} \underline{\underline{x_1 = \sqrt{-3a}}} \\ \underline{\underline{x_2 = -\sqrt{-3a}}} \end{cases} \\ x^2 = a \;\; ;; \;\; x = \pm\sqrt{a} \Rightarrow \begin{cases} \underline{\underline{x_3 = \sqrt{a}}} \\ \underline{\underline{x_4 = -\sqrt{a}}} \end{cases} \end{cases}$$

<u>Tiene cuatro raíces reales diferentes.</u>

****

BLOQUE 3

3-A) Un cuadrado tiene dos vértices consecutivos en los puntos P(2, 1, 3) y Q(1, 3, 1) y los otros dos sobre una recta r que pasa por el punto R(-4, 7, -6). Se pide:

a) Ecuación de la recta r y del plano π que contiene al cuadrado.

b) Calcular los otros dos vértices de este cuadrado y la longitud de su diagonal.

----

a)

Los puntos P, Q y R determinan al plano π, que contiene a la recta r:

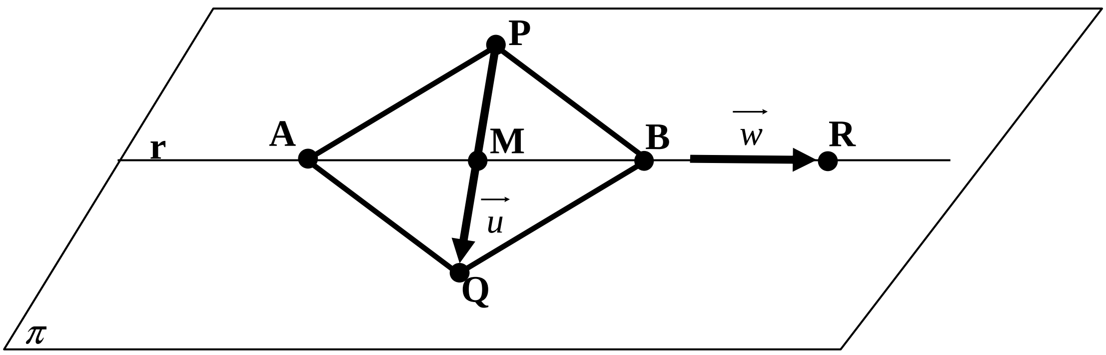
$$\overrightarrow{u} = \overrightarrow{PQ} = Q - P = (1,\ 3,\ 1) - (2,\ 1,\ 3) = \underline{(-1,\ 2,\ 2) = \overrightarrow{u}}$$

$$\overrightarrow{v} = \overrightarrow{PR} = R - P = (-4,\ 7,\ -6) - (2,\ 1,\ 3) = \underline{(-6,\ 6,\ -9) = \overrightarrow{v}}$$

$$\pi\left(P;\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right) \equiv \begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z-3 \\ -1 & 2 & -2 \\ -6 & 6 & -9 \end{vmatrix} = 0\ ;;\ \begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z-3 \\ -1 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 0\ ;;$$

$$-6(x-2) - 2(z-3) + 4(y-1) + 4(z-3) + 4(x-2) - 3(y-1) = 0\ ;;$$

$$-2(x-2) + (y-1) + 2(z-3) = 0\ ;;\ -2x + 4 + y - 1 + 2z - 6 = 0 \Rightarrow \underline{\underline{\pi \equiv 2x - y - 2z + 3 = 0}}$$



El punto medio M del segmento de extremos P y Q es $M\left(\frac{3}{2},\ 2,\ 2\right)$.

Cualquier vector $\overrightarrow{w}$, paralelo a $\overrightarrow{MR}$, puede ser director de la recta r:

$$\overrightarrow{MR} = R - M = (-4,\ 7,\ -6) - \left(\frac{3}{2},\ 2,\ 2\right) = \left(-\frac{11}{2},\ 5,\ -8\right) \Rightarrow \underline{\overrightarrow{w} = (-11,\ 10,\ -16)}$$

La recta r es la que tiene como vector director a $\overrightarrow{w}$ y pasa por P:

$$r \equiv \begin{cases} x = -4 - 11\lambda \\ y = 7 + 10\lambda \\ z = -6 - 16\lambda \end{cases}$$

b)

La diagonal del cuadrado es $d = \left| \overrightarrow{PQ} \right| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + (-2)^2} = \sqrt{9} = \underline{\underline{3\ u = d}}$

Para determinar los vértices A y B tenemos en cuenta que: $\overline{AM} = \overline{MP} = \frac{3}{2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \sqrt{\left(\frac{3}{2} + 4 + 11\lambda\right)^2 + (2 - 7 - 10\lambda)^2 + (2 + 6 + 16\lambda)^2} = \frac{3}{2} \ ;;$$

$$\frac{9}{4} = \left(\frac{11}{2} + 11\lambda\right)^2 + (-5 - 10\lambda)^2 + (8 + 16\lambda)^2 \ ;; \ \frac{9}{4} = 121\left(\frac{1}{2} + \lambda\right)^2 + 25(1 + 2\lambda)^2 + 64(1 + 2\lambda)^2 \ ;;$$

$$\frac{9}{4} = 121\left(\frac{1 + 2\lambda}{2}\right)^2 + 25(1 + 2\lambda)^2 + 64(1 + 2\lambda)^2 \ ;; \ \frac{9}{4} = \left(\frac{121}{4} + 25 + 64\right)(1 + 2\lambda)^2 \ ;;$$

$$\frac{9}{4} = \frac{121 + 100 + 256}{4} \cdot (1 + 2\lambda)^2 \ ;; \ 9 = 477 \cdot (1 + 2\lambda)^2 \ ;; \ 1 = 53 \cdot (1 + 2\lambda)^2 \ ;;$$

$$\frac{1}{53} = 1 + 4\lambda + 4\lambda^2 = 0 \ ;; \ 4\lambda^2 + 4\lambda + \frac{52}{53} = 0 \ ;; \ \lambda^2 + \lambda + \frac{13}{53} = 0$$

$$\lambda = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - \frac{52}{53}}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{\frac{1}{53}}}{2} = \frac{-1 \pm \frac{\sqrt{53}}{53}}{2} = \frac{-53 \pm \sqrt{53}}{106} \Rightarrow \begin{cases} \underline{\lambda_1 = \frac{-53 + \sqrt{53}}{106}} \\ \underline{\lambda_2 = \frac{-53 - \sqrt{53}}{106}} \end{cases}$$

$$\lambda_1 = \frac{-53 + \sqrt{53}}{106} \quad \Rightarrow \quad A \equiv \begin{cases} x = -4 - 11\lambda \\ y = 7 + 10\lambda \\ z = -6 - 16\lambda \end{cases} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -4 - 11 \cdot \frac{-53 + \sqrt{53}}{106} = -4 + \frac{-53 + \sqrt{53}}{106} = \frac{159 - 11\sqrt{53}}{106} \\ y = 7 + 10 \cdot \frac{-53 + \sqrt{53}}{106} = 7 + \frac{-530 + 10\sqrt{53}}{106} = \frac{212 + 10\sqrt{53}}{106} = \frac{106 + 5\sqrt{53}}{53} \\ z = -6 - 16 \cdot \frac{-53 + \sqrt{53}}{106} = -6 + \frac{424 - 8\sqrt{53}}{53} = \frac{106 - 8\sqrt{53}}{53} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{A\left(\frac{159-11\sqrt{53}}{106},\ \ \frac{106+5\sqrt{53}}{53},\ \ \frac{106-8\sqrt{53}}{53}\right)}}$$

$$\lambda_2=\frac{-53-\sqrt{53}}{106} \quad\Rightarrow\quad B\equiv\begin{cases}x=-4-11\lambda\\ y=7+10\lambda\\ z=-6-16\lambda\end{cases} \quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left\{\begin{array}{l} x=-4-11\cdot\dfrac{-53-\sqrt{53}}{106}=-4+\dfrac{583+\sqrt{53}}{106}=\dfrac{159+11\sqrt{53}}{106}\\ y=7+10\cdot\dfrac{-53-\sqrt{53}}{106}=7+\dfrac{-530-10\sqrt{53}}{106}=\dfrac{212-10\sqrt{53}}{106}=\dfrac{106-5\sqrt{53}}{53}\\ z=-6-16\cdot\dfrac{-53+\sqrt{53}}{106}=-6+\dfrac{424+8\sqrt{53}}{53}=\dfrac{106+8\sqrt{53}}{53}\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{B\left(\frac{159+11\sqrt{53}}{106},\ \ \frac{106-5\sqrt{53}}{53},\ \ \frac{106+8\sqrt{53}}{53}\right)}}$$

****

3-B) Se consideran las rectas $r \equiv \begin{cases} x - ay = 1 \\ y - z = 1 \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x - 2y - z = 0 \\ x + y + z = 8 \end{cases}$. Probar que, para ningún valor de a, r y s pueden ser paralelas y averiguar el único valor de a para el cual se cortan.

a) Calcular el punto P intersección de r y s y la ecuación del plano π que las contiene.

b) Determinar la ecuación de la recta t que está contenida en el plano π y es perpendicular a r en el punto P. Escribir la ecuación de otras dos rectas p y q que sean perpendiculares a r por el punto P.

El sistema de cuatro ecuaciones con tres incógnitas que forman las rectas tiene las matrices de coeficientes y ampliada siguientes:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -a & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \;;;\; M' = \begin{pmatrix} 1 & -a & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 8 \end{pmatrix}$$

Para que dos rectas sean paralelas es necesario que el rango de M sea 2 y el de M' sea tres:

Veamos el rango de M; tomando las tres últimas filas:

$$Rango\ \ M \Rightarrow \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 - 1 - 2 - 1 = -5 \neq 0 \Rightarrow \underline{Rango\ \ M = 3}$$

$$\underline{\underline{Las\ \ rectas\ \ no\ \ pueden\ \ ser\ \ paralelas\ \ \forall a \in R,\ \ c.q.d.}}$$

Para que las rectas se crucen es necesario que el rango de M' sea 4 y el de M, tres:

$$|M'| = \begin{vmatrix} 1 & -a & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 8 \end{vmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} C_2 \to C_2 + C_3 \\ C_4 \to C_4 + C_3 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -a & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -a & 1 \\ 1 & -3 & -1 \\ 1 & 2 & 9 \end{vmatrix} =$$

$$= -27 + 2 + a + 3 + 2 + 9a = -20 + 10a = 0 \Rightarrow \underline{\underline{a = 2}}$$

$$\underline{\underline{Para\ \ que\ \ las\ \ rectas\ \ se\ \ corten\ \ tiene\ \ que\ \ ser\ \ a = 2.}}$$

a)

El punto P de intersección de r y s puede obtenerse resolviendo el sistema formado por tres de las cuatro ecuaciones, por ejemplo:

$$\left.\begin{array}{l} x-2y=1 \\ y-z=1 \\ x-2y-z=8 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \rightarrow \\ \\ \rightarrow \end{array} \left.\begin{cases} 1-z=8 \\ \\ \underline{z=-7} \end{cases}\right\} \Rightarrow y-z=1 \;;;\; \underline{y=-6} \;;;\; x-2y=1 \;;;\; \underline{x=-11}$$

$$\underline{\underline{P(-11,\ -6,\ -7)}}$$

Las expresiones en ecuaciones paramétricas de las rectas r y s son las siguientes:

$$r \equiv \begin{cases} x-2y=1 \\ y-z=1 \end{cases} \Rightarrow \underline{z=\lambda} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x-2y=1 \\ \underline{y=1+\lambda} \end{array}\right\} \rightarrow x=1+2+2\lambda=\underline{3+2\lambda=x} \Rightarrow \underline{r \equiv \begin{cases} x=3+2\lambda \\ y=1+\lambda \\ z=\lambda \end{cases}}$$

$$s \equiv \begin{cases} x-2y-z=0 \\ x+y+z=8 \end{cases} \Rightarrow \underline{z=\lambda} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x-2y=\lambda \\ x+y=8-\lambda \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} -x+2y=-\lambda \\ x+y=8-\lambda \end{array}\right\} \Rightarrow 3y=8-2\lambda \;;;$$

$$\underline{y=\frac{8}{3}-\frac{2}{3}\lambda} \;;;\; x+y=8-\lambda \;;;\; x=8-\lambda-\frac{8}{3}+\frac{2}{3}\lambda=\underline{\frac{16}{3}-\frac{1}{3}\lambda=x} \quad \Rightarrow \quad \underline{s \equiv \begin{cases} x=\frac{16}{3}-\frac{1}{3}\lambda \\ y=\frac{8}{3}-\frac{2}{3}\lambda \\ z=\lambda \end{cases}}$$

Un punto de r es A(3, 1, 0) y un vector director de r es $\overrightarrow{u}=(2,\ 1,\ 1)$.

Un punto de s es B(5, 2, 1) y un vector director de s es $\overrightarrow{v}=(1,\ 2,\ -3)$.

El plano π que contiene a las rectas r y s es:

$$\pi(A;\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}) \equiv \begin{vmatrix} x-3 & y-1 & z \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix}=0 \;;;\; -3(x-3)+4z+(y-1)-z-2(x-3)+6(y-1)=0$$

$$-5(x-3)+7(y-1)+3z=0 \;;;\; -5x+15+7y-7+3z=0 \;;;\; \underline{\underline{\pi \equiv 5x-7y-3z-8=0}}$$

c)

Para determinar una recta t que esté contenida en el plano π y que sea perpendicular a r pasando por el punto P tendremos en cuenta que su vector director, $\overrightarrow{w}$, tiene que ser perpendicular a los vectores $\overrightarrow{u}\ \ y\ \ \overrightarrow{n}$, siendo $\overrightarrow{u} = (2,\ 1,\ 1)$ un vector director de la recta r y $\overrightarrow{n} = (5,\ -7,\ -3)$ un vector normal al plano π. Sabiendo que el producto vectorial de dos vectores es un vector perpendicular a ambos es:

$$\overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 1 & 1 \\ 5 & -7 & -3 \end{vmatrix} = -3i - 14k + 5j - 5k + 7i + 6j = 4i + 11j - 19k = (4,\ 11,\ -19)$$

$$\underline{\underline{t \equiv \begin{cases} x = -11 + 4\lambda \\ y = -6 + 11\lambda \\ z = -7 - 19\lambda \end{cases}}}$$

La única condición que nos piden que cumplan las rectas p y q es que sean perpendiculares a r y que pasen por P(-11, -6, -7), por lo tanto la única condición que deben cumplir es que sus vectores directores sean perpendiculares a $\overrightarrow{u}$, que es un vector director de r.

Los vectores directores pueden ser los siguientes:

$$\overrightarrow{v_p} = (1,\ 0,\ k) \Rightarrow \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v_p} = (2,\ 1,\ 1) \cdot (1,\ 0,\ k) = 2 + k = 0\ \ ;;\ \ k = -2 \Rightarrow \underline{\overrightarrow{v_p} = (1,\ 0,\ -2)}$$

$$\overrightarrow{v_q} = (0,\ 1,\ k) \Rightarrow \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v_q} = (2,\ 1,\ 1) \cdot (0,\ 1,\ k) = 1 + k = 0\ \ ;;\ \ k = -1 \Rightarrow \underline{\overrightarrow{v_q} = (0,\ 1,\ -1)}$$

Las rectas p y q pedidas son:

$$\underline{\underline{p \equiv \begin{cases} x = -11 + \lambda \\ y = -6 \\ z = -7 - 2\lambda \end{cases}}} \quad ;; \quad \underline{\underline{q \equiv \begin{cases} x = -11 \\ y = -6 + \lambda \\ z = -7 - \lambda \end{cases}}}$$

****