2015-Modelo

A. Pregunta 2.-

a)
$$k=m\cdot\omega^2\Rightarrow\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}=3{,}16\,rad/s$$
$$\omega=\frac{2\pi}{T}\Rightarrow T=\frac{2\pi}{3{,}16}\approx 2\,s$$

Si el muelle está sin deformar, está en la posición de equilibrio, y en esa posición la velocidad es máxima y de módulo igual a A·ω, luego utilizando unidades de Sistema Internacional

$$v_{máx}=A\cdot\omega\Rightarrow 0{,}158=A\cdot 3{,}16\Rightarrow A=\frac{0{,}158}{3{,}16}\approx 5\cdot 10^{-2}m$$

No se pide la expresión de la elongación en función del tiempo, pero si se pidiese, dado que en t=0 la elongación es 0, podríamos tomar como función seno (la elección es arbitraria), con lo que el desfase sería 0 ó π rad. Tomamos desfase π rad ya que la función seno es creciente para fase 0, pero se dice que el muelle se comprime inicialmente, luego la elongación está disminuyendo en t=0.

$$x=5\cdot 10^{-2}\cdot sen(3{,}16t+\pi)[x\,en\,m, t\,en\,s]$$

b) Según la ley de Hooke F=-kx, la fuerza será máxima en módulo cuando la elongación sea igual a la amplitud, luego $|F_{máx}|=k\cdot A=2\cdot 5\cdot 10^{-2}=0{,}1\,N$

La energía potencial máxima está asociada a la posición donde el muelle tiene la máxima compresión o alargamiento $E_{p\,máx}=\frac{1}{2}k\cdot A^2=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot(5\cdot 10^{-2})^2=2{,}5\cdot 10^{-3}J$

2014-Septiembre

B. Pregunta 2.-

a) En la figura podemos ver que la elongación varía entre +8 m y -8 m, luego la amplitud es A=8 m. El movimiento oscilatorio se repite cada 60 s (podemos ver un máximo en 10 s y en 70 s, y un mínimo en 40 s y en 100 s. El periodo es T = 60 s

b) Para la expresión general de la elongación

$x(t)=A\cdot\cos(\omega t+\phi_0)$ necesitamos conocer el valor de la fase inicial, ya que sí conocemos

$\omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{\pi}{30}rad/s$ y podemos llegar a la expresión

$$x(t)=8\cdot\cos(\frac{\pi}{30}t+\phi_0)[x\,en\,m, t\,en\,s]$$

Vemos que x(t=0 s) = 4 m, luego sustituyendo

$$4=8\cdot\cos(\phi_0)\Rightarrow\phi_0=\arccos(1/2)=\frac{\pi}{3}rad\text{ ó }-\frac{\pi}{3}rad$$

Para elegir entre los dos valores, comprobamos la velocidad

$$v(t)=\frac{-\pi}{30}8\cdot sen(\frac{\pi}{30}t+\phi_0)[v\,en\,m/s, t\,en\,s]$$

Vemos que v(t=0 s) es positiva (la pendiente de la gráfica), y sustituyendo

$$v(t=0s)=\frac{-\pi}{30}8\,sen(\phi_0)\Rightarrow\phi_0=\frac{-\pi}{3}rad, para\,que\,v(t=0\,s)>0$$

La expresión final

$$x(t)=8\cdot\cos(\frac{\pi}{30}t-\frac{\pi}{3})[x\,en\,m, t\,en\,s]$$

2014-Junio

A. Pregunta 2.-

a) La energía mecánica máxima en un muelle ideal oscilando es igual a la energía cinética máxima, por lo que podemos plantear

$$E_m=E_{c\,máx}=\frac{1}{2}mv_{máx}^2\Rightarrow 0{,}3=\frac{1}{2}0{,}3\cdot v_{máx}^2\Rightarrow v_{máx}=\sqrt{2}m/s\approx 1{,}41m/s$$

La velocidad máxima se alcanza en los puntos en los que la energía potencial es mínima, que es en la posición de equilibrio; se puede ver con la expresión $v=\pm\omega\sqrt{A^2-x^2}$ Como se pide posición

medida respecto al extremo fijo del muelle, y el muelle en equilibrio tiene 25 cm, se alcanza cuando la masa está a 25 cm del extremo del muelle.
b) La máxima aceleración ocurrirá en los extremos de la oscilación, es decir cuando la elongación sea igual a la amplitud, ya que en un movimiento oscilatorio se cumple a=-ω²x.
En el enunciado $K=0{,}2\frac{N}{\cancel{cm}}\cdot\frac{100\,\cancel{cm}}{1\,m}=20\,N/m$ y m=0,3 kg, con los que podemos calcular directamente la frecuencia angular $\omega=\sqrt{\frac{K}{m}}=\sqrt{\frac{20}{0{,}3}}\approx 8{,}16\,rad/s$, pero necesitamos calcular la x máxima.
La podemos calcular a partir de la energía

$$E_m=E_{p\,máx}=\frac{1}{2}K x_{máx}^2 \Rightarrow 0{,}3=\frac{1}{2}0{,}2\cdot 100\cdot x_{máx}^2 \Rightarrow x_{máx}=\sqrt{\frac{0{,}3}{10}}\,m\approx 0{,}17\,m$$

O bien con la velocidad máxima obtenida en el apartado anterior sabiendo que

$$v_{máx}=\omega\, x_{máx}\Rightarrow x_{máx}=\frac{v_{máx}}{\omega}\approx\frac{1{,}41}{8{,}16}\approx 0{,}17\,m$$

Operando

$$|a_{máx}|=\omega^2 x_{máx}=\frac{K}{m}x_{máx}\approx\frac{20}{0{,}3}\cdot 0{,}17=11{,}3\,m/s^2$$

2013-Septiembre
B. Pregunta 2.-
a) Si el periodo de oscilación es de 2,5 s, tenemos que la frecuencia angular será ω=2π/T= 2π/2,5=0,8π rad/s.
La velocidad máxima en módulo es $v_{máx}$=Aω, luego la amplitud del movimiento será A=$v_{máx}$/ω=40/0,8π=15,9 cm
b) Como tenemos que relacionar velocidad y posición, utilizamos la expresión $v=\pm\omega\sqrt{(A^2-x^2)}$
Sustituyendo el valor 10 cm/s en la expresión tenemos 100/(0,8π)²=15,9²-x²; x=15,39 cm. La velocidad tendría ese módulo a esa distancia del punto de equilibrio, tanto con x positiva como negativa, a ambos lados del punto de equilibrio a lo largo de su movimiento oscilatorio.

2013-Junio
B. Pregunta 2.-
a) Utilizando la ley de Hooke F=Kx, siendo la fuerza el peso P=mg=0,05·9,8=0,49 N y la elongación 0,45-0,4=0,05 m. Despejamos K=0,49/0,05=9,8 N/m
Describirá un movimiento armónico simple, con amplitud 0,1 m, y frecuencia angular
$\omega=\sqrt{\frac{K}{m}}=\sqrt{\frac{9{,}8}{0{,}05}}=14\,rad/s$ (la expresión la podemos obtener igualando F=-kx=ma y a=-ω²x
Para describir el movimiento tomamos x=0 en la posición de equilibrio, y tomamos x=0,06 m en el instante inicial (valor positivo, el eje x está dirigido hacia abajo), con lo que la expresión general $x(t)=A\cdot\cos(\omega t+\phi_0)$ en este caso es $x(t)=0{,}06\cdot\cos(14t)[x\,en\,m,\,t\,en\,s]$
(Si se toma eje x dirigido hacia arriba, x=-0,06 m en instante inicial, y tendríamos fase inicial. También tendríamos fase inicial si hubiéramos elegido seno en lugar de coseno)
b) Cuando pasa por el punto de equilibrio ascendiendo la velocidad es máxima y según el eje x elegido la velocidad será negativa, v=-Aω=-0,06·14 =-0,84 m/s
En el punto de equilibrio la aceleración es nula, ya que al ser un movimiento armónico a=-ω²x y en el equilibrio x=0.

2013-Modelo
A. Pregunta 2.-
a) F=-Kx=ma; a=-ω²x; $K=\omega^2 m\Rightarrow m=\frac{K}{\omega^2}=\frac{2\cdot 10^4}{(2\cdot\pi\cdot 50)^2}=0{,}203\,kg$

$T=\frac{1}{f}=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{K}{m}}$ El periodo no depende de lo grande que sea la elongación inicial, pero no se pregunta por elongación sino por la energía inicial con la que se estire el muelle. La energía inicial con la que se estira es energía potencial elástica $E_p=\frac{1}{2}K A^2$, por lo que se podría plantear $T=2\pi\sqrt{\frac{2E_p}{mA^2}}$. A medida que varía E_p, aumenta en la misma proporción A^2, por lo que realmente no hay dependencia.

b) La fuerza elástica es F=-Kx, luego será máxima para x=A=0,05 m. $|F|=2\cdot 10^4\cdot 0{,}05=1000\,N$

2012-Septiembre

A. Pregunta 1.-

a) El periodo está relacionado con la frecuencia y con la constante elástica, ya que ω=2π/T, y ω^2=K/m, luego sustituyendo

$K=\omega^2 m=(2\pi/T)^2\cdot m=(2\pi/0{,}25)^2\cdot 0{,}1=63{,}1$ N/m

Para escribir la función matemática $x(t)=A\cdot\cos(\omega t+\phi_0)$ calculamos

Frecuencia angular ω= 2π/T= 2π/0,25= 8π rad/s

Amplitud A: como la energía potencial elástica inicial es el valor máximo, podemos plantear

$$E_{pmáx}=\frac{1}{2}K A^2\Rightarrow A=\sqrt{2\frac{E_{pmáx}}{K}}=\sqrt{2\cdot\frac{2}{63{,}1}}=0{,}25\,m$$

Respecto a la fase inicial, si tomamos t=0 en el momento que comienza a oscilar, será nula ya que hemos elegido como función trigonométrica el coseno.

La función es $x(t)=0{,}25\cdot\cos(8\pi t)(x\,en\,m,t\,en\,s)$

b) Si derivamos $v(t)=\frac{dx(t)}{dt}=-2\pi\,sen(8\pi t)(v\,en\,m/s,t\,en\,s)$

$$E_c(t)=\frac{1}{2}m v(t)^2\Rightarrow E_c(t=0{,}1\,s)=\frac{1}{2}0{,}1(-2\pi\,sen(8\pi\,0{,}1))^2=0{,}68\,J$$

2012-Modelo

A. Pregunta 2.-

a)

$$T=\frac{9}{30}=\frac{3}{10}=0{,}3\,s\Rightarrow\omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{2\pi}{0{,}3}=\frac{20\pi}{3}rad/s$$

$$x(t)=A\cdot\cos(\omega t+\phi_0)=0{,}2\cos(\frac{20\pi}{3}t+\phi_0)[x\,en\,m,t\,en\,s]$$

$$Como\ queremos\ que\ en\ t=0, x=0{,}1\,m$$

$$0{,}1=0{,}2\cos(\phi_0);\phi_0=\arccos(\frac{0{,}1}{0{,}2})=\frac{\pi}{3}\,ó-\frac{\pi}{3}$$

$$v(t)=-A\omega\cdot sen(\omega t+\phi_0)=\frac{-0{,}2\cdot 20\pi}{3}\cdot sen(\frac{20\pi}{3}t+\phi_0)[v\,en\,m/s,t\,en\,s]$$

$$Como\ para\ t=0, la\ velocidad\ es\ positiva$$

$$v(t=1{,}2\,s)=-4\frac{\pi}{3}\cdot sen(\frac{20\pi}{3}1{,}2+\phi_0)=-4\frac{\pi}{3}\cdot sen(8\pi+\phi_0)=-4\frac{\pi}{3}\cdot sen(\phi_0)\Rightarrow\phi_0=\frac{-\pi}{3}$$

$$v(t=1{,}2\,s)=-4\frac{\pi}{3}\cdot sen(\frac{-\pi}{3})=3{,}63\,m/s$$

b) $E_{c_{máx}}=\frac{1}{2}m v_{máx}^2=\frac{1}{2}m(A\omega)^2=0{,}5\cdot 2\cdot(0{,}2\cdot 20\frac{\pi}{3})^2=17{,}55\,J$

2011-Septiembre

B. Cuestión 1.-

a) En un oscilador armónico la energía mecánica es $E_m=E_{c_{máx}}=E_{p_{máx}}=\frac{1}{2}k A^2=\frac{1}{2}m\omega^2 A^2$

Para duplicar la energía mecánica asumimos que no se ha variado la m: se ha modificado frecuencia

y/o amplitud.
Manteniendo constante la frecuencia, habrá aumentado la amplitud en un factor √2: cualitativamente se puede ver que la masa tiene más energía potencial elástica máxima.
Manteniendo constante la amplitud, habrá aumentado la frecuencia en un factor √2, y habrá disminuido el periodo: cualitativamente se puede ver que la masa tiene más energía cinética máxima, ya que debe recorrer la misma distancia en menos tiempo.
Si varían tanto amplitud como frecuencia, debe cumplirse que su producto aumente en un factor √2; podría incluso disminuir una de ellas si la otra aumentase lo suficiente.
b) Como el módulo de la velocidad máxima es Aω, aumentará en un factor √2
El periodo de oscilación es la inversa de la frecuencia de oscilación: su variación es la inversa de la comentada en el apartado a.

2011-Junio

A. Problema 1.-

a) $F_{máx}=m\cdot a_{máx}$; $a_{máx}= 6/1 = 6\ m/s^2$

$$a_{máx}=\omega^2\cdot x_{máx};\ \omega=\sqrt{\frac{a_{máx}}{x_{máx}}}=\sqrt{\frac{6}{0,03}}=\sqrt{200}=14,14\ rad/s$$

$$\omega=2\frac{\pi}{T};\ T=2\frac{\pi}{\omega}=0,44\ s$$

b) $W=-\Delta E_p=-(E_{p\,Final}-E_{p\,inicial})=-(0-(\frac{1}{2}K\,x_{máx}^2))$

Calculamos la constante elástica del muelle: $F_{máx}=K\cdot x_{máx}$; $K=6/0,03=200\ N/m$

$$W=0,5\cdot 200\cdot(0,03)^2=0,09\ J$$

Positivo porque es realizado por el muelle

c) $|v|=\omega\sqrt{(A^2-x^2)}=14,14\cdot\sqrt{(0,03^2-0,01^2)}\approx 0,4\ m/s$

d) Utilizamos el mismo muelle, con la K conocida. La frecuencia de oscilación sería la misma que en caso a: aumentaría la fuerza inicial, pero en la misma proporción la amplitud. Podríamos plantear directamente $\omega=\sqrt{\frac{K}{m}}$ que daría el mismo resultado. Haciendo el desarrollo:

$F_{máx}=K\cdot x = 200\cdot 0,05=10\ N$

$a_{máx}= 10/1 = 10\ m/s^2$

$$\omega=\sqrt{\frac{a_{máx}}{x_{máx}}}=\sqrt{\frac{10}{0,05}}=\sqrt{200}=14,14\ rad/s;\ f=\frac{\omega}{2\pi}=2,25\ Hz$$

2011-Modelo

A. Cuestión 1.-

$$\omega=2\pi f=2\pi 5=10\pi\ rad/s$$

a) $\omega^2=\frac{K}{m}\Rightarrow K=m\,\omega^2=0,25\cdot(10\pi)^2=25\pi^2=246,74\ N/m$

b) $E=\frac{1}{2}K\,A^2\Rightarrow A=\sqrt{2\frac{E}{K}}=\sqrt{\frac{2\cdot 10}{246,74}}=0,285\ m$

2010-Septiembre-Fase General

A. Cuestión 1.-

Solución 100% idéntica a 2009-Septiembre-Cuestión 2 y 2008-Septiembre-Cuestión 2.

2010-Septiembre-Fase Específica

A.Problema 2.-

a) Planteamos dos maneras de resolverlo, que son realmente idénticas, la segunda algo más simple
En la primera no se introduce explícitamente K, que no se menciona en enunciado

$$F_{máx}=m\cdot a_{máx};\quad a_{máx}=A\omega^2;\quad E=\frac{1}{2}m\omega^2A^2$$

$$A^2=\frac{2E}{m\omega^2}=\frac{2E}{\frac{F\,máx}{a_{máx}}\cdot\omega^2}=\frac{2E\,A\omega^2}{F_{máx}\omega^2}=\frac{2E\,A}{F_{máx}}\Rightarrow A=\frac{2E}{F_{máx}}=\frac{2\cdot 0{,}02}{0{,}05}=0{,}8\,m$$

En la segunda introducimos K, ya que todo MAS hay una constante recuperadora

$$|F|=K\,x\Rightarrow F_{máx}=K\,A;\quad E=\frac{1}{2}K\,A^2$$

$$\textit{Despejamos K en una expresión y sustituimos en la segunda, despejando A}$$

$$A^2=\frac{2E}{K}=\frac{2E\,A}{F_{máx}}\Rightarrow A=\frac{2E}{F_{máx}}=\frac{2\cdot 0{,}02}{0{,}05}=0{,}8\,m$$

b) $m=\frac{F_{máx}}{a_{máx}}=\frac{F_{máx}}{A\omega^2}=\frac{F_{máx}}{A(2\frac{\pi}{T})^2}=\frac{0{,}05}{0{,}8\cdot(2\frac{\pi}{2})^2}=0{,}0063\,kg=6{,}3\,g$

$x(t)=A\cos(\omega t+\phi_0)=0{,}8\cos(\pi t+\phi_0)$

c) $x(t=0)=+A=A\cos(\phi_0)\Rightarrow\phi_0=0$

$x(t)=0{,}8\cos(\pi t)[x\,en\,m,\,t\,en\,s]$

d) $|v(x)|=\omega\sqrt{A^2-x^2}=\pi\sqrt{0{,}8^2-0{,}2^2}=2{,}43\,m/s$

2010-Junio-Coincidentes

A. Cuestión 1.-

a) k=mω

En la gráfica podemos ver que T=0,4 s, luego f=1/T=1/0,4 Hz, y ω=2πf=2π/0,4 =5π rad/s

k=0,5·(5π)²=123,37 N/m

b) En la gráfica podemos ver que A= 5 cm = 0,05 m

Obtenemos la expresión de la elongación en función del tiempo

x(t)=Acos(ωt+φ) = 0,05cos(5πt); φ =0 ya que para t=0, x=+A

A partir de ella obtenemos Ep, Ec, y luego validamos que su suma es al Em máxima

$$E_p=\frac{1}{2}k\,x^2=\frac{1}{2}k\,A^2\cos^2(\omega t+\phi)=0{,}5\cdot 123{,}37\cdot 0{,}05^2\cos^2(5\pi\,0{,}25)=0{,}153\,J$$

$$E_c=\frac{1}{2}k(A^2-x^2)=\frac{1}{2}k\,A^2 sen^2(\omega t+\phi);\,Ec(t=0{,}25\,s)=0{,}5\cdot 123{,}37\cdot 0{,}05^2 sen^2(5\pi\,0{,}25)=0{,}0007\,J$$

$$E_m=E_c+E_p=E_{c\,máx}=E_{p\,máx}=\frac{1}{2}k\,A^2;\,0{,}5\cdot 123{,}37\cdot 0{,}05^2=0{,}0154\,J=0{,}0153\,J+0{,}0007\,J$$

2010-Junio-Fase General

A. Problema 1.-

a) $T=\frac{60}{10}=6\,s;\,\omega=\frac{2\pi}{T}=2\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{3}\,rad/s$

$K=m\omega^2=0{,}75\cdot(\frac{\pi}{3})^2=0{,}82\,N/m$

$$x(t)=A\cos(\omega t+\phi_0)=0{,}2\cos(\frac{\pi}{3}t+\phi_0)$$

b) *Tomamos x positivas en la direción en la que se separa el bloque inicialmente*

$$x(t=0)=+A=A\cos(\phi_0)\Rightarrow\phi_0=0$$

$$x(t)=0{,}2\cos(\frac{\pi}{3}t)[x\,en\,m,\,t\,en\,s]$$

$$x(t=30\,s)=0{,}2\cos(\frac{\pi}{3}30)=0{,}2\cos(10\pi)=0{,}2\,m$$

c) $v(t)=-A\omega\,sen(\omega t+\phi_0)=-0{,}2\frac{\pi}{3}sen(\frac{\pi}{3}t)[v\,en\,m/s\,,t\,en\,s]$

$$v(t=30\,s)=-0{,}2\frac{\pi}{3}sen(\frac{\pi}{3}30)=-0{,}2\frac{\pi}{3}sen(10\pi)=0\,m/s$$

d) $E_{p_{máx}}=E_{c_{máx}}=\frac{1}{2}KA^2=0{,}5\cdot 0{,}82\cdot 0{,}2^2=0{,}0164\,J$

2010-Junio-Fase Específica

B. Cuestión 1.-

a) $f_2=\frac{f_1}{2}\Rightarrow\frac{1}{T_2}=\frac{\frac{1}{T_1}}{2}\Rightarrow T_2=2T_1$

Como f = 1/T, si la frecuencia se reduce a la mitad, el periodo se duplica

b) $v_{2máx}=A\omega_{2máx}=A\frac{1}{2}\omega_{1máx}=\frac{1}{2}v_{1máx}$ Se reduce a la mitad

c) $a_{2máx}=A\omega_{2máx}^2=A\frac{1}{2^2}\omega_{1máx}^2=\frac{1}{4}a_{1máx}$ Se reduce a la cuarta parte

d) $E_{2máx}=\frac{1}{2}mA^2\omega_{2máx}^2=\frac{1}{2}mA^2\frac{1}{2^2}\omega_{1máx}^2=\frac{1}{4}E_{1máx}$ Se reduce a la cuarta parte

2010-Modelo

A. Cuestión 1.-

a) $K=m\omega^2=m(2\frac{\pi}{T})^2=0{,}2\cdot(2\frac{\pi}{0{,}25})^2=12{,}8\pi^2=126{,}33\,N/m$

b) $E=\frac{1}{2}KA^2\Rightarrow A=\sqrt{\frac{2E}{K}}=\sqrt{\frac{2\cdot 8}{126{,}33}}=0{,}36\,m$

2009-Septiembre

Cuestión 2.-

Solución 100% idéntica a 2009-Septiembre-Cuestión 2 y 2008-Septiembre-Cuestión 2.

2009-Junio

A. Problema 1.-

a)
$$A=0{,}1\,m\;ya\;que\;tiene\;velocidad\;0\;en\;los\;puntos\;de\;elongación\;máxima$$
$$K=m\omega^2=m(2\frac{\pi}{T})^2=0{,}1\cdot(2\frac{\pi}{1{,}5})^2=1{,}75\,N/m$$
$$F=-Kx\,,\;y\;en\;t=0\;x\;es\;máxima\;y\;la\;fuerza\;también\;luego$$
$$F=-KA=-1{,}75\cdot 0{,}1=-0{,}175\,N\,(dirigida\;hacia\;x\;negativas\;ya\;que\;es\;recuperadora)$$

b) $E_m=\frac{1}{2}KA^2=0{,}5\cdot 1{,}75\cdot(0{,}1)^2=8{,}75\cdot 10^{-3}\,J$

c) $|v_{máx}|=A\omega=0{,}1\cdot 2\frac{\pi}{1{,}5}=0{,}42\,m/s$

d)
$$x(t)=A\cos(\omega t+\phi_0)=0{,}1\cos(2\frac{\pi}{1{,}5}t+\phi_0)$$
$$x(t=0)=A\Rightarrow\phi_0$$
$$x(t)=0{,}1\cos(\frac{4}{3}\pi t)[x\,en\,m\,,t\,en\,s]$$

2009-Modelo

Problema 1.-

a) Según la figura, $E_{p\,máx}$ = 0,1 J y A = 0,05 m

$$E_{p\,máx}=\frac{1}{2}KA^2\Rightarrow K=\frac{2E_{p\,máx}}{A^2}=\frac{2\cdot 0{,}1}{0{,}05^2}=80\,N/m$$

b) $|a_{máx}|=A\omega^2=A\frac{K}{m}=\frac{0,05\cdot 80}{0,2}=20\,m/s^2$

c) Podemos utilizar la expresión de v en función de x, o utilizar la conservación de enegía para restar a la energía total la potencia y obtener la cinética, llegando en ambos casos a

$$E_c=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}m\omega^2(A^2-x^2)=\frac{1}{2}K(A^2-x^2)=0,5\cdot 80\cdot(0,05^2-0,023^2)=0,079\,J$$

$$v(x)=\pm\omega\sqrt{A^2-x^2}$$

d) $$v=\frac{1}{4}v_{máx}=\frac{1}{4}A\omega\Rightarrow\frac{1}{4}A\omega=\pm\omega\sqrt{A^2-x^2}\Rightarrow\frac{A^2}{4^2}=A^2-x^2;\,x^2=A^2(1-\frac{1}{16})$$

$$x=\pm A\sqrt{\frac{15}{16}}=\pm 0,05\sqrt{\frac{15}{16}}=\pm 0,048=\pm 4,8\,cm$$

2008-Septiembre

Cuestión 2.-

a)

$$T=2\,s\Rightarrow\omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{2\pi}{2}=\pi\,rad/s$$

$$x(t)=A\cos(\omega t+\phi_0)=0,1\cos(\pi t+\phi_0)[x\,en\,m,\,t\,en\,s]$$

$$v(t)=-A\omega\,sen(\omega t+\phi_0)=-0,1\pi\,sen(\pi t+\phi_0)[v\,en\,m/s,\,t\,en\,s]$$

$$Como\ queremos\ que\ en\ t=0, v=0,\ entonces\ \phi_0=0\ ó\ \pi\,rad$$

$$Para\ que\ la\ elongación\ sea\ positiva\ en\ t=0, tomamos\ \phi_0=0$$

$$La\ expresión\ matemática\ que\ representa\ la\ elongación\ en\ función\ del\ tiempo\ queda$$

$$x(t)=0,1\cos(\pi t)[x\,en\,m,\,t\,en\,s]$$

b)

$$v(t)=-A\omega\,sen(\omega t+\phi_0)=-0,1\pi\,sen(\pi t)[v\,en\,m/s,\,t\,en\,s]$$

$$v(t=0,25\,s)=-0,1\pi\,sen(\pi 0,25)=-0,22\,m/s$$

$$a(t)=-\omega^2A\cos(\omega t+\phi_0)=-\pi^2\cdot 0,1\,sen(\pi t)[a\,en\,m/s^2,\,t\,en\,s]$$

$$a(t=0,25\,s)=-\pi^2\cdot 0,1\cos(0,25t)=-0,7\,m/s^2$$

2008-Junio

Cuestión 1.-

a) $$\frac{v_{máx_1}}{v_{máx_2}}=\frac{A_1\omega_1}{A_2\omega_2}=\frac{X\sqrt{\frac{k}{m}}}{2X\sqrt{\frac{k}{m}}}=\frac{1}{2}$$ (ω sólo depende de k y m, no depende de la amplitud)

b) $$\frac{E_{m_1}}{E_{m_2}}=\frac{\frac{1}{2}kA_1^2}{\frac{1}{2}kA_2^2}=\frac{X^2}{(2X)^2}=\frac{1}{4}$$

2007-Junio

Cuestión 2.-

a) $$T=\frac{1}{f}=\frac{1}{3,3}=0,3\,s$$

$$K=m\omega^2=m(2\pi f)^2=2,5(2\cdot\pi\cdot 3,3)^2=1075\,N/m$$

b)

$$v_{máx}=A\omega=A\,2\pi f=0,05\cdot 2\pi\,3,3=1,04\,m/s$$

$$a_{máx}=A\omega^2=A(2\pi f)^2=0,05\cdot(2\pi\,3,3)^2=21,5\,m/s^2$$

2006-Septiembre

Cuestión 2.-

a) Si la distancia que recorre en cada ciclo son 16 cm, la amplitud es la cuarta parte, 4 cm.

$$a_{máx}=A\omega^2\Rightarrow\omega=\sqrt{\frac{a_{máx}}{A}}=\sqrt{\frac{48}{0{,}04}}=34{,}64\,rad/s$$

$$\omega=2\pi f\Rightarrow f=\frac{\omega}{2\pi}=\frac{34{,}64}{2\pi}=5{,}51\,Hz\,;\,T=\frac{1}{f}=\frac{1}{5{,}51}=0{,}18\,s$$

b) $v_{máx}=A\omega=0{,}04\cdot 34{,}64=1{,}39\,m/s$

2006-Junio

B. Problema 2.-

a) $$\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}=\sqrt{\frac{65}{0{,}15}}=20{,}81\,rad/s$$

$$v=\pm\omega\sqrt{A^2-x^2}=\pm 20{,}81\sqrt{0{,}0025-x^2}[v\,en\,m/s\,,x\,en\,m]$$

b) Cuando la velocidad de oscilación es nula, la elongación es máxima

$$E_p(x=A)=\frac{1}{2}k\,A^2=0{,}5\cdot 65\cdot 0{,}05^2=0{,}081\,J$$

c) Cuando la velocidad de oscilación es máxima, la elongación es nula. Podemos calcular la energía cinética, pero como en un oscilador la energía se conserva, el resultado será el mismo que en el apartado b, ya que antes toda la energía era potencial, y ahora toda la energía es cinética.

$$E_c(x=0)=\frac{1}{2}m v_{máx}^2=0{,}5\cdot 0{,}15\cdot(0{,}05\cdot 20{,}81)^2=0{,}081\,J$$

d) Como la energía mecánica se conserva y conocemos la energía mecánica total de apartados a y b, nos basta con calcular la E_p asociada a esa aceleración y luego podemos calcular la E_c restando.

$$a=-\omega^2 x\Rightarrow x=\frac{-a}{\omega^2}$$

$$E_p=\frac{1}{2}k\,x^2=0{,}5\cdot 65\cdot\left(\frac{-13}{(20{,}81)^2}\right)^2=0{,}029\,J$$

$$E_c=E_{m\,total}-E_p=0{,}081-0{,}029=0{,}052\,J$$

2006-Modelo

B. Problema 1.-

a) $|F|=k\,x\Rightarrow k=\frac{F}{x}=\frac{0{,}75}{0{,}025}=30\,N/m$

$$A=0{,}3\,m\,;\,\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}=\sqrt{\frac{30}{1{,}5}}=4{,}47\,rad/s$$

b) $x(t)=A\cos(\omega t+\phi_0)=0{,}3\cos(4{,}47t+\phi_0)$

$$x(t=0\,s)=A=0{,}3\cos(\phi_0)\Rightarrow\phi_0=0$$

$$x(t)=0{,}3\cos(4{,}47t)[x\,en\,m\,,t\,en\,s]$$

c)
$$v_{máx}=A\,\omega=0{,}3\cdot 4{,}47=1{,}34\,m/s$$

$$a_{máx}=A\,\omega^2=0{,}3\cdot(4{,}47)^2=5{,}99\,m/s^2$$

d)
$$E_p=\frac{1}{2}k\,x^2=0{,}5\cdot 30\cdot 0{,}15^2=0{,}34\,J$$

$$E_c=E_{m\,máx}-E_p=\frac{1}{2}k\,A^2-\frac{1}{2}k\,x^2=0{,}5\cdot 30\cdot 0{,}3^2-0{,}34=1{,}01\,J$$

2005-Septiembre

Cuestión 1.-

a) Como F = -k x, representando F frente a x tendremos unas líneas rectas en las que a mayor valor absoluto de k tendrán mayor pendiente, por lo que viendo la gráfica deducimos que $k_1 > k_2$. Por lo tanto es el muelle 2 el que tiene mayor constante elástica.

$$\frac{T_1}{T_2}=\frac{2\frac{\pi}{\omega_1}}{2\frac{\pi}{\omega_2}}=\frac{\omega_2}{\omega_1}=\frac{\sqrt{\frac{k_2}{m_2}}}{\sqrt{\frac{k_1}{m_1}}}=\sqrt{\frac{k_2 m_1}{k_1 m_2}}=\sqrt{\frac{k_2}{k_1}}\sqrt{\frac{m_1}{m_2}}$$

b)
$$Como\, k_1>k_2\Rightarrow\sqrt{\frac{k_2}{k_1}}<1$$
$$Como\, m_1<m_2\Rightarrow\sqrt{\frac{m_1}{m_2}}<1$$
$$Por\, lo\, tanto\, \frac{T_1}{T_2}<1\; y\, T_2>T_1$$

2005-Modelo

A. Problema 1.-

$$a=-\omega^2 x\Rightarrow\omega^2=9\pi^2;\omega=3\pi\, rad/s$$

a)
$$T=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{2\pi}{3\pi}=\frac{2}{3}=0{,}67\, s$$
$$K=m\omega^2=0{,}1\cdot(3\pi)^2=0{,}9\pi^2=8{,}88\, N/m$$

$$x(t)=A\cos(\omega t+\phi_0)=3\cos(3\pi t+\phi_0)$$

Podríamos razonar que para $t=0$, $x=A$ y que así la fuerza recuperadora es máxima con lo que podríamos deducir que $\phi_0=0$, pero utilizando enunciado con aceleración

b)
$$a(t)=\frac{d^2}{dt}x(t)=-A\omega^2\cos(3\pi t+\phi_0)=-\omega^2 x(t)$$
$$Si\, x>0, a(t=0)=-A\omega^2\Rightarrow\phi_0=0$$
$$x(t)=3\cos(3\pi t)[x\, en\, m, t\, en\, s]$$

c)
$$|v|=\omega\sqrt{A^2-x^2}\Rightarrow\left|v(x=\frac{3}{2})\right|=3\pi\sqrt{3^2-(\frac{3}{2})^2}=24{,}5\, m/s$$
$$|a|=\omega^2 x=\frac{K}{m}x=\frac{8{,}88\cdot 3}{0{,}1\cdot 2}=133\, m/s^2$$

d) El punto donde la velocidad es máxima es el punto de equilibrio (x=0), punto en el que la energía potencial será nula y la energía cinética será igual a la energía mecánica máxima

$$E_c(x=0)=E_{m\, máx}=\frac{1}{2}m v_{máx}^2=\frac{1}{2}K A^2=0{,}5\cdot 8{,}88\cdot 3^2=40\, J$$

2004-Junio

Cuestión 1.-

a)
$$Fuerza\, elástica\, |F|=k\, d$$
$$Fuerza\, gravitatoria\, |F|=mg$$
$$Igualando\, ambas\, k\, d=m\, g\Rightarrow\frac{d}{g}=\frac{m}{k}: depende\, de\, la\, masa\, y\, la\, consante\, elástica\, del\, muelle$$

b)
$$k=m\omega^2\Rightarrow\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}$$
$$T=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{2\pi}{\sqrt{\frac{k}{m}}}=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}=2\pi\sqrt{\frac{d}{g}}=2\pi\sqrt{\frac{0{,}05}{9{,}81}}=0{,}45\, s$$

2004-Modelo

B. Problema 1.-

a)
$$x(t)=A\cos(\omega t+\phi_0)=0{,}06\cos(\omega t+\phi_0)$$
$$x(t=0)=0{,}03=0{,}06\cos(\phi_0)\Rightarrow\phi_0=\arccos\left(\frac{0{,}03}{0{,}06}\right)=\frac{-\pi}{3}\ \acute{o}\ \frac{\pi}{3}\,rad$$
$$x(t=1)=0{,}06=0{,}06\cos\left(\omega\pm\frac{\pi}{3}\right)\Rightarrow\cos\left(\omega\pm\frac{\pi}{3}\right)=1$$
$$Tenemos\ dos\ opciones,\ entre\ las\ que\ hay\ que\ elegir\ una:$$
$$A:\omega=\frac{\pi}{3}\,rad/s\ y\ \phi_0=\frac{-\pi}{3}\,rad$$
$$B:\omega=5\frac{\pi}{3}\,rad/s\ y\ \phi_0=\frac{\pi}{3}\,rad$$
$$Utilizamos\ dato\ enunciado: en\ t=0\ el\ sentido\ de\ desplazamiento\ (velocidad)\ es\ positivo$$
$$v(t)=-A\omega\,sen(\omega t+\phi_0)=0{,}06\cos(\omega t+\phi_0)$$
$$v(t=0)=-A\omega\,sen(\phi_0)\Rightarrow\phi_0\ debe\ ser\ negativo\ para\ que\ v\ sea\ positiva$$
$$Fase\ inicial=\phi_0=\frac{-\pi}{3}\,rad$$
$$Frecuencia=\frac{\omega}{2\pi}=\frac{\pi}{2\cdot3\pi}=\frac{1}{6}=0{,}17\,Hz$$

b) $x(t)=0{,}06\cos\left(\frac{\pi}{3}t-\frac{\pi}{3}\right)[x\ en\ m,\ t\ en\ s]$

c) Velocidad máxima en punto de equilibrio, x=0:

$$v_{máx}=A\omega=\frac{0{,}06\cdot\pi}{3}=0{,}02\pi=0{,}063\,m/s$$

Aceleración máxima en puntos de amplitud máxima (x=-A y x=A):

$$a_{máx}=A\omega^2=0{,}06\cdot\left(\frac{\pi}{3}\right)^2=0{,}02\pi=0{,}066\,m/s^2$$

d)
$$F(t)=m\,a(t)=m(-\omega^2x(t))=-m\omega^2A\cos(\omega t+\phi_0)$$
$$F(t=1\,s)=-0{,}005\cdot\left(\frac{\pi}{3}\right)^2\cdot0{,}06\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{3}\right)=3{,}3\cdot10^{-4}\,N$$
$$E_m=\frac{1}{2}kA^2=\frac{1}{2}m\omega^2A^2=0{,}5\cdot0{,}005\cdot\left(\frac{\pi}{3}\right)^2\cdot(0{,}06)^2=9{,}87\cdot10^{-6}\,J$$

2003-Junio

B. Problema 1.-

a) $F=-Kx=-35\cdot0{,}01=-0{,}35\,N$

b) $a=\frac{F}{m}=\frac{-0{,}35}{0{,}05}=-7\,m/s^2$

c) Se pide la energía potencial elástica del sistema en esa posición, no la máxima

$$E_p=\frac{1}{2}Kx^2=0{,}5\cdot35\cdot(0{,}01)^2=1{,}75\cdot10^{-3}\,J$$

d) La velocidad en esa posición puede ser tanto positiva como negativa

$$v=\pm\omega\sqrt{A^2-x^2}=\pm\sqrt{\frac{K}{m}}\sqrt{A^2-x^2}=\pm\sqrt{\frac{35}{0{,}05}}\sqrt{0{,}04^2-0{,}01^2}=\pm1{,}02\,m/s$$

2003-Modelo

Cuestión 2.-

a)
$$x(t)=A\cos(\omega t+\phi_0)$$
$$A=0{,}5\,m;\ \omega=4\,rad/s;\ f=\frac{\omega}{2\pi}=0{,}637\,Hz;\ \phi_0=0{,}1\,rad$$
$$x(t=20\,s)=0{,}5\cos(0{,}4\cdot20+0{,}1)=-0{,}12\,m$$

b) Energía cinética máxima en punto de equilibrio, x=0:

$$E_{c\,máx}=\frac{1}{2}mv_{máx}^2=\frac{1}{2}mA^2\omega^2=0{,}5\cdot0{,}003\cdot0{,}5^2\cdot0{,}4^2=6\cdot10^{-5}\,J$$

Energía cinética mínima en en puntos de amplitud máxima (x=-A y x=A), donde es nula.

$$a_{máx}=A\omega^2=0{,}06\cdot\left(\frac{\pi}{3}\right)^2=0{,}02\pi=0{,}066\,m/s^2$$

2002-Junio

B. Problema 1.-

$$x(t)=A\cos(\omega t+\phi_0)$$

a) $A=0{,}05\,m\,;\,\omega=\sqrt{\frac{K}{m}}=\sqrt{\frac{10}{2}}=\sqrt{5}=2{,}24\,rad/s$

$$x(t=0)=-A=A\cos(\phi_0)\Rightarrow\phi_0=\pi\,rad$$

$$x(t)=0{,}05\cos(\sqrt{5}t+\pi)[x\,en\,m\,,t\,en\,s]$$

b) $|v|=\omega\sqrt{A^2-x^2}\Rightarrow|v(x=0{,}02)|=\sqrt{5}\sqrt{0{,}05^2-0{,}02^2}=0{,}102\,m/s$

$$|a|=\omega^2x\Rightarrow|a(x=0{,}02)|=5\cdot0{,}02=0{,}1\,m/s^2$$

c) $F=-K\,x\,;\,tenemos\,dos\,extremos$

$$x=A\Rightarrow F=-10\cdot0{,}05=-0{,}5\,N$$

$$x=-A\Rightarrow F=-10\cdot(-0{,}05)=0{,}5\,N$$

d) $E_m=\frac{1}{2}K\,A^2=0{,}5\cdot10\cdot0{,}05^2=0{,}0125\,J$

2002-Modelo

B. Problema 1.-

a)

$$x(t)=A\cos(\omega t+\phi_0)=A\cos(8t+\phi_0)$$

$$x(t=0)=0{,}04=A\cos(\phi_0)$$

$$v(t)=-A\omega\,sen(\omega t+\phi_0)=-A\,8\,sen(8t+\phi_0)$$

$$v(t=0)=-0{,}2=-A\,8\,sen(\phi_0)$$

$$Dividimos\,ambas\,expresiones$$

$$\frac{-0{,}2}{0{,}04}=-A\frac{8}{A}\frac{sen(\phi_0)}{\cos(\phi_0)}\Rightarrow0{,}625=\tan(\phi_0)\,;\,\phi_0=\arctan(0{,}625)=0{,}56\,rad$$

$$A=\frac{0{,}04}{\cos(0{,}56)}\approx0{,}05\,m$$

b)

$$K=m\omega^2=0{,}2\cdot8^2=12{,}8\,N/m$$

$$E_m=\frac{1}{2}K\,A^2=0{,}5\cdot12{,}8\cdot0{,}05^2=1{,}6\cdot10^{-2}\,J$$

2001-Septiembre

Cuestión 2.-

a) $\omega=2\pi\,f=2\pi\frac{1}{T}=2\pi\,Hz$

En t=0 calculamos la E_p y E_c, y dejamos E_p en función de m ya que $K=m\omega^2$

$$E_p=\frac{1}{2}K\,x^2=\frac{1}{2}m\omega^2x^2=\frac{1}{2}m(2\pi)^2\,0{,}007^2$$

$$E_c=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}m(0{,}0439)^2$$

Sabemos que la suma de Ep y Ec es constante, es la $E_{pmáx}=E_{cmáx}$

$$E_p+E_c=E_{pmáx}=\frac{1}{2}K\,A^2$$

$$\frac{1}{2}m(2\pi)^2(0{,}007)^2+\frac{1}{2}m(0{,}0439)^2=\frac{1}{2}m(2\pi)^2A^2$$

$$(2\pi)^2(0{,}007)^2+(0{,}0439)^2=(2\pi)^2A^2$$

$$A=\sqrt{\frac{(2\pi)^2(0{,}007)^2+(0{,}0439)^2}{(2\pi)^2}}=0{,}00989\,m=0{,}989\,cm$$

Para calcular la fase inicial utilizamos la función coseno, elección arbitraria

$$x(t)=A\cos(\omega t+\phi_0)=0{,}989\cos(2\pi t+\phi_0)[x\, en\, cm\,, t\, en\, s]$$

$$x(t=0)=0{,}7=0{,}989\cos(\phi_0)\Rightarrow\phi_0=\arccos(\frac{0{,}7}{0{,}989})=0{,}784\, rad$$

b) La aceleración máxima se puede obtener derivando x(t) respecto al tiempo 2 veces, y comprobar que en valor absoluto es $a_{máx}=A\omega^2=0{,}989\cdot(2\pi)^2=39{,}04\ cm/s^2$

La aceleración es un vector; la dirección de movimiento es la de oscilación (eje x) y el sentido viene determinado por la expresión general de un movimiento armónico simple $a=-\omega^2 x$, que indica que la aceleración tiene signo opuesto a la posición y está asociada a una fuerza recuperadora.

2001-Junio

Cuestión 2.-

a) Combinando la ley de Hooke y la segunda ley de Newton, F=-kx=ma, luego $a=\frac{-k}{m}x$

expresión que es asociable a un movimiento armónico simple con $a=-\omega^2 x$, siendo

$\omega^2=\frac{k}{m}\Rightarrow\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}$. El periodo de oscilación T está relacionado con ω, ya que

$\omega=2\pi f=2\pi\frac{1}{T}\Rightarrow T=\frac{2\pi}{\omega}$, y por lo tanto $T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$

b) En un movimiento armónico simple la posición viene definida por una función sinusoidal: elegimos coseno y fase inicial cero. $x(t)=A\cos(\omega t)$

La velocidad la obtenemos derivando respecto al tiempo, $v(t)=-A\omega\, sen(\omega t)$

$$E_c=\frac{1}{2}m v^2=\frac{1}{2}m A^2\omega^2 sen^2(\omega t)$$

La energía potencial elástica viene dada por la expresión $E_p=\frac{1}{2}k x^2=\frac{1}{2}m\omega^2 A^2\cos^2(\omega t)$

Como se nos pide la expresión en función de la elongación $x(t)=A\cos(\omega t)$, utilizando propiedades trigonométricas $1=\cos^2(y)+sen^2(y)$ podemos escribir

$$E_c=\frac{1}{2}m A^2\omega^2(1-x^2)\qquad E_p=\frac{1}{2}m\omega^2 A^2 x^2$$

Si sumamos ambas expresiones

$$E_{total}=E_c+E_p=\frac{1}{2}m A^2\omega^2=\frac{1}{2}K A^2=\frac{1}{2}m v_{máx}^2$$

2000-Septiembre

B. Problema 1.-

a) Para un muelle tenemos $k=\omega^2 m$

En el segundo oscilador, al tener un muelle idéntico al primero, tiene la misma constante elástica, luego podemos plantear

$$k_1=k_2\Rightarrow>\omega_1^2 m_1=\omega_2^2 m_2$$

$$Como\,\omega=2\pi f\,, si\, se\, duplica\,\omega\, se\, duplica\, igualmente\, f\,, y\, podemos\, escribir$$

$$f_1^2 m_1=f_2^2 m_2$$

$$Como\, f_2=2\cdot f_1\Rightarrow f_1^2 m_1=(2 f_1)^2 m_2\Rightarrow m_2=\frac{1}{4}m_1$$

En el segundo oscilador la masa debe ser 4 veces menor que en el primero

b) Calculamos la constante elástica, que es la misma en ambos muelles:

$$k_1=k_2=\omega_1^2 m_1=(\frac{2\pi}{2})^2\cdot 0{,}04=0{,}395\, N/m$$

La energía potencial es igual para el primer y segundo oscilador al compartir k y A.

$$E_{pmáx}=\frac{1}{2}K\,A^2=\frac{1}{2}\cdot 0{,}395\cdot 0{,}1^2=1{,}98\cdot 10^{-3}\,J$$

La energía cinética es distinta al tener cada oscilador una masa distinta
Para el primer oscilador

$$E_{cmáx1}=E_{pmáx}=\frac{1}{2}m_1 v_{máx}^2;\,1{,}98\cdot 10^{-3}=\frac{1}{2}\cdot 0{,}04\cdot v_{máx}^2\Rightarrow v_{máx}=\sqrt{\frac{2\cdot 1{,}98\cdot 10^{-3}}{0{,}04}}=0{,}315\,m/s$$

Para el segundo oscilador

$$E_{cmáx2}=E_{pmáx}=\frac{1}{2}m_2 v_{máx}^2;\,1{,}98\cdot 10^{-3}=\frac{1}{2}\cdot\frac{0{,}04}{4}\cdot v_{máx}^2\Rightarrow v_{máx}=\sqrt{\frac{2\cdot 1{,}98\cdot 10^{-3}}{0{,}01}}=0{,}629\,m/s$$