

PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)**UNIVERSIDAD DE CANTABRIA****JUNIO - 2000**

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II**Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos**

- 1.-El ejercicio consta de tres bloques de problemas y cada bloque tiene dos opciones. Debe responderse necesariamente a los tres bloques, escogiendo en cada uno de ellos una sola de las opciones (A o B).
- 2.- Debe exponerse con claridad el planteamiento del problema o el método utilizado para su resolución. Todas las respuestas deben ser razonadas.
- 3.- Todas las preguntas se puntúan igual.

BLOQUE 1

1-A) Sea la función $f(x) = nx - x^n$, siendo n un número entero distinto de 0 y 1.

a) Comprobar que, para cualquier valor de n distinto de 0 y 1, $f(x)$ tiene un extremo relativo en $x = 1$. Averiguar si depende o no del valor de n , el que este extremo sea máximo o mínimo.

b) Suponiendo ahora que $n > 1$, determinar, según los valores de n , los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función.

Utilizar esto para probar que $nx - x^n \leq n - 1, \forall x \geq 0$ y $\forall n > 1$.

a)

Las derivadas sucesivas de $f(x)$ son las siguientes:

$$f(x) = nx - x^n \Rightarrow \begin{cases} f'(x) = n - nx^{n-1} = n(1 - x^{n-1}) \\ f''(x) = -n(n-1)x^{n-2} \\ f'''(x) = -n(n-1)(n-2)x^{n-3} \\ \dots\dots\dots \\ f^{(n)}(x) = -n(n-1)(n-2) \cdot \dots \cdot 1 \cdot x^0 = -n! \end{cases}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow n(1 - x^{n-1}) = 0 \quad ; \quad 1 - x^{n-1} = 0 \Rightarrow \underline{x=1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \{n > 1\}$$

$$f''(x) = -n(n-1) \cdot x^{n-2} < 0, \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \text{y} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \{n > 1\} \Rightarrow \underline{\underline{Máximo}}$$

El extremo es un máximo, independientemente del valor de n .

b)

$$f'(x) = n \cdot (1 - x^{n-1}) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \underline{\underline{f'(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}, |x| < 1 \text{ y } \forall n \in \mathbb{N}, \{n > 1\} \Rightarrow \text{Creciente}}} \\ \underline{\underline{f'(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R}, x > 1 \text{ y } \forall n \in \mathbb{N}, \{n > 1\} \Rightarrow \text{Decreciente}}} \\ \text{Para } x < -1 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \underline{\underline{n \rightarrow \text{Par} \Rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow \text{Decreciente}}} \\ \underline{\underline{n \rightarrow \text{Im par} \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow \text{Creciente}}} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

1-B) Dada la función $f(x) = x\sqrt{5-x^2}$, se pide:

a) Dominio y cortes con los ejes. Intervalos de crecimiento y decrecimiento.

b) Calcular el área encerrada entre la gráfica de $f(x)$ y el eje de abscisas.

a)

El dominio de $f(x)$ es el conjunto de números reales que hacen $5-x^2 \geq 0$;;

$$5 \geq x^2 \quad ;; \quad x \leq \sqrt{5} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{D(f) \Rightarrow [-\sqrt{5}, +\sqrt{5}].}}$$

$$\text{Corte con los ejes} \Rightarrow \begin{cases} X \Rightarrow y = f(x) = 0 \quad ;; \quad x\sqrt{5-x^2} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \underline{\underline{x_1 = 0 \rightarrow O(0, 0)}} \\ \underline{\underline{x_2 = \sqrt{5} \rightarrow A(\sqrt{5}, 0)}} \\ \underline{\underline{x_3 = -\sqrt{5} \rightarrow B(-\sqrt{5}, 0)}} \end{cases} \\ Y \Rightarrow \underline{\underline{x = 0 \rightarrow O(0, 0)}} \end{cases}$$

$$f(x) = x\sqrt{5-x^2} = +\sqrt{5x^2-x^4} \quad ;; \quad f'(x) = \frac{10x-4x^3}{2\sqrt{5x^2-x^4}} = \frac{5x-2x^3}{\sqrt{5x^2-x^4}} = f'(x)$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{5x-2x^3}{\sqrt{5x^2-x^4}} = 0 \quad ;; \quad 5x-2x^3 = 0 \quad ;; \quad x(5-2x^2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \underline{\underline{x_1 = 0}} \\ \underline{\underline{x_2 = \frac{\sqrt{10}}{2}}} \\ \underline{\underline{x_2 = -\frac{\sqrt{10}}{2}}} \end{cases}$$

Tomamos un valor intermedio de las raíces, por ejemplo $x = 1$, para el cual el valor de la derivada es:

$$f'(1) = \frac{5-2}{\sqrt{5-1}} = \frac{3}{2} > 0 \Rightarrow \begin{cases} \underline{\underline{f'(x) > 0 \Rightarrow \left(-\sqrt{5}, -\frac{\sqrt{10}}{2}\right) \cup \left(0, \frac{\sqrt{10}}{2}\right) \Rightarrow \text{Creciente}}} \\ \underline{\underline{f'(x) < 0 \Rightarrow \left(-\frac{\sqrt{10}}{2}, 0\right) \cup \left(\frac{\sqrt{10}}{2}, +\sqrt{5}\right) \Rightarrow \text{Decreciente}}} \end{cases}$$

b)

Por ser positivas todas las ordenadas de la función $f(x) = x\sqrt{5-x^2} = \sqrt{5x^2-x^4}$, y por la simetría con respecto al eje de ordenadas, el área pedida es la siguiente:

$$S = 2 \cdot \int_0^{\sqrt{5}} x \cdot \sqrt{5-x^2} \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 5-x^2 = t \\ x dx = -\frac{1}{2} dt \end{array} \right\| \left\{ \begin{array}{l} x = \sqrt{5} \rightarrow t = 0 \\ x = 0 \rightarrow t = 5 \end{array} \right\} \Rightarrow S = 2 \cdot \int_5^0 \sqrt{t} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot dt =$$

$$= -\int_5^0 \sqrt{t} \cdot dt = \int_0^5 t^{\frac{1}{2}} \cdot dt = \left[\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_0^5 = \left[\frac{2t\sqrt{t}}{3} \right]_0^5 = \frac{2 \cdot 5 \cdot \sqrt{5}}{3} - 0 = \underline{\underline{\frac{10\sqrt{5}}{3} u^2 = S}}$$

BLOQUE 2

2-A) Si la matriz $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ tiene determinante n , averiguar el valor del determi-

nante de las siguientes matrices: $B = \begin{pmatrix} 6d & 4e & 2f \\ 3g & 2h & i \\ 9a & 6b & 3c \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} d+f & e & f+e \\ a+c & b & c+b \\ g+i & h & i+h \end{pmatrix}$.

$$|A| = n \Rightarrow |B| = \begin{vmatrix} 6d & 4e & 2f \\ 3g & 2h & i \\ 9a & 6b & 3c \end{vmatrix} = 3 \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 2d & 2e & 2f \\ g & h & i \\ 3a & 3b & 3c \end{vmatrix} = 6 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} d & e & f \\ g & h & i \\ a & b & c \end{vmatrix} = \underline{\underline{36n = |B|}}$$

$$|A| = n \Rightarrow |C| = \begin{vmatrix} d+f & e & f+e \\ a+c & b & c+b \\ g+i & h & i+h \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} d & e & f+e \\ a & b & c+b \\ g & h & i+h \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f & e & f+e \\ c & b & c+b \\ i & h & i+h \end{vmatrix} = M + N = |C| \quad (*)$$

$$M = \begin{vmatrix} d & e & f+e \\ a & b & c+b \\ g & h & i+h \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} d & e & f \\ a & b & c \\ g & h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} d & e & e \\ a & b & b \\ g & h & h \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} + 0 = \underline{\underline{-n = M}}$$

$$N = \begin{vmatrix} f & e & f+e \\ c & b & c+b \\ i & h & i+h \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f & e & f \\ c & b & c \\ i & h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f & e & e \\ c & b & b \\ i & h & h \end{vmatrix} = 0 + 0 = \underline{\underline{0 = N}}$$

Sustituyendo en () los valores obtenidos de M y N, resulta :*

$$|C| = \begin{vmatrix} d+f & e & f+e \\ a+c & b & c+b \\ g+i & h & i+h \end{vmatrix} = -n + 0 = \underline{\underline{-n = |C|}}$$

2-B) Se considera la función $f(x) = \begin{vmatrix} a & b & -2a & 3b \\ -1 & x & 0 & 0 \\ 0 & -1 & x & 0 \\ 0 & 0 & -1 & x \end{vmatrix}$. Sabiendo que $f(0) = -3$ y que

$f(1) = f(-1)$, determinar a y b .

$$f(x) = \begin{vmatrix} a & b & -2a & 3b \\ -1 & x & 0 & 0 \\ 0 & -1 & x & 0 \\ 0 & 0 & -1 & x \end{vmatrix} = a \cdot \begin{vmatrix} x & 0 & 0 \\ -1 & x & 0 \\ 0 & -1 & x \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} b & -2a & 3b \\ -1 & x & 0 \\ 0 & -1 & x \end{vmatrix} =$$

$$= ax^3 + bx^2 + 3b - 2ax = \underline{ax^3 + bx^2 - 2ax + 3b = f(x)}$$

$$f(0) = -3 \Rightarrow 3b = -3 \quad ; ; \quad \underline{b = -1} \quad ; ; \quad \underline{f(x) = ax^3 - x^2 - 2ax - 3}$$

$$f(1) = -1 \Rightarrow a - 1 - 2a - 3 = -1 \quad ; ; \quad \underline{-3 = a}$$

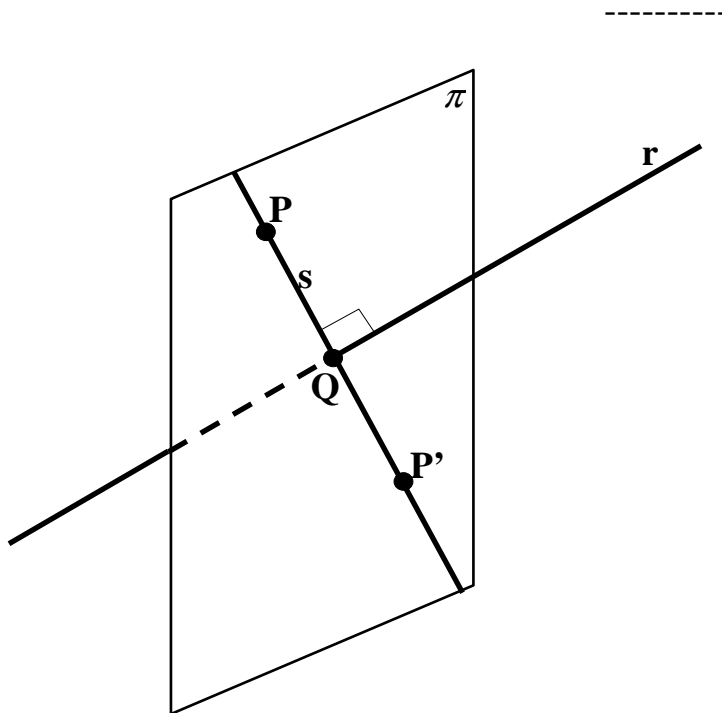
$$\underline{\underline{f(x) = -3x^3 - x^2 + 6x - 3}}$$

BLOQUE 3

3-A) Dada la recta $r \equiv \begin{cases} 3x - y + z = 0 \\ x - y = 1 \end{cases}$, se pide:

a) Determinar la ecuación de la recta s que pasa por el punto $P(2, -1, 0)$ y corta perpendicularmente a r . Calcular el punto Q intersección de r y s y el simétrico de P con respecto a r .

b) Obtener, explicando el procedimiento utilizado, una recta paralela a s que se cruce con r .



a) La situación del apartado está representada en la figura adjunta.

La expresión de la recta r por unas ecuaciones paramétricas es de la forma siguiente:

$$r \equiv \begin{cases} 3x - y + z = 0 \\ x - y = 1 \end{cases} \Rightarrow \underline{z = \lambda} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x - y = -\lambda \\ -x + y = -1 \end{cases} \Rightarrow 2x = -1 - \lambda ; ;$$

$$\underline{x = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\lambda ; ; x - y = 1 ; ; y = x - 1 =}$$

$$= -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\lambda - 1 = -\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\lambda = y \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\lambda \\ y = -\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

Un vector director de r puede ser $\vec{w} = (1, 1, -2)$.

El haz de planos perpendiculares a r tiene por expresión $x + y - 2z + D = 0$, y de ellos, sea π el que contiene a $P(2, -1, 0)$; la ecuación general de π es la siguiente:

$$\left. \begin{matrix} x + y - 2z + D = 0 \\ P(2, -1, 0) \end{matrix} \right\} \Rightarrow 2 - 1 - 0 + D = 0 ; ; D = -1 \Rightarrow \underline{\pi \equiv x + y - 2z - 1 = 0}.$$

El punto Q de corte de la recta r con el plano π es el siguiente:

$$r \equiv \left\{ \begin{array}{l} x = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\lambda \\ y = -\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\lambda \\ z = \lambda \end{array} \right\} \Rightarrow \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\lambda \right) + \left(-\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\lambda \right) - 2\lambda - 1 = 0 \quad ; ; \quad -2 - \lambda - 2\lambda - 1 = 0 \quad ; ;$$

$$\pi \equiv x + y - 2z - 1 = 0$$

$$-3\lambda - 3 = 0 \quad ; ; \quad \lambda + 1 = 0 \quad ; ; \quad \underline{\underline{\lambda = -1}} \Rightarrow \underline{\underline{Q(0, -1, -1)}}$$

Un vector director de la recta r puede ser \vec{v} , siendo:

$$\vec{v} = \overrightarrow{PQ} = Q - P = (0, -1, -1) - (2, -1, 0) = \underline{\underline{(-2, 0, -1) = \vec{v}}}$$

La recta s pasa por P y tiene como vector director \vec{v} : $s \equiv \underline{\underline{\left\{ \begin{array}{l} x = 2 - 2\lambda \\ y = -1 \\ z = -\lambda \end{array} \right\}}}$

El punto P', por pertenecer a la recta r es de la forma $P'(2 - 2\lambda, -1, -\lambda)$.

De la observación de la figura se deduce por simetría que: $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{QP'} \Rightarrow$

$$\Rightarrow Q - P = P' - Q \Rightarrow (0, -1, -1) - (2, -1, 0) = (2 - 2\lambda, -1, -\lambda) - (0, -1, -1) \quad ; ;$$

$$(-2, 0, -1) = (2 - 2\lambda, 0, -\lambda + 1) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} -2 = 2 - 2\lambda \\ -1 = -\lambda + 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{\underline{\lambda = 2}} \Rightarrow \underline{\underline{P'(-2, -1, -2)}}$$

b)

Cualquier recta r', paralela a r, puede tener como vector director al vector \vec{w} , director de la recta r; como punto puede tomarse cualquier punto del plano π que no sea el punto Q; podemos tomar, por ejemplo el punto P(2, -1, 0):

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{w} = (1, 1, -2) \\ P(2, -1, 0) \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{\underline{r' \equiv \left\{ \begin{array}{l} x = 2 + \lambda \\ y = -1 + \lambda \\ z = -2\lambda \end{array} \right\}}}$$

3-B) Se considera la recta $r \equiv \begin{cases} 2x - y = 1 \\ x - y + 2z = -1 \end{cases}$, se pide:

a) De todos los planos que se pueden representar por una ecuación de la forma: $\alpha \equiv 5x + my - 2z + 1 = 0$, probar que hay un único plano π que es paralelo a r. Comprobar si el plano π obtenido contiene o no a la recta r y en caso negativo, determinar el plano π_1 que es paralelo a π y contiene a r.

b) Obtener la ecuación de una recta t contenida en π_1 que sea perpendicular a r. ¿Cuántas hay?

a)

Si el plano π es paralelo a la recta r, el sistema que forman tiene que ser incompatible, es decir, que no tienen ningún punto en común.

Las matrices de coeficientes y ampliada del sistema resultante son:

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 5 & m & -2 \end{pmatrix} ; ; M' = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ 5 & m & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

Veamos el rango de M' considerando las columnas 1ª, 3ª y 4ª \Rightarrow

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 5 & -2 & -1 \end{vmatrix} = -4 - 2 - 10 - 4 = -20 \neq 0 \Rightarrow \underline{\text{Rango } M' = 3}$$

Como el rango de M tiene que ser diferente, ha de ser, necesariamente, $|M| = 0$:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 5 & m & -2 \end{vmatrix} = 0 ; ; 4 - 10 - 4m - 2 = 0 ; ; 4m = -8 ; ; \underline{m = -2}$$

El plano π pedido, único, tiene por ecuación $\pi \equiv 5x - 2y - 2z + 1 = 0$.

La expresión por unas ecuaciones paramétricas de la recta r es la siguiente:

$$r \equiv \left\{ \begin{array}{l} 2x - y = 1 \\ x - y + 2z = -1 \end{array} \Rightarrow \underline{z = \lambda} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2x - y = 1 \\ x - y = -1 - 2\lambda \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} 2x - y = 1 \\ -x + y = 1 + 2\lambda \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{x = 2 + 2\lambda} ; ;$$

$$2x - y = 1 ; ; y = 2x - 1 = 4 + 4\lambda - 1 = \underline{3 + 4\lambda = y} \Rightarrow r \equiv \underline{\begin{cases} x = 2 + 2\lambda \\ y = 3 + 4\lambda \\ z = \lambda \end{cases}}$$

Si el plano π contiene a la recta r tiene que satisfacer su ecuación $\forall \lambda \in R$:

$$\left. \begin{array}{l} \pi \equiv 5x - 2y - 2z + 1 = 0 \\ r \equiv \begin{cases} x = 2 + 2\lambda \\ y = 3 + 4\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \end{array} \right\} \Rightarrow 5(2 + 2\lambda) - 2(3 + 4\lambda) - 2\lambda + 1 = 0 \ ; ;$$

$$10 + 10\lambda - 6 - 8\lambda - 2\lambda + 1 = 0 \ ; ; 5 = 0 \ ?? \Rightarrow \underline{\underline{\pi \text{ no contiene a } r}}$$

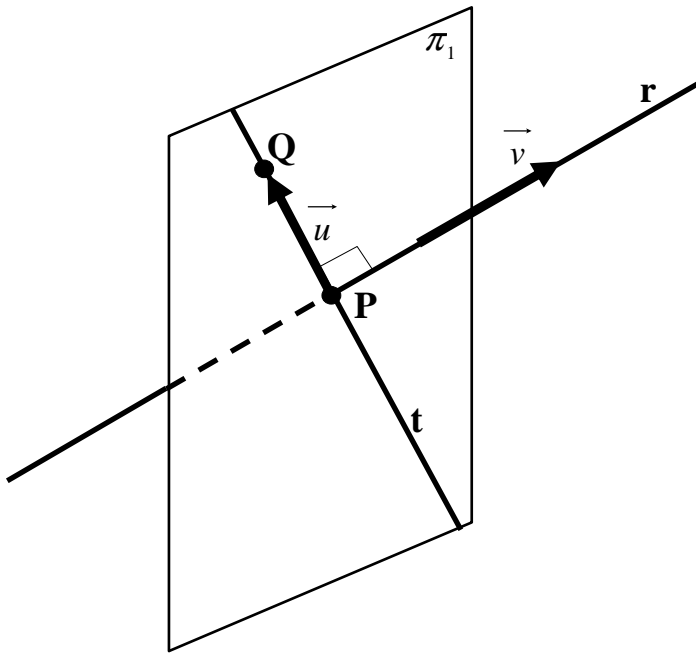
El plano π_1 paralelo a π que contiene a la recta r es el siguiente:

$$\left. \begin{array}{l} \pi \equiv 5x - 2y - 2z + D = 0 \\ r \equiv \begin{cases} x = 2 + 2\lambda \\ y = 3 + 4\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \end{array} \right\} \Rightarrow 5(2 + 2\lambda) - 2(3 + 4\lambda) - 2\lambda + D = 0 \ ; ;$$

$$10 + 10\lambda - 6 - 8\lambda - 2\lambda + D = 0 \ ; ; 4 + D = 0 \ ; ; D = -4 \Rightarrow \underline{\underline{\pi_1 \equiv 5x - 2y - 2z - 4 = 0}}$$

b)

Un vector director de r es $\vec{v} = (2, 4, 1)$.



Tomamos un punto genérico Q , perteneciente al plano π_1 , que tenga una componente nula con objeto de facilitar el cálculo, por ejemplo $x = 0$; sería:

$$\left. \begin{array}{l} \pi_1 \equiv 5x - 2y - 2z - 4 = 0 \\ x = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2y - 2z - 4 = 0 \ ; ; y + z + 2 = 0 \ ; ;$$

$$\underline{z = -y - 2} \Rightarrow \underline{Q(0, y, -y - 2)}$$

El vector $\vec{u} = \overrightarrow{PQ}$ es:

$$\vec{u} = \overrightarrow{PQ} = Q - P = (0, y, -y - 2) - (2, 3, 0) = \underline{\underline{(-2, y - 3, -y - 2) = \vec{u}}}$$

El vector \vec{u} va a ser el director de la recta t , que pasará por el punto P . Los vectores \vec{u} y \vec{v} tienen que ser perpendiculares, por lo tanto, su producto escalar tiene que ser cero:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Rightarrow (-3, y-3, -y-2) \cdot (2, 4, 1) = 4 - 12 - 4y + y + 2 = 0 \quad ;; \quad 18 = 3y \quad ;; \quad y = 6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{\vec{u} = (-2, 3, -8)} \Rightarrow t \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \vec{u} = (-2, 3, -8) \\ P(2, 3, 0) \end{array} \right\} \Rightarrow t \equiv \underline{\underline{\begin{cases} x = 2 - 2\lambda \\ y = 3 + 3\lambda \\ z = -8\lambda \end{cases}}}$$
