2015-Modelo

A. Pregunta 1.-

a) Llamamos M=Masa estrella, m=masa del planeta, T=Periodo revolución planeta
Igualando fuerza centrípeta y gravitatoria en la órbita circular del planeta:

$$G\frac{Mm}{R^2}=m\frac{v^2}{R_p}\Rightarrow v^2=\frac{GM}{R}\Rightarrow\frac{(2\pi R)^2}{T^2}=\frac{GM}{R}\Rightarrow R^3=\frac{GMT^2}{4\pi^2}$$ (R es radio órbita del planeta)

Esta relación es la 3ª ley de Kepler para órbitas circulares.

b) La expresión anterior es válida tanto para el planeta como para la Tierra: planteamos ambas

Planeta: $R^3=G\frac{M\,T^2}{4\pi^2}$

Tierra: $R^3_{\acute{o}rbita\,Tierra}=G\frac{M_{Sol}\,T^2_{Tierra}}{4\pi^2}$ (indicamos $R_{\acute{o}rbita\ Tierra}$ para no confundir con R_{Tierra})

Por el enunciado tenemos que $M=3\cdot M_{Sol}$, y $T=T_{Tierra}$. Sustituyendo y dividiendo ambas expresiones

$$\frac{R^3}{R^3_{\acute{o}rbita\,Tierra}}=\frac{\cancel{G}\frac{3\cdot\cancel{M_{Sol}}\cdot\cancel{T^2}}{\cancel{4\pi^2}}}{\cancel{G}\frac{\cancel{M_{Sol}}\,\cancel{T^2}}{\cancel{4\pi^2}}}=3\Rightarrow R=\sqrt[3]{3}\,R_{\acute{o}rbita\,Tierra}$$

B. Pregunta 1.-

a) Se indica solamente radio: asumimos planetas esféricos y de densidad uniforme.

$$g_{superficie}=G\frac{M}{R^2_{planeta}};\ M=\rho\cdot V=\rho\cdot\frac{4}{3}\pi R^3_{planeta}\Rightarrow g_{superficie}=G\frac{\rho\cdot\frac{4}{3}\pi R^3_{planeta}}{R^2_{planeta}}=G\cdot\rho\cdot\frac{4}{3}\pi R_{planeta}$$

$$\frac{g_{superficie\,A}}{g_{superficie\,B}}=\frac{\cancel{G}\cdot\rho_A\cdot\cancel{\frac{4}{3}\pi}R_A}{\cancel{G}\cdot\rho_B\cdot\cancel{\frac{4}{3}\pi}R_B}\Rightarrow\frac{\rho_A}{\rho_B}=\frac{g_{superficie\,A}}{g_{superficie\,B}}\cdot\frac{R_B}{R_A}=3\cdot1=3$$

b) Introducción genérica (o bien plantear directamente la expresión para la velocidad de escape)
El significado físico de la velocidad de escape es la velocidad que debería tener un cuerpo en la superficie de un planeta para escapar del campo gravitatorio, es decir, llegar al infinito con velocidad nula. Utilizando el principio de conservación de la energía y teniendo en cuenta que en el infinito la E_p y E_c son nulas

$$\frac{1}{2}mv^2-\frac{GMm}{R_{superficie}}=0\,;\ v_{escape}=\sqrt{2\frac{GM}{R_{superficie}}}=\sqrt{2\cdot g_{superficie}\cdot R_{superficie}}$$

$$\frac{v_{escape\,A}}{v_{escape\,B}}=\frac{\sqrt{\cancel{2}\cdot g_{superficie\,A}\cdot\cancel{R_A}}}{\sqrt{\cancel{2}\cdot g_{superficie\,B}\cdot\cancel{R_B}}}=\sqrt{3\cdot1}=\sqrt{3}$$

$$v_{escape\,B}=\frac{v_{escape\,A}}{\sqrt{3}}=\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot10^3\,m/s\approx1155\,m/s$$

Validación lógica: si ambos tienen el mismo radio, pero A tiene más aceleración gravitatoria en superficie, la velocidad de escape de B tiene que ser menor que la de A.

2014-Septiembre

A. Pregunta 1.-

a) Igualando fuerza centrípeta y gravitatoria en la órbita circular:

$$G\frac{Mm}{R_o^2}=m\frac{v^2}{R_o}\Rightarrow v^2=\frac{GM}{R_o}\Rightarrow\frac{(2\pi R_o)^2}{T^2}=\frac{GM}{R_o}\Rightarrow R_o^3=\frac{GMT^2}{4\pi^2}$$

No tenemos como datos G y M,pero tenemos como dato la gravedad en su superficie y su radio, por lo podemos plantear

$$g_{superficie}=G\frac{M}{R^2_{planeta}}\Rightarrow GM=g_{superficie}\cdot R^2_{planeta}$$

Sustituyendo

$$R_o=\sqrt[3]{\frac{3{,}71\cdot(3393\cdot 10^3)^2\cdot(24\cdot 3600)^2}{4\pi^2}}=2{,}01\cdot 10^7\,m$$

b) Introducción genérica (o bien plantear directamente la expresión para la velocidad de escape)
El significado físico de la velocidad de escape es la velocidad que debería tener un cuerpo en la superficie de un planeta para escapar del campo gravitatorio, es decir, llegar al infinito con velocidad nula. Utilizando el principio de conservación de la energía y teniendo en cuenta que en el infinito la E_p y E_c son nulas

$$\frac{1}{2}mv^2-\frac{GMm}{R_{superficie}}=0\,;\,v_{escape}=\sqrt{2\frac{GM}{R_{superficie}}}=\sqrt{2\cdot g_{superficie}\cdot R_{superficie}}=\sqrt{2\cdot 3{,}71\cdot 3393\cdot 10^3}=5018\,m/s$$

Comentario: por los datos de gravedad en superficie y radio, el planeta es Marte.

B. Pregunta 1.-

a) Utilizando el dato de planeta esférico, densidad uniforme, y realizando los cambios de unidades necesarios al Sistema Internacional

$$g_{superficie}=G\frac{M}{R_{planeta}^2}\,;\,M=\rho\cdot V=\rho\cdot\frac{4}{3}\pi R_{planeta}^3$$

$$g_{superficie}=G\frac{\rho\cdot\frac{4}{3}\pi R_{planeta}^3}{R_{planeta}^2}=G\cdot\rho\cdot\frac{4}{3}\pi R_{planeta}=6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 1{,}33\cdot 10^3\cdot 71500\cdot 10^3=6{,}34\,m/s^2$$

b) Igualando fuerza centrípeta y gravitatoria en la órbita circular, calculamos el radio de la órbita

$$G\frac{Mm}{R_o^2}=m\frac{v^2}{R_o}\Rightarrow v^2=\frac{GM}{R_o}\Rightarrow\frac{(2\pi R_o)^2}{T^2}=\frac{GM}{R_o}\Rightarrow R_o^3=\frac{GMT^2}{4\pi^2}=\frac{g_{superficie}\cdot R_{planeta}^2\cdot T^2}{4\pi^2}$$

$$R_o=\sqrt[3]{\frac{6{,}34\cdot(71500\cdot 10^3)^2\cdot(73\cdot 3600)^2}{4\pi^2}}=3{,}84\cdot 10^8\,m$$

En una órbita circular

$$v=\frac{2\pi R_o}{T}=\frac{2\cdot\pi\cdot 3{,}84\cdot 10^8}{73\cdot 3600}=9181\,m/s$$

2014-Junio

A. Pregunta 1.-

a) Se podría incluir el deducir la expresión de la velocidad de escape en la superficie de un planeta en función de su masa y su radio, utilizando el principio de conservación de la energía mecánica entre el lanzamiento y una posición infinitamente alejada, pero la usamos directamente:

$v_e=\sqrt{2\frac{GM}{R}}$ La combinamos con los datos del enunciado: $M_A/M_B=3$ y $R_A/R_B=4$

$$\frac{v_{e_A}}{v_{e_B}}=\frac{\sqrt{2\frac{GM_A}{R_A}}}{\sqrt{2\frac{GM_B}{R_B}}}=\sqrt{\frac{M_A}{M_B}\frac{R_B}{R_A}}=\sqrt{3\cdot\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

b) $$\frac{g_{A,superficie}}{g_{B,superficie}}=\frac{G\frac{M_A}{R_A^2}}{G\frac{M_B}{R_B^2}}=\frac{M_A}{M_B}\frac{R_B^2}{R_A^2}=3\cdot\frac{1}{4^2}=\frac{3}{16}$$

B. Pregunta 1.-

a) Se podría incluir el deducir la expresión de la velocidad de lanzamiento para alcanzar una altura h en la superficie de un planeta en función de su masa, su radio y la altura alcanzada, utilizando el principio de conservación de la energía mecánica entre el lanzamiento y la posición de máxima altura, pero la usamos directamente:

$v_L=\sqrt{2GM(\frac{1}{R}-\frac{1}{R+h})}$ La velocidad de escape es una particularización de esta velocidad para el caso de h=∞, con lo que se tiene $v_e=\sqrt{2\frac{GM}{R}}$

Sustituimos los datos datos y calculamos valores numéricos:

$$v_L=\sqrt{2\cdot 6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 5{,}97\cdot 10^{24}(\frac{1}{6{,}37\cdot 10^6}-\frac{1}{6{,}37\cdot 10^6+500\cdot 10^3})}=3{,}02\cdot 10^3\,m/s$$

$$v_e=\sqrt{2\cdot 6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 5{,}97\cdot 10^{24}(\frac{1}{6{,}37\cdot 10^6})}=1{,}12\cdot 10^4\,m/s$$

Como se indica comparar, lo hacemos cualitativamente: la velocidad de escape tiene que ser mucho mayor que la velocidad de lanzamiento para alcanzar esa altura, ya que supone "llevar la carga más lejos, aportarle más energía potencial".

Ni la velocidad de lanzamiento ni la velocidad de escape dependen de la masa del objeto, que son 2 kg según el enunciado. Esa masa influirá en la energía gastada en proporcionar a ese cuerpo esa velocidad, que supone aportarle esa energía cinética.

b) Aunque se podría hacer numéricamente para la velocidad de lanzamiento calculada en a, y sería válido y más corto, lo hacemos analíticamente para expresar esa distancia en función de R y h.

Utilizamos la conservación de la energía mecánica, llamando

A: Situación de lanzamiento: la energía mecánica es la cinética y la potencial gravitatoria asociada al radio de la Tierra. Al mismo tiempo, y por conservación de energía mecánica en la situación del apartado a, será la energía mecánica en el punto de altura máxima

$$E_m(A)=\frac{1}{2}mv_L^2-G\frac{Mm}{R}=\frac{1}{2}m2GM(\frac{1}{R}-\frac{1}{R+h})-G\frac{Mm}{R}=-G\frac{Mm}{R+h}$$

B: Situación donde la velocidad se ha reducido un 10% (pasa a ser el 90% de la inicial) con respecto a la velocidad de lanzamiento: la energía mecánica es la cinética asociada al 90% de velocidad y la potencial gravitatoria asociada a la altura que queremos averiguar, que llamamos x.

$$E_m(B)=\frac{1}{2}m(v_L\cdot 0{,}9)^2-G\frac{Mm}{R+x}=0{,}9^2mGM(\frac{1}{R}-\frac{1}{R+h})-G\frac{Mm}{R+x}=G\,Mm(\frac{0{,}81}{R}-\frac{0{,}81}{R+h}-\frac{1}{R+x})$$

Igualando y operando

$$-G\frac{Mm}{R+h}=G\,Mm(\frac{0{,}81}{R}-\frac{0{,}81}{R+h}-\frac{1}{R+x})$$

$$\frac{-1}{R+h}=\frac{0{,}81(R+h)(R+x)-0{,}81R(R+x)-R(R+h)}{R(R+h)(R+x)}$$

$$-R^2-Rx=0{,}81R^2+0{,}81Rh+0{,}81Rx+0{,}81hx-0{,}81R^2-0{,}81Rx-R^2-Rh$$

$$(-1-0{,}81+0{,}81+1)R^2+(-R-0{,}81R-0{,}81h+0{,}81R)x=(0{,}81-1)Rh$$

$$x=\frac{-0{,}19Rh}{-R-0{,}81h}=\frac{0{,}19h}{1+0{,}81\frac{h}{R}}$$

Físicamente podemos validar cierta consistencia: la expresión cumple que si h=0 entonces x=0.

Si h<<R, llegamos a que x=0,19h, que es la expresión a la que se llega si igualamos utilizando la expresión de energía potencial gravitatoria para h<<R, y en ese caso $v_L^2=2gh$

$$mgx+½m(0{,}9v)^2=mgh\Rightarrow gx+½0{,}81\cdot 2gh=gh\Rightarrow x=0{,}19h$$

Sustituyendo

$$x=\frac{-0{,}19\cdot 6{,}37\cdot 10^6\cdot 500\cdot 10^3}{-6{,}37\cdot 10^6-0{,}81\cdot 500\cdot 10^3}=8{,}93\cdot 10^4\,m=89\,km$$

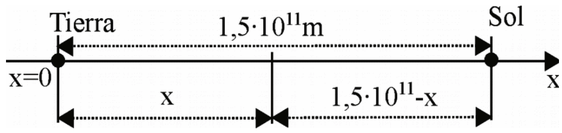
Físicamente podemos validar cierta consistencia: es menor que 500 km, y que está más próximo al punto más de lanzamiento (donde se tiene el 100% de la velocidad inicial) que al punto de máxima altura donde la velocidad es nula.

Como enunciado pide "la distancia a la que se encuentra el cohete, con respecto al centro de la Tierra", el resultado pedido es $6{,}37\cdot 10^6+8{,}93\cdot 10^4\approx 6{,}46\cdot 10^6$ m

A. Pregunta 1.-

a) Hay una manera elegante y simple de resolverlo sin ningún cálculo (idea de Juan G): el potencial gravitatorio solamente es 0 en el infinito, tanto para el potencial creado por una única masa como para el potencial creado por varias masas, ya que se suman siempre potenciales con el mismo signo, luego no puede haber ningún punto con coordenada finita donde se anule el potencial.

Resolviéndolo de manera numérica, tomamos como eje x la línea que une ambos centros, con el origen en la Tierra y x positivas dirigidas hacia el Sol, utilizando unidades en m. Con lo que la coordenada x de un punto será su distancia a la Tierra, y $1{,}5\cdot10^{11}$-x será la distancia de ese punto al Sol. Utilizando el principio de superposición, el potencial gravitatorio será la suma de potenciales gravitatorios asociados al Sol y a la Tierra. En la fórmula debemos utilizar distancias, no coordenadas, y usamos valor absoluto ya que las distancias siempre son positivas.



$V=V_{Tierra}+V_{Sol}=-G\frac{M_{Tierra}}{|x|}-G\frac{M_{Sol}}{|1{,}5\cdot10^{11}-x|}=0$ Sustituyendo M_{Sol}=333183 ·M_{tierra},

$0=\frac{1}{|x|}+\frac{333183}{|1{,}5\cdot10^{11}-x|}\Rightarrow-\frac{1}{|x|}=\frac{333183}{|1{,}5\cdot10^{11}-x|}$ Resolvemos desglosando casos de valores absolutos:

Caso A: x<0 → |x|=-x, $|1{,}5\cdot10^{11}-x|=1{,}5\cdot10^{11}-x$ $\quad 333183\cdot x=1{,}5\cdot10^{11}-x\Rightarrow x=\frac{1{,}5\cdot10^{11}}{333184}=4{,}5\cdot10^{5}\,m$

No es válido ya que la solución es positiva cuando la premisa es que fuera negativa.

Caso B: $0<x<1{,}5\cdot10^{11}$ → |x|=x, $|1{,}5\cdot10^{11}-x|=1{,}5\cdot10^{11}-x$

$$-333183\cdot x=1{,}5\cdot10^{11}-x\Rightarrow x=\frac{1{,}5\cdot10^{11}}{-333182}=-4{,}5\cdot10^{5}\,m$$

No es válido ya que la solución es negativa cuando la premisa es que fuera positiva.

Caso C: $1{,}5\cdot10^{11}<x$→ |x|=x, $|1{,}5\cdot10^{11}-x|=-1{,}5\cdot10^{11}+x$

$$-333183\cdot x=-1{,}5\cdot10^{11}+x\Rightarrow x=\frac{-1{,}5\cdot10^{11}}{-333184}=4{,}5\cdot10^{5}\,m$$

No es válido ya que la solución está fuera del rango establecido como premisa

Nota: Aunque los resultados fueran válidos, su valor es de 450 km, y tampoco serían válidos ya que quedaría en el interior de la Tierra (R_{Tierra} ≈6370 km) y dejaría de ser válido el modelo de masa puntual usado para la Tierra.

b) Tomando el mismo sistema de referencia del apartado a) y utilizando la ley de gravitación universal y el principio de superposición tenemos

$\vec{E}=\vec{E}_{Tierra}+\vec{E}_{Sol}=G\frac{M_{Tierra}}{x^2}(-\vec{i})+G\frac{M_{Sol}}{(1{,}5\cdot10^{11}-x)^2}\vec{i}=0$ Sustituyendo M_{Sol}=333183 ·M_{tierra},

$$0=\frac{-1}{x^2}+\frac{333183}{(1{,}5\cdot10^{11}-x)^2}\Rightarrow333183\cdot x^2=(1{,}5\cdot10^{11}-x)^2\Rightarrow\sqrt{333183}\cdot x=1{,}5\cdot10^{11}-x$$

$$x=\frac{1{,}5\cdot10^{11}}{\sqrt{333183}+1}=2{,}6\cdot10^{8}\,m$$

B. Pregunta 1.-

a) El momento angular es un vector pero se pide solamente el módulo.

Al estar los satélites geoestacionarios en el plano ecuatorial, el vector posición respecto al centro de la Tierra y el vector velocidad son perpendiculares, y podemos plantear

$$|\vec{L}|=R_{órbita}\cdot m_{satélite}\cdot v_{satélite}$$

Calculamos el radio de la órbita geoestacionaria. Al ser una órbita circular, podemos igualar fuerza gravitatoria y centrípeta, siendo al mismo tiempo $v=\frac{2\pi R_{órbita}}{T}$ con T=24·3600=86400 s

$$G\frac{Mm}{R_o^2}=m\frac{v^2}{R_o}\Rightarrow v^2=\frac{GM}{R_o}\Rightarrow\frac{(2\pi R_o)^2}{T^2}=\frac{GM}{R_o}\Rightarrow R_o^3=\frac{GMT^2}{4\pi^2}\Rightarrow R_o=\sqrt[3]{\frac{GMT^2}{4\pi^2}}$$

$$R_o=\sqrt[3]{\frac{6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 5{,}97\cdot 10^{24}\cdot 86400^2}{4\pi^2}}=4{,}22\cdot 10^7 m$$

$$|\vec{L}|=4{,}22\cdot 10^7\cdot 500\cdot\frac{2\pi 4{,}22\cdot 10^7}{86400}=6{,}48\cdot 10^{13} kg\cdot m^2\cdot s^{-1}$$

Para calcular la altura respecto de la superficie terrestre, restamos el radio terrestre:
$h=R_{órbita}-R_{terrestre}=4{,}22\cdot 10^7-6{,}37\cdot 10^6=3{,}58\cdot 10^7$ m

b) $E_m=E_c+E_p=\frac{1}{2}mv^2-G\frac{Mm}{R_o}=-G\frac{Mm}{2R_o}=-6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot\frac{5{,}97\cdot 10^{24}\cdot 500}{2\cdot 4{,}22\cdot 10^7}=-2{,}36\cdot 10^9 J$

2013-Septiembre

A. Pregunta 1.-

a) $g_{planeta}=G\frac{M_{planeta}}{R_{Planeta}^2}$

Como la órbita es circular, igualamos fuerza centrípeta y gravitatoria y expresamos en función de los datos para el primer satélite, teniendo $v_o=2\pi R_o/T$

$$m\frac{v_o^2}{R_o}=\frac{GM_{planeta}m}{R_o^2}\Rightarrow\frac{(2\pi R_o)^2}{T^2}=\frac{GM_{planeta}}{R_o}\Rightarrow GM_{planeta}=\frac{4\pi^2R_o^3}{T^2}$$

Sustituyendo $g_{planeta}=\frac{4\pi^2R_o^3}{T^2R_{Planeta}^2}=\frac{4\pi^2((3+1)\cdot 10^6)^3}{(2\cdot 3600)^2\cdot(3\cdot 10^6)^2}=5{,}4\, m/s^2$

b) Utilizando la tercera ley de Kepler, utilizamos subíndice 1 para datos primer satélite y 2 para segundo. Según enunciado T_1=2 h.

$$\frac{T_1^2}{T_2^2}=\frac{R_1^3}{R_2^3};T_2=T_1\sqrt{\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^3}=2\sqrt{\left(\frac{(3+1+0{,}5)\cdot 10^6}{(3+1)\cdot 10^6}\right)^3}=2{,}39\, h$$

B. Pregunta 1.-

a) $\rho=\frac{M}{V}=\frac{M}{(4/3)\pi R^3}\Rightarrow M=\rho(4/3)\pi R^3$

$$\frac{g_A}{g_B}=\frac{G\frac{M_A}{R_A^2}}{G\frac{M_B}{R_B^2}}=\frac{M_A\cdot R_B^2}{M_B\cdot R_A^2}=\frac{\rho_A(4/3)\pi R_A^3R_B^2}{\rho_B(4/3)\pi R_B^3R_A^2}$$ Como enunciado indica misma densidad

$$\frac{g_A}{g_B}=\frac{R_A}{R_B}=\frac{3500}{3000}=7/6$$

b) Introducción genérica (o bien plantear directamente la expresión para la velocidad de escape)
El significado físico de la velocidad de escape es la velocidad que debería tener un cuerpo en la superficie de un planeta para escapar del campo gravitatorio, es decir, llegar al infinito con velocidad nula. Utilizando el principio de conservación de la energía y teniendo en cuenta que en el infinito la E_p y E_c son nulas

$$\frac{1}{2}mv^2-\frac{GMm}{R_{superficie}}=0;v_{escape}=\sqrt{2\frac{GM}{R_{superficie}}}.$$

$$\frac{v_{escapeA}}{v_{escapeB}}=\sqrt{\frac{\frac{2GM_A}{R_A}}{\frac{2GM_B}{R_B}}}=\sqrt{\frac{M_AR_B}{M_BR_A}}=\sqrt{\frac{\rho_A(4/3)\pi R_A^3R_B}{\rho_B(4/3)\pi R_B^3R_A}}=\frac{R_A}{R_B}=7/6$$

2013-Junio

A. Pregunta 3.-

a) $g_{Mercurio}=G\frac{M_{Mercurio}}{R_{Mercurio}^2}\Rightarrow M_{Mercurio}=\frac{g_{Mercurio}\cdot R_{Mercurio}^2}{G}=\frac{3,7\cdot(2440\cdot 10^3)^2}{6,67\cdot 10^{-11}}=3,3\cdot 10^{23}kg$

$\rho_{Mercurio}=\frac{M_{Mercurio}}{V_{Mercurio}}=\frac{3,3\cdot 10^{23}}{(4/3)\pi(2440\cdot 10^3)^3}=5423\,kg/m^3$

b) Si $g_{órbita}/g_{superfice}=1/4 \rightarrow R_{superfice}^2/R_{órbita}^2=1/4 \rightarrow R_{órbita}=2\cdot R_{superficie}$

La energía necesaria es la diferencia de energía mecánica entre ambas situaciones:

-En superficie la energía es potencial:

$$E_p=-G\frac{Mm}{R_{superficie}}=-6,67\cdot 10^{-11}\cdot\frac{3,3\cdot 10^{23}\cdot 5000}{2440\cdot 10^3}=-4,5\cdot 10^{10}J$$

-En órbita la energía es la suma de cinética y potencial. Si asumimos órbita circular estable, igualando fuerza centrípeta y gravedad podemos deducir la expresión para la energía mecánica

$E_m=-G\frac{Mm}{2R_{órbita}}$, y sustituyendo $R_{órbita}=2\cdot R_{superficie}$, tenemos que

$$E_m=-G\frac{Mm}{2\cdot 2\cdot R_{superficie}}=-6,67\cdot 10^{-11}\cdot\frac{3,3\cdot 10^{23}\cdot 5000}{2\cdot 2\cdot 2440\cdot 10^3}=-1,25\cdot 10^{10}J$$

La energía necesaria es $E_{m\ órbita}-E_{m\ superficie}$ $=-2,25\cdot 10^{10}$ - $(-4,5\cdot 10^{10})= 3,25\cdot 10^{10}$ J

B. Pregunta 5.-

a) Falso. El momento angular, como vector y no solamente en módulo, es constante ya que la fuerza gravitatoria del Sol es una fuerza central. El momento lineal en el afelio es menor que en el perihelio, ya que en esos puntos, al ser vector posición r y momento lineal p perpendiculares, podemos igualar $r_A m v_A = r_P m v_P$ y dado que $r_A>r_P$, tiene que cumplirse que $v_P>v_A$

b) Falso. La energía mecánica se conserva en toda la órbita ya que solamente actúa la fuerza gravitatoria del Sol que es conservativa. La energía potencial sí es mayor en el afelio que en el perihelio, ya que la distancia es mayor, y de acuerdo a la expresión para la Energía potencial E_p=-GMm/R, a valores mayores de R tendremos un número negativo más pequeño, que implicará un valor mayor.

2013-Modelo

A. Pregunta 1.-

a) Al no existir rozamiento solamente actúa la fuerza de la gravedad que es conservativa y podemos plantear la conservación de la energía mecánica en el instante de lanzamiento y en el instante en el que alcanza la altura máxima.

1. Lanzamiento: $E_c=\frac{1}{2}mv^2$; $E_p=-G\frac{Mm}{R}$

2. Altura máxima (la altura es R+R/2= (3/2)·R): $E_c=0$; $E_p=-G\frac{Mm}{(3/2)\cdot R}=\frac{-2}{3}G\frac{Mm}{R}$

Igualando energía mecánica en puntos 1 y 2

$$\frac{1}{2}mv^2-G\frac{Mm}{R}=\frac{-2}{3}G\frac{Mm}{R}\Rightarrow\frac{v^2}{2}=\frac{G}{3}\frac{M}{R}\Rightarrow v=\sqrt{\frac{2GM}{3R}}=\sqrt{\frac{2\cdot 6,67\cdot 10^{-11}\cdot 1,25\cdot 10^{23}}{3\cdot 1,5\cdot 10^6}}=1924,98\,m/s$$

b) La aceleración es un vector. Calculamos su módulo e indicamos dirección y sentido cualitativamente: la dirección será radial y sentido dirigido hacia el centro del planeta.

$$|\vec{g}|=G\frac{M}{((3/2)\cdot R)^2}=6,67\cdot 10^{-11}\frac{1,25\cdot 10^{23}}{(\frac{3}{2}\cdot 1,5\cdot 10^6)^2}=1,65\,m/s^2$$

B. Pregunta 1.-

a) Al ser una órbita circular, se puede deducir y manejar a la expresión E_p=-GMm/R = 2 E_M.

Por lo tanto $M=\frac{2E_M R}{-Gm}=\frac{2\cdot(-3,27\cdot 10^8)\cdot 6\cdot 10^6}{-6,67\cdot 10^{-11}\cdot 800}=7,35\cdot 10^{22}kg$

b) La velocidad lineal en la órbita se puede obtener igualando fuerza centrípeta y gravitatoria, o también deducir y manejar la expresión $E_p= 2E_M=-E_c$.

E_c=1/2mv^2;-2·(-3,27·10^8)=1/2·800·v^2 ; $v=\sqrt{\frac{2\cdot 3{,}27\cdot 10^8\cdot 2}{800}}=1278{,}67\,m/s$

$$\omega=\frac{v}{R}=\frac{1278{,}67}{6\cdot 10^6}=2{,}13\cdot 10^{-4}\,rad/s$$

2012-Septiembre

A. Pregunta 2.-

a) El trabajo a realizar lo podemos relacionar con la diferencia de energía entre ambas órbitas:
-El trabajo realizado es la variación de energía cinética (teorema de las fuerzas vivas)
-El trabajo realizado para ir de órbita A a órbita B es la variación de energía potencial cambiada de signo.
En órbita circular, igualando fuerza centrípeta y gravitatoria, podemos llegar a que la energía mecánica y la cinética son la mitad en valor absoluto que la energía potencial, siendo la energía cinética positiva.
Situación A. R_{oA}=5/2 R_T :

$$E_{pA}=-G\frac{M_T m}{5/2R_T}=-2G\frac{M_T m}{5R_T} \quad E_{cA}=\frac{1}{2}G\frac{M_T m}{5/2R_T}=G\frac{M_T m}{5R_T} \quad E_{mA}=-G\frac{M_T m}{5R_T}$$

Situación B. R_{oB}=5 R_T :

$$E_{pB}=-G\frac{M_T m}{5R_T} \quad E_{cB}=\frac{1}{2}G\frac{M_T m}{5R_T} \quad E_{mB}=\frac{-1}{2}G\frac{M_T m}{5R_T}$$

-El trabajo realizado por el campo asociado asociado a la variación de energía potencial:

$$W_{A\to B}=-(E_{pB}-E_{pA})=-(-G\frac{M_T m}{5R_T}-(-2G\frac{M_T m}{5R_T}))=G\frac{M_T m}{5R_T}(1-2)$$

$$W_{A\to B}=-(E_{pB}-E_{pA})=-6{,}6\cdot 10^{-11}\cdot 5{,}98\cdot 10^{24}\cdot\frac{400}{5\cdot 6{,}37\cdot 10^6}=-5\cdot 10^9 J$$

El resultado es negativo, trabajo no realizado por el campo sino aportado contra el campo (en sentido opuesto campo): estamos llevando el satélite a una “altura mayor”, con más energía potencial, aportamos energía al sistema.
-El trabajo asociado asociado a la variación de energía cinética:

$$W_{A\to B}=E_{cB}-E_{cA}=\frac{1}{2}G\frac{M_T m}{5R_T}-G\frac{M_T m}{5R_T}=G\frac{M_T m}{5R_T}(\frac{1}{2}-1)=\frac{-1}{2}G\frac{M_T m}{5R_T}$$

$$W_{A\to B}=E_{cB}-E_{cA}=-0{,}5\cdot 6{,}6\cdot 10^{-11}\cdot 5{,}98\cdot 10^{24}\cdot\frac{400}{5\cdot 6{,}37\cdot 10^6}=-2{,}5\cdot 10^9 J$$

El resultado es negativo, en la órbita B la energía cinética es menor. Se extrae trabajo/energía del sistema, que “pierde” energía cinética.
El trabajo total a realizar será el trabajo aportado para aumentar la energía potencial (cambiamos el signo porque las expresiones son para el trabajo realizado por el campo, no externamente) menos el trabajo extraído para reducir la energía cinética:

$$W_{A\to B}=5\cdot 10^9-2{,}5\cdot 10^9 J=2{,}5\cdot 10^9 J$$

Nota: podemos llegar a la misma expresión indicando que el trabajo aportado es la variación de energía mecánica. Como en las órbitas E_m=-E_c,

$$W_{A\to B}=E_{mB}-E_{mA}=-(E_{cB}-E_{cA})=2{,}5\cdot 10^9 J$$

b) Órbita circular, igualamos fuerza centrípeta y gravitatoria, y $v_o=2\pi R_o/T$

$$m\frac{v_o^2}{R_o}=\frac{GM_T m}{R_o^2}\Rightarrow\frac{(2\pi R_o)^2}{T^2}=\frac{GM_T}{R_o}\Rightarrow T=\sqrt{\frac{4\pi^2R_o^3}{GM_T}}=T=\sqrt{\frac{4\pi^2(5\cdot 6{,}37\cdot 10^6)^3}{6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 5{,}98\cdot 10^{24}}}=5{,}68\cdot 10^4 s$$

B. Pregunta 2.- *(Similitudes con 2010-Junio-Coincidentes-B.Cuestión 1: 1/6≈0,166, 1/4≈0,273)*
a) Introducción genérica (o bien plantear directamente la expresión para la velocidad de escape)
El significado físico de la velocidad de escape es la velocidad que debería tener un cuerpo en la superficie terrestre para escapar del campo gravitatorio, es decir, llegar al infinito con velocidad nula. Utilizando el principio de conservación de la energía y teniendo en cuenta que en el infinito la E_p y E_c son nulas

$$\frac{1}{2}m v^2-\frac{GMm}{R_T}=0 ; v_{escape}=\sqrt{\frac{2GM}{R_T}} \quad .$$

Se pide la velocidad de escape de la Luna y no disponemos de masa: intentamos relacionar masa de la Luna con la de la Tierra según la relación entre aceleraciones de la gravedad proporcionada:

$$\frac{|\vec{g_L}|}{|g_T|}=0{,}166=\frac{\frac{GM_L}{R_L^2}}{\frac{GM_T}{R_T^2}}=\frac{M_L}{M_T}\cdot\frac{R_T^2}{R_L^2}=\frac{M_L}{M_T}\frac{R_T^2}{(0{,}273 R_T)^2}\Rightarrow\frac{M_L}{M_T}=0{,}166\cdot 0{,}273^2$$

$$v_{e_L}=\sqrt{\frac{2GM_L}{R_L}}=\sqrt{2\cdot 6{,}67\cdot 10^{-11} 0{,}166\cdot 0{,}273^2\cdot 5{,}98\cdot\frac{10^{24}}{0{,}273\cdot 6{,}37\cdot 10^6}}=2382 m/s$$

b) Órbita circular, igualamos fuerza centrípeta y gravitatoria. Pasamos la velocidad a m/s

$$m\frac{v_o^2}{R_o}=\frac{GM_L m}{R_o^2}\Rightarrow R_o=\frac{GM_L}{v_o^2}=\frac{6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 0{,}166\cdot 0{,}273^2\cdot 5{,}98\cdot 10^{24}}{1{,}5\cdot 10^{32}}=2{,}19\cdot 10^6 m$$

2012-Junio

A. Pregunta 1.-

a) Órbita circular, igualamos fuerza centrípeta y gravitatoria. Pasamos el radio de la órbita a metros.
$R_S=R_T+h=6{,}37\cdot 10^6+2\cdot 10^7=2{,}637\cdot 10^7$ m

$$m\frac{v_o^2}{R_S}=\frac{GM_T m}{R_S^2}\Rightarrow v_o=\sqrt{\frac{GM_T}{R_S}}=\sqrt{\frac{6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 5{,}98\cdot 10^{24}}{2{,}637\cdot 10^7}}=3889 m/s$$

b) Si la velocidad se anulase repentinamente, no tendría energía cinética y solamente tendría energía potencial asociada a la altura de la órbita, y caería verticalmente. Sin considerar el rozamiento del aire solamente actúa la fuerza de la gravedad conservativa y podemos considerar que hay conservación de la energía mecánica.

A. Órbita tras el frenado: $E_c=0, E_p=-G\frac{M_T m}{R_S}$

B. Llegada a la superficie. $E_c=\frac{1}{2}m v_{suelo}^2, E_p=-G\frac{M_T m}{R_T}$

Igualando energías mecánicas en A y B

$$-G\frac{M_T m}{R_S}=\frac{1}{2}m v_{suelo}^2-G\frac{M_T m}{R_T}\Rightarrow v_{suelo}=\sqrt{2 G M_T(\frac{1}{R_T}-\frac{1}{R_S})}$$

$$v_{suelo}=\sqrt{2\cdot 6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 5{,}98\cdot 10^{24}(\frac{1}{6{,}37\cdot 10^6}-\frac{1}{2{,}637\cdot 10^7})}=9746 m/s$$

B. Pregunta 1.-

a) Órbita circular, igualamos fuerza centrípeta y gravitatoria. Pasamos el radio de la órbita (R_O) a metros, y obtenemos periodo ya que $v_O=2\pi R_O/T$. Con datos enunciado
$R_O=R_T+h=6{,}37\cdot 10^6+2{,}5\cdot 10^7=3{,}137\cdot 10^7$ m

$$m\frac{(\frac{2\pi R_O}{T})^2}{R_O}=\frac{G M_T m}{R_O^2}\Rightarrow 4\pi^2 R_O^3=G M_T T^2\Rightarrow T=\sqrt{\frac{4\pi^2 R_O^3}{G M_T}}$$

$$T=\sqrt{\frac{4\cdot\pi^2\cdot(3{,}137\cdot 10^7)^3}{6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 5{,}98\cdot 10^{24}}}=55276 s$$

b) $E_p=-G\frac{M_T m}{R_S}=-6{,}67\cdot 10^{-11}\frac{5{,}98\cdot 10^{24}\cdot 3000}{3{,}137\cdot 10^7}=-3{,}81\cdot 10^{10} J$

Para la energía cinética calculamos la velocidad con el periodo

$$E_c=\frac{1}{2}m(\frac{2\pi R_O}{T})^2=0{,}5\cdot 3000\cdot(\frac{2\cdot\pi\cdot 3{,}137\cdot 10^7}{55276})^2=1{,}91\cdot 10^{10} J$$

También podríamos saber que en una órbita circular estable la energía mecánica y la cinética son la mitad en valor absoluto que la energía potencial, siendo la energía cinética positiva.

$$E_c=\frac{|E_p|}{2}=\frac{|-3{,}81\cdot 10^{10}|}{2}=1{,}91\cdot 10^{10}\,J$$

2012-Modelo

A. Pregunta 1.-

a) $g=G\frac{M}{R^2};\,M=\frac{g\cdot R^2}{G}=\frac{7{,}2\cdot(4100\cdot 10^3)^2}{6{,}67\cdot 10^{-11}}=1{,}81\cdot 10^{24}\,kg$

b) Calculamos la diferencia de energía entre ambas situaciones

$$Superficie: E_c=0;\,E_p=-G\frac{Mm}{R}=\frac{-6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 1{,}81\cdot 10^{24}\cdot 3}{4100\cdot 10^3}=-8{,}83\cdot 10^7\,J$$

$$Órbita: E_c=\frac{1}{2}m\,v^2;\,E_p=-G\frac{Mm}{R_o}$$

$$R_o=4100+1000=5100\,km$$

$$E_p=\frac{-6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 1{,}81\cdot 10^{24}\cdot 3}{5100\cdot 10^3}=-7{,}1\cdot 10^7\,J$$

$$Calculamos\ velocidad\ en\ la\ órbita\ estable,\ donde\ F_g=F_c$$

$$G\frac{Mm}{R_o^2}=m\frac{v^2}{R_0};\,v=\sqrt{\frac{GM}{R_o}}=\sqrt{\frac{6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 1{,}81\cdot 10^{24}}{5100\cdot 10^3}}=4865\,m/s$$

$$E_c=0{,}5\cdot 3\cdot 4865^2=3{,}55\cdot 10^7\,J$$

Energía mecánica total en superficie: E_s=-8,83·10^7 J

Energía mecánica total en órbita: E_o=-7,1·10^7 +3,55·10^7 = -3,55·10^7 J

Nota: en una órbita estable la E_m es la mitad en valor absoluto de la E_p , $E_m=\frac{-GMm}{2R}$

La energía a suministrar es la diferencia: E_o-E_s=-3,55·10^7 -(-8,83·10^7)=5,28·10^7 J

B. Pregunta 1.-

$$Órbita: E_c=\frac{1}{2}m\,v^2;\,E_p=-G\frac{Mm}{R_o}$$

$$R_o=6370+2500=8870\,km$$

$$Calculamos\ velocidad\ en\ la\ órbita\ estable,\ donde\ F_g=F_c$$

a) $G\frac{Mm}{R_o^2}=m\frac{v^2}{R_0};\,v=\sqrt{\frac{GM}{R_o}}=\sqrt{\frac{6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 5{,}98\cdot 10^{24}}{8870\cdot 10^3}}=6706\,m/s$

$$E_c=\frac{1}{2}m\,v^2=0{,}5\cdot 1100\cdot 6706^2=2{,}47\cdot 10^{10}\,J$$

$$E_p=\frac{-6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 5{,}98\cdot 10^{24}\cdot 1100}{8870\cdot 10^3}=-4{,}95\cdot 10^{10}\,J$$

$$E_m total=2{,}47\cdot 10^{10}-4{,}95\cdot 10^{10}=-2{,}48\cdot 10^{10}\,J$$

b) El momento angular es un vector $\vec{L}=\vec{r}\times\vec{p}=\vec{r}\times m\cdot\vec{v}$

Al calcular el momento angular respecto al centro de la Tierra para una órbita circular, el vector posición siempre es perpendicular al vector velocidad, por lo que su módulo será

$$|\vec{L}|=|\vec{r}|m|\vec{v}|=8870\cdot 1100\cdot 6706=6{,}54\cdot 10^{10}\,kg\frac{m^2}{s}[también\ J\cdot s]$$

2011-Septiembre-Coincidentes

A. Problema 1.-

a) El momento angular es constante en la órbita al ser fuerzas centrales, por lo que su módulo es igual entre dos puntos cualquiera de la órbita. Como en perigeo y apogeo los vectores r y p son perpendiculares, podemos igualar $r_A m v_A = r_P m v_P$ y despejar para obtener el módulo de la velocidad solicitado.

$$v_A=\frac{r_p v_p}{r_A}=\frac{7{,}02\cdot 10^6\cdot 8{,}22\cdot 10^3}{10{,}30\cdot 10^6}=5{,}60\cdot 10^3\, m/s$$

b) El módulo del momento angular es constante en la órbita, lo podemos calcular en perigeo o apogeo, tomamos uno de ellos.

$$|\vec{L}|=r_p m v_p=7{,}02\cdot 10^6\cdot 200\cdot 8{,}22\cdot 10^3=1{,}15\cdot 10^{13}\, kg\, m^2 s^{-1} [también\, J\cdot s]$$

Su dirección es perpendicular al pano de la órbita, y su sentido vendrá dado por la regla de la mano derecha al realizar el producto vectorial de los vectores r y p.

c) La velocidad areolar es constante según la 2ª ley de Kepler. Hay dos opciones

A.-Teniendo el periodo de la órbita, se puede utilizar la fórmula del área de la elipse y dividir por él (similar a resolución apartado a de 2011-Junio-A.Cuestión 1 para órbita circular). No se da T explícitamente, pero se puede obtener con la 3ª ley de Kepler $\frac{T^2}{R^3}=\frac{4\pi^2}{GM}$ recordando que para órbitas elípticas en hay que usar como R el semieje mayor de la elipse "a", que podemos calcular como la mitad de la suma de radio en perigeo y apogeo.

$$a=\frac{r_{apogeo}+r_{perigeo}}{2}=\frac{10{,}30\cdot 10^6+7{,}02\cdot 10^6}{2}=8{,}66\cdot 10^6\, m$$

$$T=\sqrt{\frac{4\pi^2\cdot(8{,}66\cdot 10^6)^3}{6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 5{,}98\cdot 10^{24}}}=8017{,}6\, s$$

Para calcular el área de la elipse debemos calcular su semieje menor, "b"

Una vez conocido el semieje mayor y el apogeo, podemos calcular la distancia del centro al foco

$$r_{foco\, a\, centro}=a-r_{apogeo}=8{,}66\cdot 10^6-7{,}02\cdot 10^6=1{,}64\cdot 10^6\, m$$

Sabiendo que por geometría de la elipse la suma de distancias entre un punto cualquiera y ambos focos es constante, tomando los puntos donde cortan semieje menor y mayor tenemos $f^2+b^2=a^2$

luego $b=\sqrt{(8{,}66\cdot 10^6)^2-(1{,}64\cdot 10^6)^2}=8{,}5\cdot 10^6 m$

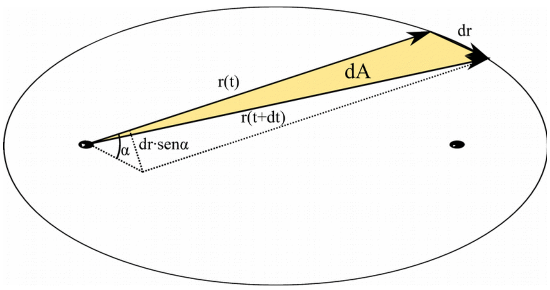
El área es $A=\pi a b=\pi\cdot 8{,}66\cdot 10^6\cdot 8{,}5\cdot 10^6=2{,}31\cdot 10^{14}\, m^2$

La velocidad areolar es $\frac{dA}{dt}=\frac{2{,}31\cdot 10^{14}}{8017{,}6}=2{,}88\cdot 10^{10}\frac{m^2}{s}$

B.-Usar la relación de proporcionalidad entre el módulo del momento angular, que es constante en toda la órbita, y la velocidad areolar, también constante. La expresión o bien se conoce, o se deduce:

Si planteamos la órbita elíptica y un área diferencial barrida

$dA=\frac{1}{2}|\vec{r}\times d\vec{r}|$ (La mitad del área del paralelogramo formado por vectores r y dr)



Operando para obtener la velocidad areolar

$$\frac{dA}{dt}=\frac{1}{2}\left|\vec{r}\times\frac{d\vec{r}}{dt}\right|=\frac{1}{2}|\vec{r}\times\vec{v}|$$

Como $|\vec{L}|=cte=m|\vec{r}\times\vec{v}|$ $\quad \frac{dA}{dt}=\frac{1}{2}\frac{|\vec{L}|}{m}=\frac{|\vec{L}|}{2m}=cte$

$$\frac{dA}{dt}=\frac{2{,}27\cdot 10^{14}}{10400}=2{,}18\cdot 10^{10}\frac{m^2}{s}$$

d) La energía mecánica del satélite es constante en toda la órbita. La calculamos en uno de los puntos: perigeo.

$$E_{c\, perigeo}=\frac{1}{2}m v_{perigeo}^2=0{,}5\cdot 200\cdot(8{,}22\cdot 10^3)^2=6{,}76\cdot 10^9 J$$

$$E_{p\, perigeo}=-G\frac{M_T\cdot m}{r_{perigeo}}=\frac{-6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 5{,}98\cdot 10^{24}\cdot 200}{7{,}02\cdot 10^6}=-1{,}136\cdot 10^{10} J$$

$$E_m=E_{m\, perigeo}=6{,}76\cdot 10^9-1{,}136\cdot 10^{10}=-4{,}6\cdot 10^9 J$$

Nota: la expresión $E_m=-G\frac{Mm}{2r}$ que se conoce / deduce fácilmente para órbitas circulares es válida en órbitas elípticas si se sustituye el radio r por el semieje mayor de la elipse "a", calculado en una de las opciones de apartado c.

$$E_m=-G\frac{Mm}{2a}=\frac{-6{,}67\cdot10^{-11}\cdot5{,}98\cdot10^{24}\cdot200}{2\cdot8{,}66\cdot10^{6}}=-4{,}6\cdot10^{9}J$$

2011-Junio-Coincidentes

B. Cuestión 1 .-

a) $\acute{O}rbita\ circular,\ igualando\ F_g=F_c\ se\ llega\ a\ E_m=\frac{-GMm}{2r}=\frac{1}{2}E_p=-E_c$

$$E_p=\frac{-GMm}{r}=\frac{-6{,}67\cdot10^{-11}\cdot5{,}97\cdot10^{24}\cdot200}{3\cdot10^{7}}=-2{,}65\cdot10^{9}J$$

$$E_m=\frac{-GMm}{2r}=\frac{-6{,}67\cdot10^{-11}\cdot5{,}97\cdot10^{24}\cdot200}{2\cdot3\cdot10^{7}}=-1{,}33\cdot10^{9}J$$

$$E_c=E_m-E_p=-1{,}33\cdot10^{9}-(-2{,}65\cdot10^{9})=1{,}32\cdot10^{9}J$$

b) La energía a aportar es la diferencia de energía mecánica entre ambas situaciones

$$E_m(r=4\cdot10^{7}m)=\frac{-GMm}{2}r=\frac{-6{,}67\cdot10^{-11}\cdot5{,}97\cdot10^{24}\cdot200}{2\cdot4\cdot10^{7}}=-9{,}95\cdot10^{9}J$$

$$\Delta E=E_m(r=4\cdot10^{7}m)-E_m(r=3\cdot10^{7}m)=-1{,}32\cdot10^{9}-(-9{,}95\cdot10^{9})=8{,}63\cdot10^{9}J$$

2011-Septiembre

A. Cuestión 1.-

a) $|\vec{g}|=\frac{|\vec{F}_g|}{m}=\frac{GM}{r^2}$ En la superficie, si el radio del plantea es R_p $|\vec{g}|=\frac{GM}{R_p^2}$

La aceleración de la gravedad es una magnitud vectorial; tomando el origen de coordenadas en el centro del planeta y considerando $\vec{u}_r$ un vector unitario que va desde el centro del planeta (lo asumimos homogéneo y su centro geométrico coincide con el centro de masas) hasta el punto de la superficie del planeta

$\vec{g}=-|\vec{g}|\vec{u}_r=\frac{-GM}{R_p^2}\vec{u}_r$ El signo menos indica que está dirigido hacia el centro del planeta.

b) Si $h=R_T$, $r_h=R_T+h=2R_T$; $\frac{|\vec{g}_{superficie}|}{|\vec{g}_h|}=\frac{\frac{GM}{R_T^2}}{\frac{GM}{(2R_T)^2}}=\frac{4R_T^2}{R_T^2}=4\Rightarrow|\vec{g}_h|=\frac{|\vec{g}_{superficie}|}{4}=\frac{9{,}8}{4}=2{,}45\,m\,s^{-2}$

B. Problema 1.-

a) $En\ \acute{o}rbita\ circular\ estable,\ F_g=F_c$

$$G\frac{Mm}{R_o^2}=m\frac{v^2}{R_0};\ v=\sqrt{\frac{GM}{R_o}}=\sqrt{\frac{6{,}67\cdot10^{-11}\cdot5{,}98\cdot10^{24}}{2{,}26\cdot6{,}37\cdot10^{6}}}=5264\,m/s$$

Nota: la velocidad es independiente de la masa de la sonda.

b) $E_p=\frac{-GMm}{R_o}=\frac{-6{,}66\cdot10^{-11}\cdot5{,}98\cdot10^{24}\cdot1000}{2{,}26\cdot6{,}37\cdot10^{6}}=-1{,}12\cdot10^{24}J$

c) $\acute{O}rbita\ circular,\ igualando\ F_g=F_c\ se\ llega\ a\ E_m=\frac{-GMm}{2r}=\frac{1}{2}E_p=-E_c$

$$E_m=\frac{-GMm}{2r}=0{,}5\cdot(-1{,}12\cdot10^{24})=-5{,}6\cdot10^{23}J$$

d) La energía a comunicar es la diferencia de energía entre ambas situaciones.
En el infinito la E_p y la E_c es cero, por lo que la E_m es cero.
$\Delta E=E_{infinito}-E_{\acute{o}rbita}=0-(-5{,}6\cdot10^{23})=5{,}6\cdot10^{23}$ J

2011-Junio

A. Cuestión 1.-

Nota: suponemos ciertos los datos (el radio real de una órbita geoestacionaria no es $3{,}6\times10^{7}$ m, el dato suministrado es el valor real de la altura de una órbita geoestacionaria)

a) Como la órbita es circular y según la tercera ley de Kepler la velocidad aerolar es constante

$$v_{areolar}=\frac{\pi\cdot r^2}{T}=\frac{\pi\cdot(3{,}6\cdot 10^7)^2}{24\cdot 3600}=4{,}7\cdot 10^{10}\, m^2/s$$

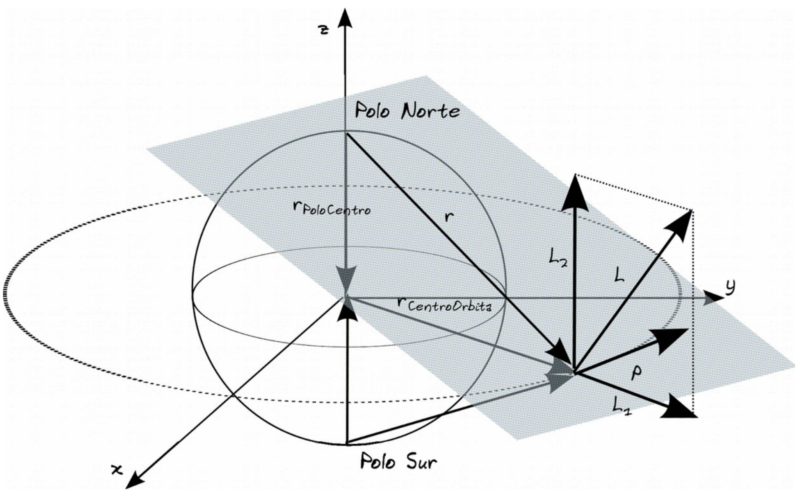
b) El momento angular es un vector $\vec{L}=\vec{r}\times\vec{p}=\vec{r}\times m\cdot\vec{v}$. Si es geoestacionario la órbita está en el plano ecuatorial, pero el momento angular es referido a un punto, por lo que no lo hacemos respecto al centro de la Tierra sino que utilizamos los dos puntos que indica el enunciado.

El momento angular respecto a los polos de la Tierra es respecto a dos puntos que están en el eje de giro, por lo que el vector posición siempre lo podemos descomponer en un vector que vaya desde el polo hasta el centro de la Tierra más un vector que vaya desde el centro de la Tierra hasta el punto de la órbita (y este último vector está en el mismo plano que el vector velocidad)

$$\vec{L}=(\vec{r}_{PoloCentro}+\vec{r}_{CentroOrbita})\times m\cdot\vec{v}=\vec{r}_{PoloCentro}\times m\cdot\vec{v}+\vec{r}_{CentroOrbita}\times m\cdot\vec{v}=\vec{L}_1+\vec{L}_2$$

Para calcular el módulo de la la velocidad, podemos calcular de manera intermedia la velocidad angular, o sabiendo que es constante, utilizar el cociente entre espacio recorrido en la órbita circular

$$|\vec{v}|=\frac{2\cdot\pi\cdot r}{T}=\frac{2\cdot\pi\cdot 3{,}6\cdot 10^7}{24\cdot 3600}=2618\, m/s$$



Si tomamos el plano ecuatorial como plano xy y el eje de giro en el que están los dos polos como eje z, tomando como sentido positivo el dirigido hacia el polo norte geográfico, tendremos:

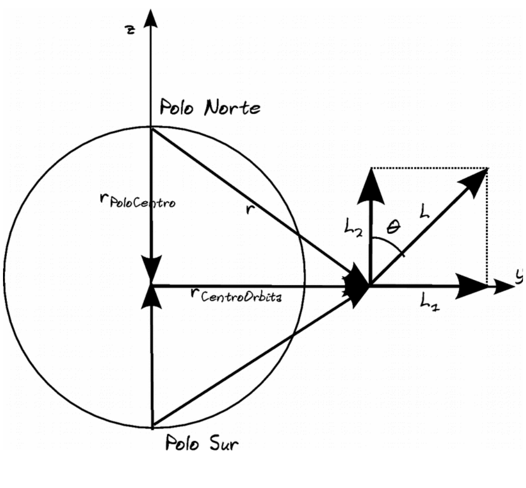
- $\vec{L}_1=\vec{r}_{PoloCentro}\times m\cdot\vec{v}$
  - Dirección: perpendicular al plano formado por eje z y el vector velocidad: será dirección radial, misma dirección de vector posición.
  - Sentido: de acuerdo al sentido de giro del satélite, y según de qué polo se trate, será el mismo sentido que el vector posición (para polo norte) o sentido opuesto (polo sur).
  - Módulo: al ser siempre el vector perpendicular a la velocidad, será (no se proporciona como dato el radio de la Tierra, se toma 6370 km.

$$6{,}37\cdot 10^6\cdot 5\cdot 10^3\cdot 2618=8{,}3\cdot 10^{13}\frac{kg\cdot m^2}{s}[también\, J\cdot s]$$

- $\vec{L}_2=\vec{r}_{CentroOrbita}\times m\cdot\vec{v}$
  - Dirección: perpendicular al plano xy
  - Sentido: de acuerdo al sentido de giro del satélite, que tiene que ser el mismo que el de la tierra, estará dirigido hacia z positivas.
  - Módulo: al ser siempre el vector perpendicular a la velocidad, será

$$3{,}6\cdot 10^7\cdot 5\cdot 10^3\cdot 2618=4{,}7\cdot 10^{14}\frac{kg\cdot m^2}{s}[también\, J\cdot s]$$

Fijándonos en los que nos solicita el enunciado, indicamos de manera global el módulo, dirección y sentido. Realizamos un diagrama en 2 dimensiones más simplificado donde se ve el ángulo que forma con la vertical: no está a escala, ya que se ve que $|\vec{L}_2|\gg|\vec{L}_1|$, por lo que podríamos intentar aproximar $|\vec{L}|\approx|\vec{L}_2|$



- Módulo: Viendo que los dos vectores calculados antes son perpendiculares entre sí:

$$|\vec{L}|=\sqrt{|\vec{L}_1|^2+|\vec{L}_2|^2}$$
$$|\vec{L}|=\sqrt{(8{,}3\cdot 10^{13})^2+(4{,}7\cdot 10^{14})^2} \qquad |\vec{L}|=4{,}8\cdot 10^{14}\frac{kg\cdot m^2}{s}[también\, J\cdot s]$$

- Dirección: en una recta que está en el plano formado por el eje de la Tierra y el satélite, y que forma con el eje z un ángulo θ, siendo $tg\theta=\frac{|\vec{L}_1|}{|\vec{L}_2|}=\frac{4{,}7\cdot 10^{14}}{8{,}3\cdot 10^{13}}\Rightarrow\theta=arctg(5{,}66)=1{,}4\,rad=80º$
- Sentido: dirigido hacia z positivas (Polo Norte) o z negativas (Polo Sur),

B. Problema 1.-

a) Aplicando la tercera Ley de Kepler para los datos de la Luna, y teniendo en cuenta que la masa que aparece en la fórmula es la del objeto central respecto al que se orbita, en este caso la Tierra, y haciendo cambios de unidades

$$\frac{T^2}{R^3}=\frac{4\pi^2}{GM};G=\frac{4\pi^2\cdot R^3}{M\cdot T^2}=\frac{4\cdot\pi^2\cdot(3{,}84\cdot 10^8)^3}{5{,}98\cdot 10^{24}\cdot(27{,}32\cdot 24\cdot 3600)^2}=6{,}7\cdot 10^{-11}\frac{N\cdot m^2}{kg^2}$$

b) De acuerdo a la Ley de Gravitación universal, la fuerza será un vector, de dirección la línea que une los centros de gravedad de ambos cuerpos, de sentido atractivo, y de módulo

$$|\vec{F}|=G\frac{Mm}{r^2}=\frac{6{,}7\cdot 10^{-11}\cdot 5{,}98\cdot 10^{24}\cdot 7{,}35\cdot 10^{22}}{3{,}84\cdot 10^{82}}=2\cdot 10^{20}N$$

c) Para calcular el trabajo podríamos plantear una integral de la fuerza (variable según la posición) en el recorrido, o plantear que $W=-\Delta E_p$ teniendo en cuenta que el trabajo sería el realizado por el campo y que la masa a mover de 5000 kg tendrá Energía potencial respecto de la Tierra y de la Luna. Despreciamos el radio respecto de la distancia global, pero no para considerar el cuerpo sobre la superficie de cada planeta.

En el punto final (la Luna)

$$E_{p\,Final\,respecto\,Tierra}=-G\frac{Mm}{r}=\frac{-6{,}7\cdot 10^{-11}\cdot 5{,}98\cdot 10^{24}\cdot 5000}{3{,}84\cdot 10^8}=-5{,}2\cdot 10^9 J$$
$$E_{p\,Final\,respecto\,Luna}=-G\frac{Mm}{r}=\frac{-6{,}7\cdot 10^{-11}\cdot 7{,}35\cdot 10^{22}\cdot 5000}{1{,}74\cdot 10^6}=-1{,}4\cdot 10^{10} J$$
$$E_{p\,Final}=-1{,}92\cdot 10^{10} J$$

En el punto inicial (la Tierra)

$$E_{p\,Inicial\,respecto\,Luna}=-G\frac{Mm}{r}=\frac{-6{,}7\cdot 10^{-11}\cdot 7{,}35\cdot 10^{22}\cdot 5000}{3{,}84\cdot 10^8}=-6{,}4\cdot 10^7 J$$
$$E_{p\,Inicial\,respecto\,Tierra}=-G\frac{Mm}{r}=\frac{-6{,}7\cdot 10^{-11}\cdot 5{,}98\cdot 10^{24}\cdot 5000}{6{,}37\cdot 10^6}=-3{,}14\cdot 10^{11} J$$
$$E_{p\,Inicial}=-6{,}4\cdot 10^7-3{,}14\cdot 10^{11}=-3{,}14064\cdot 10^{11} J$$

Calculamos la variación para calcular el trabajo

$$W=-\Delta E_p=-(E_{p\,Final}-E_{p\,inicial})=-(-1{,}92\cdot 10^{10}-(-3{,}14064\cdot 10^{11}))=-2{,}95\cdot 10^{11} J$$

El trabajo es negativo porque claramente no es realizado por el campo, sino que se realiza de manera externa a él.

d) Si la distancia a la Tierra es $R_L/4$, la distancia a la Luna será ¾ R_L

$$\frac{|\vec{F}_T|}{|\vec{F}_L|}=\frac{G\frac{M_T m}{r_T^2}}{G\frac{M_L m}{r_L^2}}=\frac{M_T(3/4\,R_L)^2}{M_L(1/4\,R_L)^2}=\frac{M_T}{M_L}\cdot 3^2=\frac{5{,}98\cdot 10^{24}}{7{,}35\cdot 10^{22}}\cdot 9=732$$

2011-Modelo

A. Problema 1.-

a) Aplicando la tercera Ley de Kepler para los datos del planeta, y teniendo en cuenta que la masa que aparece en la fórmula es la del objeto central respecto al que se orbita, en este caso la estrella, y haciendo cambios de unidades (se puede llegar también igualando F_g y F_c)

$$\frac{T^2}{R^3}=\frac{4\pi^2}{GM};M=\frac{4\pi^2\cdot R^3}{G\cdot T^2}=\frac{4\cdot\pi^2\cdot(10^8\cdot 10^3)^3}{6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot(3\cdot 365\cdot 24\cdot 3600)^2}=6{,}61\cdot 10^{28}\,kg$$

b)
$$E_m=E_c+E_p=\frac{1}{2}mv^2-\frac{GMm}{r};[F_c=F_g\Rightarrow v^2=\frac{GM}{r}]=\frac{-GMm}{2r}$$

$$E_m=\frac{-6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 6{,}61\cdot 10^{28}\cdot 10^{24}}{2\cdot 10^8\cdot 10^3}=-2{,}2\cdot 10^{31}\,J$$

c) El momento angular es un vector $\vec{L}=\vec{r}\times\vec{p}=\vec{r}\times m\cdot\vec{v}$

Al calcular el momento angular respecto al centro de la estrella para una órbita circular, el vector posición siempre es perpendicular al vector velocidad, por lo que su módulo será

$$|\vec{L}|=|\vec{r}|m|\vec{v}|=10^8\cdot 10^3\cdot 10^{24}\cdot\sqrt{\frac{6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 6{,}61\cdot 10^{28}}{10^8\cdot 10^3}}=6{,}64\cdot 10^{38}\,\frac{kg\cdot m^2}{s}[también J\cdot s]$$

d)
$$r_2=2\cdot r_1;\omega_2=\frac{v_2}{r_2}=\frac{\sqrt{\frac{GM}{r_2}}}{r_2}=\sqrt{\frac{GM}{(2r_1)^3}}=\sqrt{\frac{6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 6{,}61\cdot 10^{28}}{(2\cdot 10^8\cdot 10^3)^3}}=2{,}35\cdot 10^{-8}\,rad/s$$

B. Cuestión 1.-

$$Órbita\ circular\ F_g=F_c;\frac{GMm}{r^2}=\frac{mv^2}{r};v=\sqrt{\frac{GM}{r}}$$

a)
$$\frac{E_{c_A}}{E_{c_B}}=\frac{\frac{1}{2}m_Av_A^2}{\frac{1}{2}m_Bv_B^2}=\left(\frac{v_A}{v_B}\right)^2=\frac{\frac{GM}{r_A}}{\frac{GM}{r_B}}=\frac{r_B}{r_A}<1, luego\ E_{c_A}<E_{c_B}. Tiene\ mayor\ E_c\ el\ satélite\ B$$

b)
$$\frac{E_{c_A}}{E_{c_B}}=\frac{\frac{1}{2}m_Av_A^2}{\frac{1}{2}m_Bv_B^2}=\frac{m_A}{m_B}\left(\frac{v_A}{v_B}\right)^2=\frac{m_A}{m_B}\frac{\frac{GM}{r_A}}{\frac{GM}{r_B}}=\frac{m_A}{m_B}<1, luego\ E_{c_A}<E_{c_B}. Tiene\ mayor\ E_c\ el\ satélite\ B$$

2010-Septiembre-Fase General

A. Problema 1.-

Solución 100% idéntica a 2008-Septiembre-A-Problema 2, varía ligeramente enunciado apartado d

B. Cuestión 1.-

a) $Órbita\ circular\ F_g=F_c;\frac{GMm}{r^2}=\frac{mv^2}{r};v=\sqrt{\frac{GM}{r}}$

$$E_{c_L}=\frac{1}{2}m_Lv_L^2=\frac{1}{2}m_L\frac{GM_T}{r}$$

$$E_{p_L}=-GM_T\frac{m_L}{r}$$

$$\frac{E_{c_L}}{E_{p_L}}=\frac{-1}{2};E_{p_L}=-2E_{c_L}$$

b)
$$Órbita\ circular\ v_L=\frac{2\pi r}{T};T=\frac{2\pi r}{v_L}=\frac{2\pi r}{\sqrt{\frac{GM_T}{r}}}=\frac{2\pi r^{3/2}}{\sqrt{GM}};T^2=4\frac{\pi^2}{GM}r^3(Tercer\ ley\ de\ Kepler)$$

2010-Septiembre-Fase Específica

A. Cuestión 1.-

a) (Similar a 2009-Septiembre-Cuestión 1-b) Se puede razonar de dos maneras

- El momento angular es constante en la órbita al ser fuerzas centrales. Como en perihelio y afelio los vectores r y p son perpendiculares, podemos igualar $r_Amv_A=r_Pmv_P$ y dado que $r_A>r_P$, tiene que cumplirse que $v_P>v_A$
- La Energía mecánica es constante en toda la órbita al ser fuerzas conservativas, por lo tanto en el punto donde la Ep es menor (perihelio deducible según expresión Ep, la Ep será

mínima en valor absoluto pero máxima (es negativa)), la Energía cinética será mayor y por lo tanto también la velocidad.

b) Como sólo actúan fuerzas conservativas, la energía mecánica se conserva en toda la órbita, por lo que es la misma en toda ella, incluyendo afelio y perihelio $E_m = E_p + E_c = \frac{-GMm}{r} + \frac{1}{2} m v^2$

B. Cuestión 1.-

$$\text{Órbita circular } F_g = F_c ; \frac{GMm}{r^2} = \frac{mv^2}{r} ; v = \sqrt{\frac{GM}{r}}$$

a)
$$E_{c_{asteroide}} = \frac{1}{2} m_{asteroide} v_{asteroide}^2 = \frac{1}{2} m_{asteroide} \frac{GM_{estrella}}{r}$$
$$E_{p_{asteroide}} = -GM_{estrella} \frac{m_{asteroide}}{r}$$
$$\frac{E_{c_{asteroide}}}{E_{p_{asteroide}}} = \frac{-1}{2} ; E_{p_{asteroide}} = -2 E_{c_{asteroide}}$$

b)
$$E_m = E_p + E_c = -2 E_c + E_c = -E_c$$
$$E_c = 10^{10} J ; E_p = -2 \cdot 10^{10} J$$

2010-Junio-Coincidentes

A. Problema 1.-

a) Según la segunda ley de Kepler sabemos que la velocidad areolar es constante, por lo que podemos obtener el periodo del satélite A.

$$v_{areolar} = \frac{área}{tiempo} = 8210 \cdot 10^6 = \frac{\pi r_A^2}{T_A} \Rightarrow T_A = \frac{\pi \cdot (8400 \cdot 10^3)^2}{8210 \cdot 10^6} = 27000 s$$

b) Igualando Fc y Fg en órbita circular obtenemos expresión de la relación entre periodo, radio y masa del planeta, que es la tercera ley de Kepler

$$\text{Órbita circular } F_g = F_c ; v = \frac{2\pi R_o}{T} ; \frac{GMm}{r^2} = \frac{mv^2}{r} ; \frac{(2\pi R_o)^2}{T^2} = \frac{GM}{R_o} ; T^2 = \frac{4\pi^2}{GM} R_o^3$$

Despejando la masa y sustituyendo $M = \frac{4\pi^2 R_o^3}{GT^2} = \frac{4\pi^2 (8400 \cdot 10^3)^3}{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot (27000)^2} = 4{,}8 \cdot 10^{23} kg$

c) $\text{Órbita circular, igualando } F_g = F_c \text{ se llega a } E_m = \frac{-GMm}{2r} = \frac{1}{2} E_p = -E_c$

$$\frac{|\vec{F}_A|}{|F_B|} = 37 = \frac{\frac{GMm_A}{R_{oA}^2}}{\frac{GMm_B}{R_{oB}^2}} = \frac{m_A}{m_B} \frac{R_{oB}^2}{R_{oA}^2} \Rightarrow \frac{m_A}{m_B} = 37 \frac{R_{oA}^2}{R_{oB}^2}$$

$$\frac{E_{mA}}{E_{mB}} = \frac{\frac{-GMm_A}{2R_{oA}}}{\frac{-GMm_B}{2R_{oB}}} = \frac{m_A}{m_B} \frac{R_{oB}}{R_{oA}} = 37 \frac{R_{oA}^2}{R_{oB}^2} \frac{R_{oB}}{R_{oA}} = 37 \frac{8400}{23500} = 13{,}2$$

d) El momento angular es un vector $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m \cdot \vec{v}$. Si tomamos el origen de coordenadas en el centro de la órbita, el plano ecuatorial como plano xy, y el giro del planeta en el sentido de las agujas del reloj visto desde z positivas, tendremos que los vectores posición y momento lineal siempre estarán en el plano xy, y su producto vectorial tendrá dirección del eje z y sentido dirigido hacia z negativas.

El módulo lo podemos calcular teniendo en cuenta que la órbita es circular, por lo que vectores posición y momento lineal son siempre perpendiculares, y la expresión de la velocidad la podemos deducir de la expresión vista en apartado b.

$$|\vec{L}| = |\vec{r}| m |\vec{v}| = 8400 \cdot 10^3 \cdot 1{,}08 \cdot 10^{16} \cdot \sqrt{\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 4{,}8 \cdot 10^{23}}{8400 \cdot 10^3}} = 1{,}77 \cdot 10^{26} \frac{kg \cdot m^2}{s} [también\, J \cdot s]$$

B. Cuestión 1.-

a) El significado físico de la velocidad de escape es la velocidad que debería tener un cuerpo en la superficie terrestre para escapar del campo gravitatorio, es decir, llegar al infinito con velocidad nula. Utilizando el principio de conservación de la energía y teniendo en cuenta que en el infinito la E_p y E_c son nulas

$\frac{1}{2}mv^2-\frac{GMm}{R_T}=0\,;\,v_{escape}=\sqrt{\frac{2GM}{R_T}}$ independiente de la masa del objeto. Lo que sí variará con la masa será la energía cinética del objeto lanzado a esa velocidad

b) $$\frac{|\vec{g}_L|}{|g_T|}=\frac{1}{6}=\frac{\frac{GM_L}{R_L^2}}{\frac{GM_T}{R_T^2}}=\frac{M_L}{M_T}\cdot\frac{R_T^2}{R_L^2}=\frac{M_L}{M_T}\frac{(4R_L)^2}{R_L}\Rightarrow\frac{M_L}{M_T}=\frac{1}{6\cdot 16}=\frac{1}{96}$$

$$\frac{v_{e_L}}{v_{e_T}}=\frac{\sqrt{\frac{2GM_L}{R_L}}}{\sqrt{\frac{2GM_T}{R_T^2}}}=\sqrt{\frac{M_L}{M_T}\cdot\frac{R_T}{R_L}}=\sqrt{\frac{1}{96}\frac{4R_L}{R_L}}=\sqrt{\frac{4}{96}}=0{,}2$$

2010-Junio-Fase General

***A.* Cuestión 1.-** *(Cuestiones de fechas anteriores donde se piden enunciados leyes Kepler: 2009-Modelo-Cuestión 1 (3ª), 2006-Modelo-Cuestión 1 (1ª, 2ª y 3ª), 2000-Junio-Cuestión 1 (1ª y 2ª))*

a) Ley de las áreas. El área barrida por unidad de tiempo por el radio vector que une el Sol y el planeta, la velocidad areolar, es constante. En una órbita elíptica en la que el Sol está en uno de los focos según la primera ley, en el perihelio (punto más cercano al Sol, radiovector de valor mínimo) la velocidad debe ser máxima para que barra la misma cantidad de área por unidad de tiempo que en otros puntos de la órbita. De la misma manera la velocidad es mínima en el afelio (punto más alejado del Sol, radiovector de valor máximo), ya que con poco giro el radiovector barre más área que en otros puntos de la órbita donde el radiovector es menor.

b) Ley de los períodos. Los cuadrados de los períodos son directamente proporcionales a los cubos de los semiejes mayores de las órbitas. $T^2 = C\cdot R^3$.

$$Órbita\, F_g=F_c\,;\frac{GMm}{r^2}=\frac{mv^2}{r}\,;\,v^2=\frac{GM}{r}\,;\,Circular\, v=\frac{2\pi r}{T}$$

$$\frac{GM}{r}=\frac{4\pi^2r^2}{T^2}\,;T^2=\frac{4\pi^2}{GM}r^3=Cr^3\,donde\,C=\frac{4\pi^2}{GM}$$

B. Problema 1.-

a) Aplicando la tercera Ley de Kepler para los datos de Io, y teniendo en cuenta que la masa que aparece en la fórmula es la del objeto central respecto al que se orbita, en este caso Júpiter, y haciendo cambios de unidades (se puede llegar también igualando F_g y F_c)

$$\frac{T_{Io}^2}{R_{Io}^3}=\frac{4\pi^2}{GM_{Júpiter}}\,;\,M_{Júpiter}=\frac{4\pi^2\cdot R_{Io}^3}{G\cdot T_{Io}^2}=\frac{4\cdot\pi^2\cdot(4{,}22\cdot 10^8)^3}{6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot(1{,}77\cdot 24\cdot 3600)^2}=1{,}9\cdot 10^{27}\,kg$$

b) La intensidad de campo es un vector:

- su dirección será radial uniendo centro Júpiter y centro Io
- su sentido será dirigido hacia el centro de Júpiter
- su módulo $|g|=\frac{GM}{r^2}=6{,}67\cdot 10^{-11}\frac{1{,}9\cdot 10^{27}}{(4{,}22\cdot 10^8)^2}=0{,}712\,m/s^2\,ó\,N/kg$

c) $E_c=\frac{1}{2}m_{Io}v_{Io}^2$ Necesitamos calcular v, y tenemos varias opciones:

$$1. Igualando\, F_g\, y\, F_c\,;\,v=\sqrt{\frac{GM_{Júpiter}}{R_{Io}}}=\sqrt{\frac{6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 1{,}9\cdot 10^{27}}{4{,}22\cdot 10^8}}=17329\,m/s$$

$$2.\,Órbita\ circular\ v=\frac{2\pi r}{T}=\frac{2\pi 4{,}22\cdot 10^{8}}{1{,}77\cdot 24\cdot 3600}=17338\,m/s$$
$$E_c=0{,}5\cdot 8{,}9\cdot 10^{22}\cdot 17338^2=1{,}34\cdot 10^{31}J$$

d) Como es una órbita circular, el vector r y el vector v son perpendiculares en todo momento

$$|\vec{L}|=|\vec{r}|\cdot m|\vec{v}|sen\,90º=4{,}22\cdot 10^{8}\cdot 8{,}9\cdot 10^{22}\cdot 17338=6{,}51\cdot 10^{35}\frac{kg\cdot m^2}{s}[también\ J\cdot s]$$

2010-Junio-Fase Específica

A. Cuestión 1.- *(Idéntico a 2005-Junio-Cuestión 2)*

B. Problema 1.-

a) $R= 12\cdot 10^3\cdot 10^3=12\cdot 10^6$ m

$$Órbita\ circular\ F_g=F_c;\frac{GMm}{r^2}=\frac{mv^2}{r};v=\sqrt{\frac{GM}{r}}=\sqrt{\frac{6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 5{,}98\cdot 10^{24}}{12\cdot 10^6}}=5765\,m/s$$
$$|\vec{p}|=mv=1000\cdot 5765=5{,}765\cdot 10^{6}\frac{kg\cdot m}{s}$$

Al ser una órbita circular los vectores r y v son perpendiculares en todo momento

$$|\vec{L}|=|\vec{r}|\cdot m|\vec{v}|sen\,90º=12\cdot 10^{6}\cdot 1000\cdot 5765=6{,}918\cdot 10^{13}\frac{kg\cdot m^2}{s}[también\ J\cdot s]$$

El vector momento lineal sí cambia de dirección continuamente, de manera cíclica: siempre es tangencial a la órbita circular.

El vector momento angular no cambia de dirección, se mantiene constante perpendicular al plano de la órbita: el vector globalmente es constante (módulo, dirección y sentido) al ser fuerzas centrales.

b) $$Órbita\ circular\ v=\frac{2\pi r}{T};T=\frac{2\pi r}{v}=\frac{2\pi 12\cdot 10^6}{5765}=13079\,s=3{,}63\,h$$
$$E_m=\frac{-GMm}{2R}=\frac{-6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 5{,}98\cdot 10^{24}\cdot 1000}{2\cdot 12\cdot 10^6}=-1{,}66\cdot 10^{10}J$$

2010-Modelo

A. Problema 1.-

a) Consideramos sólo fuerzas conservativas por lo que se conserva la energía mecánica

Punto A, lanzamiento: $E_{c_A}=\frac{1}{2}mv^2;E_{p_A}=\frac{-GMm}{R_T}$

Punto B, altura 300 km: $E_{c_B}=0;E_{p_B}=\frac{-GMm}{(R_T+h)}$

Igualando energía mecánica en A y en B

$$\frac{1}{2}mv^2-\frac{GMm}{R_T}=\frac{-GMm}{(R_T+h)};v=\sqrt{2GM\left(\frac{1}{R_T}-\frac{1}{R_T+h}\right)}$$
$$v=\sqrt{2\cdot 6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 5{,}98\cdot 10^{24}\left(\frac{1}{6{,}37\cdot 10^6}-\frac{1}{6{,}37\cdot 10^6+300\cdot 10^3}\right)}=2373{,}3\,m/s$$

b) $$E_{p_B}=\frac{-GMm}{(R_T+h)}=\frac{-6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 5{,}98\cdot 10^{24}\cdot 100}{6{,}37\cdot 10^6+300\cdot 10^3}=-5{,}98\cdot 10^9\,J$$

c) Calculamos la energía que tendría en órbita, y luego restaremos la calculada anteriormente

$$E_{m\,órbita\,circular}=\frac{-GMm}{2(R_T+h)}=-2{,}99\cdot 10^9\,J$$

La energía a suministrar sería $\Delta E=E_{m\ órbita\ circular}-E_{p\ a\ 300\ km}=-2{,}99\cdot 10^9-(-5{,}98\cdot 10^9)=2{,}99\cdot 10^9$ J

d) Igualando F_c y F_g, $v=\sqrt{\frac{GM}{R_T+h}}=\sqrt{\frac{6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 5{,}98\cdot 10^{24}}{6{,}37\cdot 10^6+300\cdot 10^3}}=7733\,m/s$

$$v=\frac{2\pi(R_T+h)}{T};T=\frac{2\pi(R_T+h)}{v}=\frac{2\pi(6{,}37\cdot 10^6+300\cdot 10^3)}{7733}=5419{,}5\,s$$

El período también se puede calcular utilizando la tercera ley de Kepler

B. Cuestión 1.-

a) Utilizando la tercera ley de Kepler

$$\frac{T_s^2}{T_L^2}=\frac{R_s^3}{R_L^3};T_s=T_L\sqrt{\left(\frac{\frac{1}{4}R_L}{R_L}\right)^3}=T_L\sqrt{\frac{1}{4^3}}=\frac{T_L}{2^3};T_s=\frac{27{,}32}{8}=3{,}415\,días=3\,días,9\,horas,57{,}6\,min$$

b) Igualando F_c y F_g en órbita circular $v^2=\frac{GM}{R_{órbita}}$ $\frac{v_s}{v_L}=\frac{\sqrt{\frac{GM}{R_s}}}{\sqrt{\frac{GM}{R_L}}}=\sqrt{\frac{R_L}{R_s}}=\sqrt{\frac{R_L}{\frac{1}{4}R_L}}=2;v_s=2\cdot v_L$

También se puede hacer usando la relación entre períodos del apartado anterior.

$$\frac{v_s}{v_L}=\frac{\frac{2\pi R_s}{T_s}}{\frac{2\pi R_L}{T_L}}=\frac{R_s}{R_L}\frac{T_L}{T_s}=\frac{1}{4}8=2$$

2009-Septiembre

Cuestión 1.-

a) Falso. La velocidad de escape es la velocidad que debe tener un objeto para escapar del campo gravitatorio llegando al infinito con velocidad nula. Utilizando el principio de conservación de la energía y teniendo en cuenta que en el infinito la E_p y E_c son nulas

$\frac{1}{2}mv^2-\frac{GMm}{R_T}=0;v_{escape}=\sqrt{\frac{2GM}{R_T}}$ independiente de la masa del objeto. Lo que sí variará con la masa será la energía cinética del objeto lanzado a esa velocidad.

b) Verdadero. Se puede razonar de dos maneras

- El momento angular es constante en la órbita al ser fuerzas centrales. Como en perihelio y afelio los vectores r y p son perpendiculares, podemos igualar $r_A m v_A=r_P m v_P$ y dado que $r_A>r_P$, tiene que cumplirse que $v_P>v_A$
- La Energía mecánica es constante en toda la órbita al ser fuerzas conservativas, por lo tanto en el punto donde la E_p es menor (perihelio deducible según expresión Ep, la Ep será mínima en valor absoluto pero máxima (es negativa)), la Energía cinética será mayor y por lo tanto también la velocidad.

2009-Junio

Cuestión 1.-

a) $$Órbita\ circular\ F_c=F_g;\frac{GMm}{r^2}=\frac{mv^2}{r};v^2=\frac{GM}{r}$$

$$E_m=\frac{1}{2}mv^2-\frac{GMm}{r}=(\frac{1}{2}-1)mv^2=\frac{-1}{2}\cdot 500\cdot(6{,}5\cdot 10^3)^2=-1{,}056\cdot 10^{10}\,J$$

b) $$r=\frac{GM}{v^2}=\frac{6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 5{,}98\cdot 10^{24}}{(6{,}5\cdot 10^3)^2}=9{,}44\cdot 10^6\,m$$

$$Como\ se\ pide\ altura\ desde\ superficie,\ restamos\ radio\ de\ la\ Tierra:$$

$$h=9{,}44\cdot 10^6-6{,}37\cdot 10^6=3{,}07\cdot 10^6\,m$$

B. Problema 1.-

a) Aplicando la tercera Ley de Kepler

$$\frac{T_{Venus}^2}{T_{Tierra}^2}=\frac{R_{Venus}^3}{R_{Tierra}^3};T_{Venus}=T_{Tierra}\sqrt{\left(\frac{R_{Venus}}{R_{Tierra}}\right)^3}=365\sqrt{\left(\frac{1{,}08\cdot 10^{11}}{1{,}49\cdot 10^{11}}\right)^3}=225\,días$$

b) $$Órbita\ circular\ v=\frac{2\pi r}{T}=\omega r$$

$$v_{Venus}=\frac{2\pi 1{,}08\cdot 10^{11}}{225\cdot 24\cdot 3600}=3{,}49\cdot 10^4\,m/s;v_{Tierra}=\frac{2\pi 1{,}49\cdot 10^{11}}{365\cdot 24\cdot 3600}=2{,}97\cdot 10^4\,m/s$$

2009-Modelo

Cuestión 1.- *(Cuestiones de fechas anteriores donde se piden enunciados leyes Kepler: 2006-Modelo-Cuestión 1 (1ª, 2ª y 3ª), 2000-Junio-Cuestión 1 (1ª y 2ª))*

a) Ley de los períodos. Los cuadrados de los períodos son directamente proporcionales a los cubos de los semiejes mayores de las órbitas. $T^2 = C \cdot R^3$.

$$\acute{O}rbita\; F_g = F_c ; \frac{GMm}{r^2} = \frac{mv^2}{r} ; v^2 = \frac{GM}{r} ; Circular\; v = \frac{2\pi r}{T}$$

$$\frac{GM}{r} = \frac{4\pi^2 r^2}{T^2} ; T^2 = \frac{4\pi^2}{GM} r^3 = C r^3\; donde\; C = \frac{4\pi^2}{GM}$$

b) No se indica el período de la Tierra explícitamente, por lo que consideramos un año como 365 días

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM} r^3 ; M = \frac{4\pi^2}{G T^2} r^3 = \frac{4\pi^2}{6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot (365\cdot 24\cdot 3600)^2} (1{,}49\cdot 10^8\cdot 10^3)^3 = 1{,}97\cdot 10^{30}\, kg$$

2008-Septiembre

Cuestión 1.-

a) En este caso el vector v tiene el mismo sentido que r, luego su producto vectorial es cero ya que el seno del ángulo que forman es cero $|\vec{L}| = |\vec{r}|\cdot m\cdot |\vec{v}|\cdot sen\, 0º = 0$

b) En esa órbita circular el vector v, que siempre es tangencial a la trayectoria y estará en el plano ecuatorial, siempre formará 90º con el vector r, luego el seno del ángulo que forman será siempre 1.

$$\acute{O}rbita\; circular\; F_c = F_g ; \frac{GMm}{r^2} = \frac{mv^2}{r} ; v = \sqrt{\frac{GM}{r}}$$

$$Radio\; \acute{o}rbita = 6{,}37\cdot 10^6 + 600\cdot 10^3 = 6{,}97\cdot 10^6\, m$$

$$|\vec{L}| = |\vec{r}|\cdot m\cdot |\vec{v}|\cdot sen\, 90º = 6{,}97\cdot 10^6\cdot 1000\cdot \sqrt{\frac{6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 5{,}98\cdot 10^{24}}{6{,}97\cdot 10^6}} = 5{,}27\cdot 10^{13} \frac{kg\cdot m^2}{s} [también\; J\cdot s]$$

Cómo sólo se pide módulo, no hace falta indicar dirección ni sentido de momento angular.

A. Problema 2.-

a) $\acute{O}rbita\; circular\; F_g = F_c ; \frac{GMm}{r^2} = \frac{mv^2}{r} ; r = \frac{GM}{v^2} = \frac{6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 5{,}98\cdot 10^{24}}{(7{,}5\cdot 10^3)^2} = 7{,}09\cdot 10^6\, m = 7090\, km$

b) $E_p = \frac{-GMm}{r} = \frac{-6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 5{,}98\cdot 10^{24}\cdot 100}{7{,}09\cdot 10^6} = -5{,}63\cdot 10^9\, J$

c) $E_m = \frac{-GMm}{2r} = \frac{-6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 5{,}98\cdot 10^{24}\cdot 100}{2\cdot 7{,}09\cdot 10^6} = -2{,}81\cdot 10^9\, J$

d) Calculamos la energía mecánica en la nueva órbita, y luego calculamos la diferencia

$$r' = 2r ; E_m' = \frac{-GMm}{2r'} = \frac{-6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 5{,}98\cdot 10^{24}\cdot 100}{2\cdot 2\cdot 7{,}09\cdot 10^6} = -1{,}41\cdot 10^9\, J$$

$$\Delta E = E_m' - E_m = -1{,}41\cdot 10^9 - (-2{,}81\cdot 10^9) = 1{,}4\cdot 10^9\, J$$

Nota: Dato de radio de la Tierra del enunciado no utilizado.

2008-Junio

Cuestión 2.-

a) Se pide momento angular, que es un vector, luego hay que dar módulo, dirección y sentido

- Dirección: perpendicular al plano de la órbita
- Sentido: el asociado al sentido de giro del satélite que fijará la dirección del vector v, tras aplicar el producto vectorial
- Módulo: como la órbita es circular, el vector r y el vector v siempre forman 90

$$\acute{O}rbita\; circular\; F_c = F_g ; \frac{GMm}{r^2} = \frac{mv^2}{r} ; v = \sqrt{\frac{GM}{r}}$$

$$Radio\; \acute{o}rbita = R_T + h = R_T + 1{,}5\, R_T = 2{,}5\, R_T = 2{,}5\cdot 6{,}37\cdot 10^6 = 1{,}59\cdot 10^7\, m$$

$$|\vec{L}| = |\vec{r}|\cdot m\cdot |\vec{v}|\cdot sen\, 90º = 1{,}59\cdot 10^7\cdot 5000\cdot \sqrt{\frac{6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 5{,}98\cdot 10^{24}}{1{,}59\cdot 10^7}} = 3{,}98\cdot 10^{14} \frac{kg\cdot m^2}{s} [también\; J\cdot s]$$

b) Para que escape del campo gravitatorio, tiene que llegar al infinito, donde tendrá energía potencial y cinética nula sin llega con velocidad cero. Por conservación de la energía, la energía que tiene más la que le comuniquemos será la que tendría en el infinito.

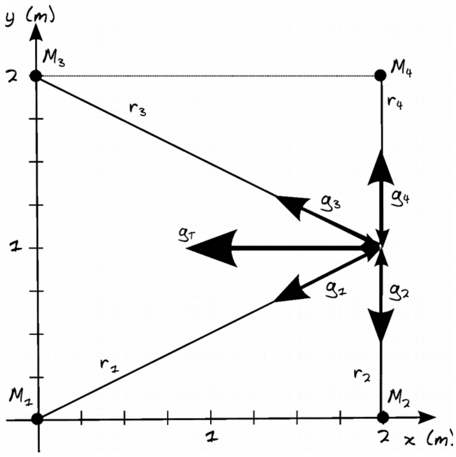
$$\Delta E=E_m(\infty)-E_m(órbita)=\frac{GMm}{2R}=\frac{6,67\cdot10^{-11}\cdot5,98\cdot10^{24}\cdot5000}{2\cdot1,59\cdot10^{7}}=6,27\cdot10^{10}\,J$$

2008-Modelo

Cuestión 1.

a) Representamos en un diagrama para elegir x e y. Para cada lado del cuadrado (en diagrama representamos uno de los cuatro, entre masas M_2 y M4), los efectos de las dos masas más próximas tienen mismo módulo, dirección, pero sentido opuesto, por lo que se cancelan (en figura g_2 y g_4).

La distancia de cada una de las otras 2 masas (M_1 y M_3) al centro del lado es cuadrado es $\sqrt{2^2+1}=\sqrt{5}$ m. El campo tendrá una componente en la dirección del lado que también se cancelará. El campo total será la suma de las dos componentes perpendiculares al lado en el sentido dirigido hacia el centro del cuadrado. Podemos calcular la componente x de g_1 y g_3 de dos maneras:



A. Por trigonometría, utilizando el ángulo que forma r_1 con el eje x, cuya tangente es 1/2

$$|\vec{g}_x|=\frac{GM}{r^2}\cos(\arctan(\frac{1}{2}))$$

$$|\vec{g}_x|=\frac{6,67\cdot10^{-11}\cdot6}{5}\cdot0,894=7,16\cdot10^{-11}\,m/s^2$$

Como se suma el efecto de dos masas, el valor es el doble, y teniendo en cuenta el signo

$$\vec{g}_T=-2\cdot7,16\cdot10^{-11}\,\vec{i}=-1,43\cdot10^{-10}\,\vec{i}\;m/s^2\,ó\,N/kg$$

B. Teniendo presente que $\vec{u}_r=\frac{\vec{r}}{|r|}$ y $\vec{g}=\frac{-GM}{r^2}\vec{u}_r$

$$\vec{g}_T=\vec{g}_1+\vec{g}_3=\frac{-GM_1}{r_1}\vec{u}_{r1}-\frac{GM_3}{r_3}\vec{u}_{r3}=\frac{-6,67\cdot10^{-11}\cdot6}{5}\frac{(2\vec{i}+1\vec{j})}{\sqrt{5}}+\frac{-6,67\cdot10^{-11}\cdot6}{5}\frac{(2\vec{i}-1\vec{j})}{\sqrt{5}}$$

$$\vec{g}_T=2\cdot(\frac{-6,67\cdot10^{-11}\cdot6}{5\sqrt{5}})2\,\vec{i}=-1,43\cdot10^{-10}\,\vec{i}\;m/s^2\,ó\,N/kg$$

Por simetría, ya que las cuatro masas son iguales, podemos indicar:

Punto entre M_1 y M_2 $\vec{g}_T=1,43\cdot10^{-10}\,\vec{j}\,m/s^2\,ó\,N/kg$

Punto entre M_1 y M_3 $\vec{g}_T=1,43\cdot10^{-10}\,\vec{i}\,m/s^2\,ó\,N/kg$

Punto entre M_3 y M_4 $\vec{g}_T=-1,43\cdot10^{-10}\,\vec{j}\,m/s^2\,ó\,N/kg$

b) En el centro de cuadrado por simetría el campo es claramente cero, pero es no implica que el potencial sea también cero. Por el principio de superposición, dado que todas las masas están a la misma distancia $\sqrt{2}$ m del centro

$$V_{total}=4V=4(\frac{-GM}{r})=\frac{-4\cdot6,67\cdot10^{-11}\cdot6}{\sqrt{2}}=-1,13\cdot10^{-9}\,J/kg$$

B. Problema 1.

a) La fuerza es un vector, luego debemos indicar módulo, dirección y sentido

- Dirección radial, en la línea que une centro de la Tierra y centro de satélite.
- Sentido: hacia la Tierra, fuerza atractiva
- Módulo: $|\vec{F}|=\frac{GMm}{r^2}$ Necesitamos conocer r, radio de la órbita

  Utilizando la relación entre velocidades de escape (se pueden deducir, para la órbita hay que tener presente que tiene energía potencial y cinética, en la velocidad de escape en superficie sólo hay energía potencial)

$$\frac{v_{e\,órbita}}{v_{e\,superfice}}=\frac{\sqrt{\frac{GM}{R_o}}}{\sqrt{\frac{2GM}{R_T}}}=\sqrt{\frac{R_T}{2R_o}}=\frac{1}{2};4R_T=2R_o;R_o=2R_T$$

$$|\vec{F}|=\frac{GMm}{r^2}=\frac{6{,}67\cdot10^{-11}\cdot5{,}98\cdot10^{24}\cdot200}{(2\cdot6{,}37\cdot10^6)^2}=491{,}5\,N$$

b) $V=\frac{-GM}{r}=\frac{6{,}67\cdot10^{-11}\cdot5{,}98\cdot10^{24}}{(2\cdot6{,}37\cdot10^6)}=3{,}13\cdot10^7\,J/kg$

c) $E_m=\frac{-GMm}{2r}=\frac{6{,}67\cdot10^{-11}\cdot5{,}98\cdot10^{24}}{(2\cdot6{,}37\cdot10^6)}=-6{,}26\cdot10^9\,J$

d) Para que sea geoestacionario, el período del satélite debe ser de 24 horas, además de estar su órbita en el plano ecuatorial. Utilizando la tercera ley de Kepler

$$T^2=\frac{4\pi^2}{GM}r^3;T=\sqrt{\frac{4\pi^2}{6{,}67\cdot10^{-11}\cdot5{,}98\cdot10^{24}}(2\cdot6{,}37\cdot10^6)^3}=14306\,s\neq24\,horas\Rightarrow no\,es\,estacionario$$

2007-Septiembre

Cuestión 1.

a) La aceleración es un vector: calculamos la relación entre módulos

$$\rho=\frac{M}{V};M=\rho\cdot\frac{4}{3}\pi R^3;\rho_P=\rho_T;R_P=\frac{1}{2}R_T$$

$$\frac{|\vec{g}_P|}{|\vec{g}_T|}=\frac{\frac{GM_P}{R_P^2}}{\frac{GM_T}{R_T^2}}=\frac{M_P}{M_T}\cdot\frac{R_T^2}{R_P^2}=\frac{\rho\cdot\frac{4}{3}\pi R_P^3}{\rho\cdot\frac{4}{3}\pi R_T^3}\cdot\frac{R_T^2}{R_P^2}=\frac{R_P}{R_T}=\frac{1}{2}\Rightarrow|\vec{g}_p|=\frac{1}{2}|\vec{g}_T|=\frac{1}{2}\cdot9{,}8=4{,}9\,m/s^2$$

b) $Órbita\,circular\,F_c=F_g;\frac{GMm}{R_o^2}=\frac{mv^2}{R_o};v^2=\frac{GM}{R_o};v=\frac{2\pi R_o}{T}$

Utilizamos la tercera ley de Kepler, pero como no tenemos valor de M pero sí de g, lo dejamos en función de g, que depende de R_P, no de R_o

$$g_p=\frac{GM_P}{R_P^2};GM_P=g_pR_P^2$$

$$\left(\frac{2\pi R_o}{T}\right)^2=g_p\frac{R_P^2}{R_o}\Rightarrow T=\sqrt{\frac{4\pi^2R_o^3}{g_PR_P^2}};R_o=\frac{6371\cdot10^3}{2}+400\cdot10^6=3{,}586\cdot10^6\,m$$

b)

$$T=\sqrt{\frac{4\pi^2\cdot(3{,}586\cdot10^6)^3}{4{,}9\cdot\left(\frac{6371\cdot10^3}{2}\right)^2}}=6051\,s$$

A. Problema 1.-

a) Utilizamos la tercera Ley de Kepler, que podríamos deducir igualando Fc y Fg

$$T^2=\frac{4\pi^2}{GM}R_o^3\Rightarrow R_o=\sqrt[3]{\frac{T^2GM}{4\pi^2}}=\sqrt[3]{\frac{(24\cdot3600)^2\,6{,}67\cdot10^{-11}\,5{,}96\cdot10^{24}}{4\pi^2}}=4{,}22\cdot10^7\,m$$

$$En\,altura,\,descontando\,el\,radio\,terrestre\,h=4{,}22\cdot10^7-6371\cdot10^3=3{,}5829\cdot10^7\approx36000\,km$$

b) La energía a aportar es la diferencia de energía entre ambas situaciones.

$$\Delta E=E_m(órbita)-E_m(superfice)=\frac{-GMm}{2R_o}-\left(\frac{-GMm}{R_T}\right)=GMm\left(\frac{-1}{2R_o}+\frac{1}{R_T}\right)$$

$$\Delta E=6{,}67\cdot10^{-11}\cdot5{,}96\cdot10^{24}\cdot20\cdot\left(\frac{-1}{2\cdot4{,}22\cdot10^7}+\frac{1}{6371\cdot10^3}\right)=1{,}15\cdot10^9\,J$$

2007-Junio

Cuestión 1.-

$$\rho=\frac{M}{V}\,;\,M=\rho\cdot\frac{4}{3}\pi R^3\,;\,R_L=0{,}27\,R_T\,;\,g_L=\frac{1}{6}\,g_T$$

a) $$\frac{g_L}{g_T}=\frac{\frac{GM_L}{R_L^2}}{\frac{GM_T}{R_T^2}}=\frac{M_L}{M_T}\cdot\frac{R_T^2}{R_L^2}=\frac{\rho_L\cdot\frac{4}{3}\pi R_L^3}{\rho_T\cdot\frac{4}{3}\pi R_T^3}\cdot\frac{R_T^2}{R_L^2}=\frac{\rho_L}{\rho_T}\cdot\frac{R_L}{R_T}=\frac{\rho_L}{\rho_T}\cdot 0{,}27=\frac{1}{6}\Rightarrow\frac{\rho_L}{\rho_T}=\frac{1}{6\cdot 0{,}27}=0{,}62$$

b) La expresión para la velocidad de escape desde la superficie de un planeta se obtiene igualando energía en superficie (potencial y cinética) con energía en infinito (cero)

$$\frac{v_{e_L}}{v_{e_T}}=\frac{\sqrt{\frac{2\mathrm{GM}_L}{R_L}}}{\sqrt{\frac{2\mathrm{GM}_T}{R_T}}}=\sqrt{\frac{M_L}{M_T}\cdot\frac{R_T}{R_L}}=\sqrt{\frac{\rho_L\frac{4}{3}\pi R_L^3 R_T}{\rho_T\frac{4}{3}\pi R_T^3 R_L}}=\sqrt{\frac{\rho_L R_L^2}{\rho_T R_T^2}}=\sqrt{0{,}62\cdot(0{,}27)^2}=0{,}213$$

B. Problema 1.-

a) Utilizamos la tercera ley de Kepler con los datos de Fobos (también igualando F_c y F_g)

$$T^2=\frac{4\pi^2}{GM}R^3\,;\,M=\frac{4\pi^2R^3}{G\,T^2}=\frac{4\pi^2\cdot(9380\cdot 10^3)^3}{6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot(7{,}65\cdot 3600)^2}=6{,}44\cdot 10^{23}\,kg$$

b) Utilizando la tercera ley

$$\frac{T_{Deimos}^2}{T_{Fobos}^2}=\frac{R_{Deimos}^3}{R_{Fobos}^3}\,;\,T_{Deimos}=T_{Fobos}\sqrt{\left(\frac{R_{Deimos}}{R_{Fobos}}\right)^3}=7{,}65\sqrt{\left(\frac{23460}{9380}\right)^3}=30{,}26\,horas=1{,}26\,días$$

c) $$E_{m\,Deimos}=\frac{-GM_M\,m_{Deimos}}{2\,R_{Deimos}}=\frac{-6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 6{,}44\cdot 10^{23}\cdot 2{,}4\cdot 10^{15}}{(2\cdot 23460\cdot 10^3)}=-2{,}2\cdot 10^{21}\,J$$

d) En órbita circular el vector v, que siempre es tangencial a la trayectoria y siempre formará 90º con el vector r, luego el seno del ángulo que forman será siempre 1.

$$Órbita\,circular\,F_c=F_g\,;\,\frac{GMm}{r^2}=\frac{mv^2}{r}\,;\,v=\sqrt{\frac{GM}{r}}$$

$$|\vec{L}|=|\vec{r}|\cdot m\cdot|\vec{v}|\cdot sen\,90º=23460\cdot 10^3\cdot 2{,}4\cdot 10^{15}\cdot\sqrt{\frac{6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 6{,}44\cdot 10^{23}}{23460\cdot 10^3}}=7{,}62\cdot 10^{25}\frac{kg\cdot m^2}{s}[también\,J\cdot s]$$

Nota: no se utiliza el dato proporcionado de masa de Fobos.

2007-Modelo

Cuestión 1.-

a)
$$Órbita\,circular\,F_c=F_g\,;\,\frac{GMm}{r^2}=\frac{mv^2}{r}\,;\,v^2=\frac{GM}{r}$$

$$E_p=\frac{-GMm}{r}=-mv^2\Rightarrow v=\sqrt{\frac{-E_m}{m}}=\sqrt{\frac{-2\cdot 10^8}{5}}=6325\,m/s$$

b)
$$E_c=\frac{1}{2}m\,v^2=0{,}5\cdot 5\cdot(9\cdot 10^3)^2=2{,}025\cdot 10^8\,J$$

$$E_m=E_p+E_c=-2\cdot 10^8+2{,}025\cdot 10^8=2{,}5\cdot 10^6\,J$$

Si la energía mecánica es mayor que cero, el objeto se escapa del campo gravitatorio, y por tanto no describe ningún tipo de órbita.

2006-Septiembre

Cuestión 1.-

a) Consideramos sólo fuerzas conservativas por lo que se conserva la energía mecánica

Punto A, lanzamiento: $E_{c_A}=\frac{1}{2}m\,v^2\,;\,E_{p_A}=\frac{-GMm}{R_T}$

Punto B, altura R_T=6370 km: $E_{c_B}=0\,;\,E_{p_B}=\frac{-GMm}{2\mathrm{R}_T}$

Igualando energía mecánica en A y en B

$$\frac{1}{2}mv^2-\frac{GMm}{R_T}=\frac{-GMm}{2R_T};\ v=\sqrt{\frac{2GM}{R_T}(1-\frac{1}{2})}=\sqrt{\frac{GM}{R_T}}$$
$$v=\sqrt{\frac{6{,}67\cdot10^{-11}\cdot5{,}98\cdot10^{24}}{6{,}37\cdot10^{6}}}=7913\,m/s$$

b) Para escapar al campo gravitatorio terrestre tiene que aportarse como mínimo energía para que llegue al infinito con energía potencial y cinética nula, lo que igualando supone para la Tierra

$$\frac{1}{2}mv_e^2-\frac{GMm}{R_T}=0;\ v_e=\sqrt{\frac{2GM}{R_T}}=\sqrt{\frac{2\cdot6{,}67\cdot10^{-11}\cdot5{,}98\cdot10^{24}}{6{,}37\cdot10^{6}}}=11191\,m/s$$

Por lo tanto si se lanza con una velocidad doble que la del apartado anterior, v = 2·7913=15826 m/s sí escapará del campo gravitatorio terrestre, llegando al infinito con cierta energía cinética.

2006-Junio

A. Problema 1.-

$$|\vec{p}|=m|\vec{v}|;\ necesitamos\ calcular\ m$$

a) $$Órbita\ circular\ F_c=F_g;\ \frac{GMm}{r^2}=\frac{mv^2}{r};\ v^2=\frac{GM}{r}$$

$$E_m=E_p+E_c=\frac{-GMm}{r}+\frac{1}{2}mv^2=(-1+\frac{1}{2})mv^2=\frac{-1}{2}mv^2$$
$$m=\frac{-2E_m}{v^2}=\frac{-2\cdot(-4{,}5\cdot10^9)}{7610^2}=155{,}4\,kg$$
$$|\vec{p}|=155{,}4\cdot7610=1{,}175\cdot10^6\,kg\frac{m}{s}$$
$$|\vec{L}|=|\vec{r}||\vec{p}|;\ necesitamos\ calcular\ r$$
$$Órbita\ circular\ F_c=F_g;\ \frac{GMm}{r^2}=\frac{mv^2}{r};\ r=\frac{GM}{v^2}$$
$$|\vec{L}|=\frac{GM}{v^2}\cdot|\vec{p}|=\frac{6{,}67\cdot10^{-11}\cdot5{,}98\cdot10^{24}}{7610^2}\cdot1{,}175\cdot10^6=8{,}09\cdot10^{12}\,kg\frac{m^2}{s}[también\ J\cdot s]$$
$$Órbita\ circular\ v=\frac{2\pi r}{T};\ T=\frac{2\pi r}{v};\ antes\ ya\ deducido\ r=\frac{GM}{v^2}\ luego\ T=2\pi\frac{GM}{v^3}$$

b) $$T=2\pi\frac{6{,}67\cdot10^{-11}\cdot5{,}98\cdot10^{24}}{7610^3}=5687\,s$$
$$Altura:\ restamos\ al\ radio\ de\ la\ órbita\ el\ radio\ terrestre$$
$$h=\frac{6{,}67\cdot10^{-11}\cdot5{,}98\cdot10^{24}}{7610^2}-6{,}37\cdot10^6=5{,}17\cdot10^5\,m$$

Cuestión 1.-

a) $$g_h=\frac{g_0}{2}\Rightarrow\frac{GM}{(R_T+h)^2}=\frac{GM}{2R_T^2}\Rightarrow R_T+h=\sqrt{2}R_T;\ h=(\sqrt{2}-1)R_T\approx0{,}41\,R_T$$

b) $$V_h=\frac{V_0}{2}\Rightarrow-\frac{GM}{(R_T+h)}=\frac{-GM}{2R_T}\Rightarrow R_T+h=2R_T;\ h=R_T$$

2006-Modelo

Cuestión 1.- *(Cuestiones de fechas anteriores donde se piden enunciados leyes Kepler: 2000-Junio-Cuestión 1 (1ª y 2ª))*

a) 1. Ley de las órbitas. Planetas describen órbitas elípticas y el Sol está en uno de los focos.
2. Ley de las áreas. El área barrida por unidad de tiempo por el radio vector que une Sol-Planeta / la velocidad areolar es constante.
3. Ley de los períodos. Los cuadrados de los períodos son directamente proporcionales a los cubos de los semiejes mayores de las órbitas.
b) Utilizando la tercera ley de Kepler, y tomando el período orbital de la Tierra como referencia

$$\frac{T_{Urano}^2}{T_{Tiera}^2}=\frac{R_{Urano}^3}{R_{Tierra}^3}\Rightarrow T_{urano}=T_{Tierra}\sqrt{\left(\frac{R_{Urano}}{R_{Tierra}}\right)^3}=T_{Tierra}\sqrt{\left(\frac{2,87\cdot10^{12}}{1,50\cdot10^{11}}\right)^3}=83,7\ años\ terrestres$$

A. Problema 1.-

a) Tomamos como eje x la línea que une los planetas 1 y 2, y tomamos el origen de coordenadas en el centro del planeta 1. Si llamamos x a la coordenada del punto P, dado que los sentidos de las fuerzas son opuestos, podemos plantear

$$F_1=F_2;\ GM_1\frac{m}{x^2}=GM_2\frac{m}{(D-x)^2};\ \frac{M_1}{x^2}=\frac{2M_1}{(D-x)^2};\ x=\frac{D-x}{\sqrt{2}};\ \sqrt{2}x+x=D;\ x=\frac{D}{1+\sqrt{2}}$$

$$x=\frac{4,83\cdot10^{10}}{1+\sqrt{2}}=2\cdot10^{10}\,m$$

b) Como sólo actúan fuerzas conservativas, se conserva la energía mecánica
Tenemos energía potencial de m respecto a ambos planetas, y las sumamos usando superposición
Punto inicial A, superficie planeta 1:

$$E_c=\frac{1}{2}mv^2=0,5\cdot5\cdot10^3\cdot(2\cdot10^4)^2=10^{12}\,J$$

$$E_{p_1}=-GM_1\frac{m}{R_1}=\frac{-6,67\cdot10^{-11}\cdot4\cdot10^{24}\cdot5\cdot10^3}{6\cdot10^6}=-2,22\cdot10^{11}\,J$$

$$E_{p_2}=-GM_2\frac{m}{D-R_1}=\frac{-6,67\cdot10^{-11}\cdot2\cdot4\cdot10^{24}\cdot5\cdot10^3}{4,83\cdot10^{10}-6\cdot10^6}=-2,76\cdot10^7\,J$$

$$E_{m_1}=10^{12}-2,22\cdot10^{11}-2,76\cdot10^7=7,78\cdot10^{11}\,J$$

Punto final B, superficie planeta 2:

$$E'_c=\frac{1}{2}m(v')^2$$

$$E_{p_1}=-GM_1\frac{m}{D-R_2}=\frac{-6,67\cdot10^{-11}\cdot4\cdot10^{24}\cdot5\cdot10^3}{4,83\cdot10^{10}-6\cdot10^6}=-2,76\cdot10^7\,J$$

$$E_{p_2}=-GM_2\frac{m}{R_2}=\frac{-6,67\cdot10^{-11}\cdot2\cdot4\cdot10^{24}\cdot5\cdot10^3}{6\cdot10^6}=-4,45\cdot10^{11}\,J$$

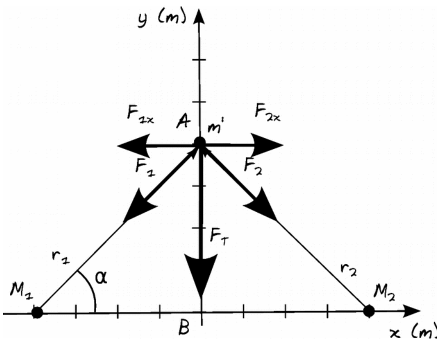
$$E'_m=E'_c-2,76\cdot10^7-4,45\cdot10^{11}=E'_c-4,45\cdot10^{11}$$

$$E_{m_1}=E_{m_2};\ 7,78\cdot10^{11}=E'_c-4,45\cdot10^{11};\ E'_c=1,22\cdot10^{12}\,J$$

Comentario: se ven posibles aproximaciones:
Como D >> R_1 y D >> R_2 podríamos aproximar D-R_1 y D-R_2 a D
Como D >> R_1 y D >> R_2, en cada una de las dos situaciones prevalece la E_p respecto al objeto más lejano, ya que es mayor (un número negativo mucho más pequeño)

2005-Septiembre

Cuestión 2.-



a) Cualitativamente, por la configuración de la figura, tomando como eje x la línea que une las masas M, las componentes de la fuerza resultante en el eje x se cancelan, quedando sólo componente en el sentido de las y negativas. El valor absoluto de la fuerza de ambas masas sobre m' es el mismo ya que ambas tienen la misma masa y están a la misma disttancia, por lo que su módulo será la contribución de una de ellas multiplicada por dos.
Podemos calcularlo de dos maneras:
A. Trigonometría. Calculamos la componente y multiplicando el módulo por el seno de α, y multiplicamos por dos para sumar el efecto de ambas masas.

$$\vec{F}=-2G\frac{Mm'}{r^2}sen\,\alpha\,\vec{j}=-2\cdot6,67\cdot10^{-11}\frac{20\cdot0,2}{2}sen\,45°\,\vec{j}=-1,89\cdot10^{-10}\vec{j}\,N$$

B. Teniendo presente que $\vec{u}_r=\frac{\vec{r}}{|r|}$ y $\vec{g}=\frac{-GM}{r^2}\vec{u}_r$

El vector que va de M_1 a A es $\vec{i}+\vec{j}$ y la distancia entre ellos $\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$ m
El vector que va de M_2 a A es $-\vec{i}+\vec{j}$ y la distancia entre ellos $\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$ m

$$\vec{F}=-G\frac{M_1 m'}{2}\frac{(\vec{i}+\vec{j})}{\sqrt{2}}--G\frac{M_2 m'}{2}\frac{(-\vec{i}+\vec{j})}{\sqrt{2}}=-2\cdot 6{,}67\cdot 10^{-11}\frac{20\cdot 0{,}2}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{j}=-1{,}89\cdot 10^{-10}\vec{j}\,N$$

b) $\vec{a}(A)=\frac{\vec{F}(A)}{m'}=\frac{-1{,}89\cdot 10^{-10}}{0{,}2}\vec{j}=-9{,}45\cdot 10^{-10}\vec{j}\,m/s^2$

$$\vec{a}(B)=\frac{\vec{F}(B)}{m'}=0\ ya\,que\,en\,B\ por\,simetría\,la\ fuerza\,total\,es\,nula$$

A. Problema 1.-

a) La intensidad de campo gravitatorio es un vector, indicamos módulo, dirección y Dirección radial, en la línea que une centro de la Tierra y centro de satélite.
Sentido: hacia la Tierra, fuerza atractiva

Módulo $g=\frac{GM}{R_o^2}=\frac{6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 5{,}98\cdot 10^{24}}{(\frac{7}{6}\cdot 6{,}37\cdot 10^6)^2}=7{,}22\,m/s^2$

b) $Órbita\,circular\,F_g=F_c;\frac{GMm}{R_o^2}=\frac{mv^2}{R_o};v=\sqrt{\frac{GM}{R_o}}=\sqrt{\frac{6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 5{,}98\cdot 10^{24}}{\frac{7}{6}\cdot 6{,}37\cdot 10^6}}=7326\,m/s$

$$Órbita\,circular\,v=\frac{2\pi R_o}{T};T=\frac{2\pi R_o}{v}=\frac{2\pi\frac{7}{6}\cdot 6{,}37\cdot 10^6}{7326}=6374\,s$$

$$También\,T=\sqrt{\frac{4\pi^2}{GM}R_o^3}=\sqrt{\frac{4\pi^2}{6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 5{,}98\cdot 10^{24}}\cdot(\frac{7}{6}\cdot 6{,}37\cdot 10^6)^3}=6374\,s$$

c) $E_m=\frac{-GMm}{2R_o}=\frac{-6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 5{,}98\cdot 10^{24}\cdot 400}{2\cdot\frac{7}{6}\cdot 6{,}37\cdot 10^6}=-1{,}07\cdot 10^{10}\,J$

d) Se pide variación de energía potencial, no de energía mecánica

$$\Delta E=E_{p_o}-E_{p_{superficie}}=\frac{-GMm}{R_o}-(\frac{-GMm}{R_T})$$

$$\Delta E=6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 5{,}98\cdot 10^{24}\cdot 400\cdot(\frac{1}{6{,}37\cdot 10^6}-\frac{1}{\frac{7}{6}\cdot 6{,}37\cdot 10^6})=3{,}58\cdot 10^9\,J$$

2005-Junio

Cuestión 2.-

En ambos apartados, para órbita circular de radio órbita R_o $F_g=F_c;\frac{GMm}{R_o^2}=\frac{mv^2}{R_o};v^2=\frac{GM}{R_o}$

a) $E_c=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}m\frac{GM}{R_o}=\frac{1}{2}\frac{GMm}{R_o}$

b) $E_m=E_c+E_p=\frac{1}{2}mv^2-\frac{GMm}{r}=\frac{GMm}{r}(\frac{1}{2}-1)=\frac{-GMm}{2r}=\frac{1}{2}E_p$

A. Problema 1.-

a) Utilizando la tercera ley de Kepler

$$R_o=R_T+h=6{,}37\cdot 10^6+655\cdot 10^3=7{,}025\cdot 10^6\,m$$

$$T^2=\frac{4\pi^2}{GM}R_o^3;T=\sqrt{\frac{4\pi^2}{GM}R_o^3}=\sqrt{\frac{4\pi^2}{6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 5{,}98\cdot 10^{24}}(7{,}025\cdot 10^6)^3}=5858\,s$$

b) $E_m=\frac{-GMm}{2R_o}=\frac{-6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 5{,}98\cdot 10^{24}\cdot 100}{2\cdot 7{,}025\cdot 10^6}=-2{,}84\cdot 10^9\,J$

c) Como es una órbita circular los vectores r y v forman siempre 90º

$$\text{Órbita circular } F_g=F_c; \frac{GMm}{r^2}=\frac{mv^2}{r}; v=\sqrt{\frac{GM}{r}}$$

$$|\vec{L}|=|\vec{r}|m|\vec{v}|sen\,90º=7{,}025\cdot10^6\cdot100\cdot\sqrt{\frac{6{,}67\cdot10^{-11}\cdot5{,}98\cdot10^{24}}{7{,}025\cdot10^6}}=5{,}29\cdot10^{10}\,kg\frac{m^2}{s}[\text{también } J\cdot s]$$

d) $\frac{g_o}{g_T}=\frac{\frac{GM_T}{R_o^2}}{\frac{GM_T}{R_T^2}}=\frac{R_T^2}{R_o^2}=\frac{(6{,}37\cdot10^6)^2}{(7{,}025\cdot10^6)^2}=0{,}82$

2005-Modelo

Cuestión 1.-

a) Falso. Para escapar al campo gravitatorio terrestre tiene que aportarse como mínimo energía para que llegue al infinito con energía potencial y cinética nula, lo que igualando supone para la Tierra un valor de velocidad independiente de la masa.

$$\frac{1}{2}mv_e^2-\frac{GMm}{R_T}=0; v_e=\sqrt{\frac{2GM}{R_T}}$$

b) Verdadero, haciendo los cálculos. El trabajo a realizar es la diferencia de energía entre la energía que tiene en órbita (el radio de la órbita es el mismo en los dos casos) y la energía que tiene en la superficie. Si hallamos la expresión para una masa cualquiera y una altura de órbita cualquiera

Energía en órbita: $E_m=E_p+E_c=\frac{-GMm}{2R_o}$ Energía en superficie: $E_m=E_p=\frac{-GMm}{R_T}$

Energía a aportar, que es el trabajo a realizar, espresada en función de la masa del satélite, que es lo único que varía entre los dos casos.

$\Delta E=\frac{-GMm}{2R_o}-(\frac{-GMm}{R_T})=-GMm(\frac{1}{2R_o}-\frac{1}{R_T})=constante\cdot m$ Se ve que a mayor masa, mayor trabajo a realizar.

2004-Septiembre

Cuestión 1.-

a) Utilizamos la tercera ley de Kepler

$$\frac{T_{Venus}^2}{T_{Tierra}^2}=\frac{R_{Venus}^3}{R_{Tierra}^3}; T_{Venus}=T_{Tierra}\sqrt{\left(\frac{R_{Venus}}{R_{Tierra}}\right)^3}=365{,}25\sqrt{\left(\frac{c\cdot6{,}01}{c\cdot8{,}31}\right)^3}=224{,}65\,\text{días terrestres}$$

b) $v=\frac{2\pi r}{T}=\frac{2\cdot\pi\cdot3\cdot10^8\cdot6{,}01\cdot60}{224{,}65\cdot24\cdot2600}=35019\,m/s$

A. Problema 1.-

a)

$$\rho=\frac{M}{V}=\frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3}; g=\frac{GM}{R^2}\Rightarrow M=\frac{gR^2}{G}(R=\text{radio del planeta, en superficie})$$

$$\rho=\frac{3gR^2}{4\pi GR^3}=\frac{3g}{4\pi GR}=\frac{3\cdot6{,}2}{4\cdot\pi\cdot6{,}67\cdot10^{-11}\cdot3200\cdot10^3}=6935\frac{kg}{m^3}$$

Se pide también la velocidad de escape, $v_e=\sqrt{2G\frac{M}{R}}$

Para no calcular la masa del planeta como dato intermedio ya que no se pide, expresamos el producto GM en función de los datos del enunciado

$$g=\frac{GM}{R^2}\Rightarrow GM=gR^2 \qquad v_e=\sqrt{2gR}=\sqrt{2\cdot6{,}2\cdot3200\cdot10^3}=6299\,m/s$$

b) La energía a comunicar es la diferencia de energía entre la energía que tiene en órbita y la energía que tiene en la superficie.

Energía en órbita: $E_m=E_p+E_c=\frac{-GMm}{2R_o}$ Energía en superficie: $E_m=E_p=\frac{-GMm}{R}$

Utilizamos la tercera ley de Kepler con los datos de que el período son dos horas y la masa para calcular el radio de la órbita.

$$T^2=\frac{4\pi^2}{GM}R_o^3=\frac{4\pi^2}{g\,R^2}R_o^3\Rightarrow R_o=\sqrt[3]{\frac{T^2\cdot g\cdot R^2}{4\pi^2}}=\sqrt[3]{\frac{(2\cdot 3600)^2\cdot 6{,}2\cdot(3200\cdot 10^3)^2}{4\pi^2}}=4{,}37\cdot 10^6\,m$$

Energía a comunicar

$$\Delta E=\frac{-GMm}{2\mathrm{R}_o}-(\frac{-GMm}{R})=-GMm(\frac{1}{2\mathrm{R}_o}-\frac{1}{R})=-gmR^2(\frac{1}{2\mathrm{R}_o}-\frac{1}{R})$$

$$\Delta E=-6{,}2\cdot 50\cdot(3200\cdot 10^3)^2(\frac{1}{2\cdot 4{,}37\cdot 10^6}-\frac{1}{3200\cdot 10^3})=6{,}29\cdot 10^8\,J$$

2004-Junio

Cuestión 2.-

a) El momento angular es constante en la órbita al ser fuerzas centrales, y es el mismo en el afelio y perihelio.

b) El momento lineal y la velocidad es mayor en el perihelio. Se puede razonar de dos maneras

- El momento angular es constante en la órbita al ser fuerzas centrales. Como en perihelio y afelio los vectores r y p son perpendiculares, podemos igualar $r_A m v_A = r_P m v_P$ y dado que $r_A > r_P$, tiene que cumplirse que $v_P > v_A$
- La Energía mecánica es constante en toda la órbita al ser fuerzas conservativas, por lo tanto en el punto donde la Ep es menor (perihelio deducible según expresión Ep, la Ep será mínima en valor absoluto pero máxima (es negativa)), la Energía cinética será mayor y por lo tanto también la velocidad.

c) La energía potencial es mayor en el afelio, ya que al ser la distancia mayor en afelio, según la expresión $E_p=\frac{-GMm}{R}$ será un número mayor (un número negativo de menor valor absoluto)

d) Al haber sólo fuerzas conservativas la energía mecánica se conserva en toda la órbita, y es la misma en afelio y perihelio.

2004-Modelo

Cuestión 1.-

a) El momento angular es constante en la órbita al ser fuerzas centrales. Como en perihelio y afelio los vectores r y p son perpendiculares, podemos plantear $r_A m v_A = r_P m v_P \Rightarrow \frac{r_P}{r_A}=\frac{v_A}{v_P}=\frac{14}{20}=0{,}7$

b) $\frac{E_{p_A}}{E_{p_P}}=\frac{\frac{-GMm}{r_A}}{\frac{-GMm}{r_P}}=\frac{r_P}{r_A}=\frac{14}{20}=0{,}7$

A. Problema 1.-

a) Utilizando la tercera ley de Kepler

$$\frac{T^2_{sonda}}{T^2_{satélite}}=\frac{R^3_{sonda}}{R^3_{satélite}};\ T_{sonda}=T_{satélite}\sqrt{\left(\frac{R_{sonda}}{R_{satélite}}\right)^3}=7{,}7\cdot\sqrt{\left(\frac{3390\cdot 10^3+400\cdot 10^3}{9390\cdot 10^3}\right)^3}=1{,}97\,h$$

b) Utilizando la tercera ley de Kepler

$$T^2=\frac{4\pi^2}{GM}R^3\Rightarrow M=\frac{4\pi^2 R^3}{G\,T^2}=\frac{4\pi^2(9390\cdot 10^3)^3}{6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot(7{,}7\cdot 3600)^2}=6{,}38\cdot 10^{23}\,kg$$

$$g=\frac{GM}{R^2}=\frac{6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 6{,}38\cdot 10^{23}}{(3390\cdot 10^3)^2}=3{,}7\,\frac{m}{s^2}$$

2003-Septiembre

A. Problema 1.-

a) Utilizando la tercera ley de Kepler, ya que conocemos período y radio órbita

$$T^2=\frac{4\pi^2}{GM}R^3\Rightarrow T=\sqrt{\frac{4\pi^2 R^3}{G\,M}}=\sqrt{\frac{4\pi^2(7100\cdot 10^3)^3}{6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 5{,}98\cdot 10^{24}}}=5952\,s$$

b) El momento lineal es un vector; será siempre tangencial a la órbita, y su módulo será

$$|\vec{p}|=m|\vec{v}|=m\frac{2\pi R_o}{T}=\frac{100\cdot 2\pi 7100\cdot 10^3}{5952}=749506\frac{kg\cdot m}{s}$$

El momento angular es un vector; será perpendicular al plano de la órbita, formará siempre 90º con el vector r, y su módulo será

$$|\vec{L}|=|\vec{r}|m|\vec{v}|sen 90º=R_o|\vec{p}|=7100\cdot 10^3\cdot 749506=5{,}32\cdot 10^{12}kg\frac{m^2}{s}[también\, J\cdot s]$$

c)

$$\Delta E_p=E_{p_{órbita}}-E_{p_{superficie}}=\frac{-GMm}{R_o^2}-(\frac{-GMm}{R_T^2})=-GMm(\frac{1}{R_o^2}-\frac{1}{R_T^2})$$

$$\Delta E_p=-6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 5{,}98\cdot 10^{24}\cdot 100(\frac{1}{7100\cdot 10^3}-\frac{1}{6{,}37\cdot 10^6})=6{,}4\cdot 10^8 J$$

d)

$$E_c=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}m\left(\frac{2\pi R_o}{T}\right)^2=0{,}5\cdot 100\cdot\left(\frac{2\pi 7100\cdot 10^3}{5952}\right)^2=2{,}8\cdot 10^9 J$$

$$E_m=E_c+E_p=2{,}8\cdot 10^9-\frac{6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 5{,}98\cdot 10^{24}\cdot 100}{7100\cdot 10^3}=-2{,}8\cdot 10^9 J$$

También podríamos haber razonado directamente que en órbita circular E_m = - E_c = 1/2 E_p

2003-Junio

Cuestión 1.-

$$\rho=\frac{M}{V};M=\frac{\rho\cdot 4}{3}\pi R^3;R_P=\frac{1}{2}R_T;\rho_P=\rho_T$$

a)

$$\frac{g_P}{g_T}=\frac{\frac{GM_P}{R_P^2}}{\frac{GM_T}{R_T^2}}=\frac{\rho_P\cdot\frac{4}{3}\pi R_P^3\cdot R_T^2}{\rho_T\cdot\frac{4}{3}\pi R_T^3\cdot R_P^2}=\frac{R_P}{R_T}=\frac{1}{2}\Rightarrow g_P=\frac{1}{2}g_T=0{,}5\cdot 9{,}81=4{,}905\frac{m}{s^2}$$

b) La velocidad de escape se obtiene igualando la energía mecánica en superficie con la energía mecánica en infinito (cero), con lo que se llega a la expresión

$$\frac{1}{2}mv_e^2-\frac{GMm}{R}=0\Rightarrow v_e=\sqrt{2\frac{GM}{R}}=\sqrt{2gR}$$

$$\frac{v_{e_P}}{v_{e_T}}=\frac{\sqrt{2g_PR_P}}{\sqrt{2g_TR_T}}=\sqrt{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\Rightarrow v_{e_P}=0{,}5\cdot 11{,}2\cdot 10^3=5{,}6\cdot 10^3 m/s$$

A. Problema 1.-

a) El momento angular es constante en la órbita al ser fuerzas centrales. Como en perihelio y afelio los vectores r y p son perpendiculares, podemos plantear

$$r_A m v_A=r_P m v_P\Rightarrow v_P=\frac{r_A v_A}{r_P}=\frac{6{,}99\cdot 10^{10}\cdot 3{,}88\cdot 10^4}{4{,}60\cdot 10^{10}}=5{,}9\cdot 10^4 m/s$$

b)

$$E_c=\frac{1}{2}mv^2=0{,}5\cdot 3{,}18\cdot 10^{23}\cdot(5{,}9\cdot 10^4)^2=5{,}5\cdot 10^{32}J$$

$$E_p=\frac{-GMm}{R}=\frac{-6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 1{,}99\cdot 10^{30}\cdot 3{,}18\cdot 10^{23}}{4{,}6\cdot 10^{10}}=-9{,}18\cdot 10^{32}J$$

$$E_m=E_c+E_p=5{,}5\cdot 10^{32}-9{,}18\cdot 10^{32}=-3{,}68\cdot 10^{32}J$$

c) $|\vec{p}|=m|\vec{v}|=3{,}18\cdot 10^{23}\cdot 5{,}9\cdot 10^4=1{,}88\cdot 10^{28}kg\frac{m}{s}$

$$|\vec{L}|=|\vec{r}|m|\vec{v}|sen 90º=R|\vec{p}|=4{,}6\cdot 10^{10}\cdot 1{,}88\cdot 10^{28}=8{,}65\cdot 10^{38}kg\frac{m^2}{s}[también\, J\cdot s]$$

d) Energía total: igual en afelio y perihelio, ya que se conserva al haber sólo fuerzas conservativas.
Momento angular: igual en afelio y perihelio, ya que se conserva al ser fuerzas centrales.
Energía cinética y potencial: distinta en afelio y perihelio al depender de la distancia.
Momento lineal: distinto en afelio y perihelio al haber distintas velocidades.

2003-Modelo
Cuestión 1.-

$$M_P=27\,M_T\,;v_{e_P}=3\,v_{e_T}$$

a) $\frac{v_{e_P}}{v_{e_T}}=\frac{\sqrt{\frac{2\mathrm{GM}_P}{R_P}}}{\sqrt{\frac{2\mathrm{GM}_T}{R_T}}}=\sqrt{\frac{M_P}{M_T}\cdot\frac{R_T}{R_P}}=\sqrt{\frac{27\cdot R_T}{R_P}}=3\Rightarrow\frac{R_T}{R_P}=\frac{3^2}{27}=\frac{1}{3}\approx 0{,}33$

b) $\frac{g_P}{g_T}=\frac{\frac{GM_P}{R_P^2}}{\frac{GM_T}{R_T^2}}=\frac{M_P}{M_T}\cdot\left(\frac{R_T}{R_P}\right)^2=\frac{27\cdot 1}{3^2}=3$

A. Problema 1.-
a) Utilizamos la tercera ley de Kepler

$$T_{satélite}^2=\frac{4\pi^2}{GM_{Júpiter}}R_{satélite}^3\Rightarrow R_{satélite}=\sqrt[3]{\frac{GM_{Júpiter}T_{satélite}^2}{4\pi^2}}$$

Expresamos la masa de la Júpiter en función de los datos proporcionados

$$M_{Júpiter}=320\,M_{Tierra}\,;\,g_{Tierra}=\frac{GM_{Tierra}}{R_T^2}\Rightarrow M_{Tierra}=\frac{g_{Tierra}\cdot R_T^2}{G}\,;M_{Júpiter}=\frac{320\cdot g_{Tierra}\cdot R_T^2}{G}$$

Despejamos el Radio de la órbita del satélite, y calculamos altura

$$R_{satélite}=\sqrt[3]{\frac{320\cdot g_{Tierra}\cdot R_T^2\,T_{satélite}^2}{4\pi^2}}=\sqrt[3]{\frac{320\cdot 9{,}8\cdot(6{,}37\cdot 10^6)^2\cdot(9\cdot 3600+50\cdot 60)^2}{4\pi^2}}=1{,}59\cdot 10^8\,m$$

$$V_{Júpiter}=\frac{4}{3}\pi R_{Júpiter}^3=1320\cdot\frac{4}{3}\pi R_{Tierra}^3\Rightarrow R_{Júpiter}=\sqrt[3]{1320}\,R_{Tierra}$$

$$h=R_{satélite}-R_{Júpiter}=1{,}59\cdot 10^8-\sqrt[3]{1320}\cdot 6{,}37\cdot 10^6=8{,}91\cdot 10^7\,m$$

b) $\acute{O}rbita\,circular\,v=\frac{2\pi R_{satélite}}{T_{satélite}}=\frac{2\cdot\pi\cdot 1{,}59\cdot 10^8}{9\cdot 3600+50\cdot 60}=28221\,m/s$

2002-Septiembre
A. Problema 1 .-
a) Si el satélite pasa sobre un punto cada dos días, el período es T = 2 días. Utilizamos la tercera ley de Kepler

$$T_{satélite}^2=\frac{4\pi^2}{GM_T}R_{satélite}^3\Rightarrow R_{satélite}=\sqrt[3]{\frac{GM_T T_{satélite}^2}{4\pi^2}}=\sqrt[3]{\frac{6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 5{,}98\cdot 10^{24}\cdot(2\cdot 24\cdot 3600)^2}{4\pi^2}}=6{,}71\cdot 10^7\,m$$

$$h=R_{satélite}-R_T=6{,}707\cdot 10^7-6{,}37\cdot 10^6=6{,}07\cdot 10^7\,m$$

b) La energía a comunicar para colocarlo en esa órbita desde el lanzamiento es la diferencia de energías entre órbita y situación de lanzamiento

En órbita $E_m=E_c+E_p=\frac{-GMm}{2\mathrm{R}_{satélite}}$; En lanzamiento: $E_m=E_p=\frac{-GMm}{R_T}$

Energía a comunicar para llevar a órbita:

$$\Delta E_{órbita}=\frac{-GMm}{2\mathrm{R}_{satélite}}-\left(\frac{-GMm}{R_T}\right)=-GMm\cdot\left(\frac{1}{2\mathrm{R}_{satélite}}-\frac{1}{R_T}\right)$$

La energía de escape es la energía a comunicar para que escape del campo gravitatorio terrestre, llegando al infinito con energía cinética nula. Por lo tanto esa energía es en valor absoluto, la energía potencial gravitatoria.

Energía a comunicar para escape: $\Delta E_{escape}=\frac{GMm}{R_T}$

La relación entre ambas es

$$\frac{\Delta E_{órbita}}{\Delta E_{escape}}=\frac{-GMm\cdot(\frac{1}{2R_{satélite}}-\frac{1}{R_T})}{\frac{GMm}{R_T}}=\frac{-R_T}{2R_{satélite}}+1=\frac{-6{,}37\cdot10^6}{2\cdot6{,}71\cdot10^7}+1=0{,}9525=95{,}25\%$$

2002-Junio

Cuestión 1.-

a) $g=\frac{GM}{R^2}=\frac{G\rho\frac{4}{3}\pi R^3}{R^2}=\rho\frac{4}{3}\pi G R\Rightarrow\rho=\frac{3g}{4\pi G R}=\frac{3\cdot6}{4\pi\cdot6{,}67\cdot10^{-11}\cdot3000\cdot10^3}=7158\frac{kg}{m^3}$

b) $v_e=\sqrt{\frac{2GM}{R}}=\sqrt{2gR}=\sqrt{2\cdot6\cdot3000\cdot10^3}=6000\,m/s$

A. Problema 1.-

a) Como sabemos la velocidad angular, sabemos el periodo

$$\omega=\frac{2\pi}{T}\Rightarrow T=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{2\pi}{1{,}45\cdot10^{-4}}=43332\,s$$

Conocido el periodo y la masa del objeto respecto al que orbita, podemos conocer el radio de la órbita utilizando la tercera ley de Kepler

$$T_1^2=\frac{4\pi^2}{GM}r_1^3\Rightarrow r_1=\sqrt[3]{\frac{GMT_1^2}{4\pi^2}}=\sqrt[3]{\frac{6{,}67\cdot10^{-11}\cdot4{,}87\cdot10^{24}\cdot43332^2}{4\pi^2}}=2{,}49\cdot10^7\,m$$

Al ser una órbita circular los vectores r y v forman siempre 90º

$$L_1=r_1\cdot m\cdot v_1=r_1\cdot m\cdot\omega_1\cdot r_1\Rightarrow m=\frac{L_1}{\omega_1\cdot r_1^2}=\frac{2{,}2\cdot10^{12}}{1{,}45\cdot10^{-4}\cdot(2{,}49\cdot10^7)^2}=24{,}47\,kg$$

b) La energía a invertir será la diferencia de energía entre ambas situaciones

Órbita 1: $E_{m_1}=\frac{-GMm}{2r_1}=\frac{-6{,}67\cdot10^{-11}\cdot4{,}87\cdot10^{24}\cdot24{,}47}{2\cdot2{,}49\cdot10^7}=-1{,}6\cdot10^8\,J$

En la órbita 2 hay que tener en cuenta que tendremos un nuevo radio que debemos calcular, calculando el periodo y utilizando la tercera ley de Kepler como en el apartado anterior.

$$\omega=\frac{2\pi}{T}\Rightarrow T=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{2\pi}{10^{-4}}=62832\,s$$

$$T_2^2=\frac{4\pi^2}{GM}r_2^3\Rightarrow r_2=\sqrt[3]{\frac{GMT_2^2}{4\pi^2}}=\sqrt[3]{\frac{6{,}67\cdot10^{-11}\cdot4{,}87\cdot10^{24}\cdot62832^2}{4\pi^2}}=3{,}19\cdot10^7\,m$$

Órbita 2: $E_{m_2}=\frac{-GMm}{2r_2}=\frac{-6{,}67\cdot10^{-11}\cdot4{,}87\cdot10^{24}\cdot24{,}47}{2\cdot3{,}19\cdot10^7}=-1{,}25\cdot10^8\,J$

Energía a invertir $\Delta E=E_{m_2}-E_{m_1}=-1{,}25\cdot10^8-(-1{,}6\cdot10^8)=3{,}5\cdot10^7\,J$

2002-Modelo

Cuestión 1.-

a) Como P=mg pero la masa no varía, calculamos la altura a la que la intensidad del campo gravitatorio sea la mitad

$$\frac{g_h}{g_0}=\frac{\frac{GM}{(R_T+h)^2}}{\frac{GM}{R_T^2}}=\left(\frac{R_T}{R_T+h}\right)^2=\frac{1}{2}\Rightarrow 4R_T=R_T+h;\,h=3R_T$$

b) Porque la intensidad de campo gravitatorio mide la fuerza por unidad de masa, y la aceleración es inversamente proporcional a la masa. Si tenemos dos cuerpos de m_1 y m_2, siendo m_2 el más pesado ($m_2 > m_1$), tendremos que $F_1=m_1g$ y $F_2=m_2g$, por lo que efectivamente $F_2 > F_1$, sin embargo como F=ma, a = F/m, luego $a_1=F_1/m_1$ y $a_2=F_2/m_2$, siendo en ambos casos $a_1=a_2=g$, misma aceleración independientemente de la masa del objeto.

A. Problema 1.-

a) Utilizamos la tercera ley de Kepler con los datos del planeta 1

$$T^2=\frac{4\pi^2}{GM}R^3 \Rightarrow M=\frac{4\pi^2R^3}{GT^2}=\frac{4\pi^2\cdot(10^{11})^3}{6{,}67\cdot10^{-11}\cdot(2\cdot365\cdot24\cdot3600)^2}=1{,}49\cdot10^{29}\,kg$$

b) Utilizamos la tercera ley de Kepler, teniendo en cuenta que R, cuando no se trata de una órbita circular, hace referencia al semieje mayor.

$$\frac{T_2^2}{T_1^2}=\frac{R_2^3}{R_1^3};\ T_2=T_1\sqrt{\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^3}=2\cdot\sqrt{\left(\frac{1{,}8\cdot10^{11}}{10^{11}}\right)^3}=4{,}83\,años$$

c) Utilizando el principio de conservación del momento angular, ya que son fuerzas centrales, y teniendo en cuenta que en el punto más próximo (perihelio) y más alejado (afelio) los vectores r y v forman 90º, podemos plantear para el planeta 2

$$L_A=L_P \Rightarrow r_A m v_A=r_P m v_P$$

Utilizando el principio de conservación de la energía mecánica, ya que sólo actúan fuerzas conservativas, podemos plantear para el planeta 2

$$E_{m_A}=E_{m_P} \Rightarrow \frac{1}{2}m v_A^2-\frac{GMm}{r_A}=\frac{1}{2}m v_P^2-\frac{GMm}{r_P}$$

Tenemos dos ecuaciones con dos incógnitas (v_A y v_P), como nos interesa v_P, despejamos v_A en la primera y sustituimos en la segunda.

$$v_A=\frac{r_P v_P}{r_A}$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{r_P v_P}{r_A}\right)^2-\frac{GM}{r_A}=\frac{1}{2}v_P^2-\frac{GM}{r_P} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\left(\frac{r_P}{r_A}\right)^2-\frac{1}{2}\right)v_P^2=GM\left(\frac{1}{r_A}-\frac{1}{r_P}\right)$$

$$v_P=\sqrt{\frac{GM\left(\frac{1}{r_A}-\frac{1}{r_P}\right)}{\frac{1}{2}\left(\frac{r_P}{r_A}\right)^2-\frac{1}{2}}}=v_P=\sqrt{\frac{6{,}67\cdot10^{-11}\cdot1{,}49\cdot10^{29}\left(\frac{1}{1{,}8\cdot10^{11}}-\frac{1}{10^{11}}\right)}{\frac{1}{2}\left(\frac{10^{11}}{1{,}8\cdot10^{11}}\right)^2-\frac{1}{2}}}=11304\,m/s$$

2001-Septiembre

Cuestión 1.-

a) Si ignoramos fuerzas de rozamiento podemos asumir que solamente actúa la fuerza de la gravedad, conservativa, y planteamos la conservación de energía mecánica entre ambos puntos:

Punto 1, lanzamiento:

$$E_c=\frac{1}{2}m v^2=\frac{1}{2}10\,3200^2=5{,}12\cdot10^7 J$$

$E_p=-G\dfrac{Mm}{R_{superficie}}$ No se da en el enunciado los valores de G ni de M, pero el valor de su producto podemos obtenerla del valor proporcionado de la gravedad en la superficie de la Tierra, ya que

$$g=G\frac{M}{R_{superficie}^2} \Rightarrow GM=g\cdot R_{superficie}^2=9{,}8\cdot(6{,}37\cdot10^6)^2=3{,}9765\cdot10^{14}\,m^3/s^2$$

En el lanzamiento $E_p=-G\dfrac{Mm}{R_{superficie}}=-3{,}9765\cdot10^{14}\cdot\dfrac{10}{6{,}37\cdot10^6}=-6{,}24\cdot10^8 J$

Punto 2, altura máxima

$E_c=0$, $E_p=-GM\dfrac{m}{(R_{superficie}+h_{máx})}=-3{,}9765\cdot10^{14}\cdot\dfrac{10}{6{,}37\cdot10^6+h_{máx}}$

Igualamos ambas energías, podemos responder a la pregunta del enunciado indicando que

$$E_{m1}=E_{m2}=E_{p2}=5{,}12\cdot10^7-6{,}24\cdot10^8=-5{,}728\cdot10^8 J$$

b) Si sustituimos

$$E_{m1}=E_{m2} \Rightarrow -5{,}728\cdot10^8=-3{,}9765\cdot10^{14}\cdot\frac{10}{6{,}37\cdot10^6+h_{máx}} \Rightarrow 1{,}44\cdot10^{-7}=\frac{1}{6{,}37\cdot10^6+h_{máx}}$$

$$6{,}94\cdot10^6=6{,}37\cdot10^6+h_{máx} \Rightarrow h_{máx}=570000\,m$$

2001-Junio

Cuestión 1.- *(Enunciado similar a 2001-Modelo-Cuestión 1, resolución idéntica)*

a) En una órbita circular podemos igualar fuerza gravitatoria y centrípeta

$\acute{O}rbita\ circular\ F_g=F_c;\frac{GMm}{R_o^2}=\frac{mv^2}{R_o};v^2=\frac{GM}{R_o}$ Sustituimos en la expresión de la E_c:

$$E_c=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}m\frac{GM}{R_o}=\frac{GMm}{2R_o}$$

b) La energía potencial es $E_p=-G\frac{Mm}{R_o}$, por lo que la energía mecánica es

$$E_m=E_c+E_p=\frac{GMm}{2R_o}-\frac{GMm}{R_o}=\frac{-GMm}{2R_o}$$

La relación solicitada es $E_m=\frac{1}{2}E_p$

A. Problema 1.-

a) $\acute{O}rbita\ circular\ F_g=F_c;\frac{GMm}{R_o^2}=\frac{mv^2}{R_o};v^2=\frac{GM}{R_o}$

$$\frac{v_1^2}{v_2^2}=\frac{\frac{GM}{r_1}}{\frac{GM}{r_2}}=\frac{r_2}{r_1}\Rightarrow v_1=\sqrt{\frac{r_2}{r_1}}v_1=\sqrt{\frac{9{,}034\cdot10^6}{8\cdot10^6}}v_2\Rightarrow v_1=1{,}063\,v_2;\ también\ v_2=0{,}94\,v_1$$

b) Según la tercera ley de Kepler $\frac{T_1^2}{T_2^2}=\frac{r_1^3}{r_2^3}\Rightarrow T_1=\sqrt{\frac{r_1^3}{r_2^3}}T_2=\sqrt{\frac{(8\cdot10^6)^3}{(9{,}034\cdot10^6)^3}}\cdot T_2\Rightarrow T_1=0{,}83\,T_2$

Para describir la posición en este caso utilizamos coordenadas polares, tomando θ=0º en el instante inicial para ambos satélites. Enunciado no pide posición relativa entre satélites: basta con dar la posición del segundo satélite respecto al sistema de coordenadas elegido.

El primer satélite es el que tiene mayor velocidad, y en recorrer 6 vueltas tardará un tiempo

$$t_{tardado\ por\ S1}=\frac{e_{recorrido\ por\ S1}}{v_1}=\frac{6\cdot2\pi r_1}{v_1}$$

En ese tiempo, el segundo satélite habrá recorrido $e_{recorrido\ por\ S2}=v_2\cdot t_{tardado\ por\ S1}=v_2\cdot\frac{6\cdot2\pi r_1}{v_1}$

Como queremos conocer la fase de este satélite y en un movimiento circular la fase en radianes es

$\theta=\frac{e}{R}$, donde en este caso estamos hablando de la fase de S_2 y tenemos que usar r_2, de modo que

$$\theta_{recorrido\ por\ S2}=\frac{v_2}{v_1}\cdot6\cdot2\pi\frac{r_1}{r_2}$$

Sustituyendo la relación entre velocidades del apartado a

$$\theta_{recorrido\ por\ S2}=0{,}94\cdot6\cdot2\pi\frac{8\cdot10^6}{9{,}034\cdot10^6}=9{,}98\pi\ rad\approx10\pi\ rad$$

Como el ángulo recorrido por el segundo satélite es aproximadamente un múltiplo de 2π, el satélite S_2 ha completado vueltas completas (5 vueltas completas) y se encuentra en la misma posición que en el instante inicial. Como el satélite S_1 también ha completado un número completo de vueltas, 6 según el enunciado, ambos están en la posición inicial.

2001-Modelo

Cuestión 1.-

En una órbita circular podemos igualar fuerza gravitatoria y centrípeta

$\acute{O}rbita\ circular\ F_g=F_c;\frac{GMm}{R_o^2}=\frac{mv^2}{R_o};v^2=\frac{GM}{R_o}$ Sustituimos en la expresión de la E_c:

$$E_c=\frac{1}{2}m v^2=\frac{1}{2}m\frac{GM}{R_o}=\frac{GMm}{2R_o}$$

La energía potencial es $E_p=-G\frac{Mm}{R_o}$, por lo que la energía mecánica es

$$E_m=E_c+E_p=\frac{GMm}{2R_o}-\frac{GMm}{R_o}=\frac{-GMm}{2R_o}$$

La relación solicitada es $E_m=\frac{1}{2}E_p$

A. Problema 1.-

a) Según el enunciado $T_{Júpiter}=12T_{Tierra}$.

Según la tercera ley de Kepler $\frac{T_J^2}{T_T^2}=\frac{R_J^3}{R_T^3}\Rightarrow\sqrt[3]{12^2}=\frac{R_J}{R_T}\Rightarrow R_J=5{,}24\,R_T$

b) La aceleración en la órbita es centrípeta.

$$\frac{a_J}{a_T}=\frac{\frac{v_J^2}{R_J}}{\frac{v_T^2}{R_T}}=\frac{v_J^2}{v_T^2}\frac{R_T}{R_J}$$

Para hallar la relación entre las velocidades, igualamos fuerza gravitatoria y centrípeta al ser órbita circular $F_g=F_c;\frac{GM_{Sol}m_{planeta}}{R^2}=m_{planeta}\frac{v_{planeta}^2}{R};v_{planeta}^2=\frac{GM_{Sol}}{R}$

$$\frac{a_J}{a_T}=\frac{\left(G\frac{M_{Sol}}{R_J}\right)^2}{\left(G\frac{M_{Sol}}{R_T}\right)^2}\frac{R_T}{R_J}=\frac{R_T^3}{R_J^3}=12^2=144$$

2000-Septiembre

Cuestión 1.-

a) La frecuencia angular con la que debe girar es la misma que la frecuencia angular de giro de la Tierra; se trata de un satélite geoestacionario.

$$\omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{2\pi}{24\cdot3600}=7{,}27\cdot10^{-5}\,rad/s$$

b) En una órbita circular podemos igualar fuerza centrípeta y gravitatoria, y podemos sustituir $v=\omega R_o$, luego

$$F_g=F_c;\frac{GMm}{R_o^2}=\frac{mv^2}{R_o};\frac{GM}{R_o}=(\omega R_o)^2\Rightarrow R_o=\sqrt[3]{\frac{GM}{\omega^2}}$$

No se da en el enunciado los valores de G ni de M, pero el valor de su producto podemos obtenerla del valor proporcionado de la gravedad en la superficie de la Tierra, ya que

$$g=G\frac{M}{R_{superficie}^2}\Rightarrow GM=g\cdot R_{superficie}^2=9{,}8\cdot(6{,}37\cdot10^6)^2=3{,}9765\cdot10^{14}\,m^3/s^2$$

Sustituyendo

$$R_o=\sqrt[3]{\frac{GM}{\omega^2}}=\sqrt[3]{\frac{3{,}9765\cdot10^{14}}{(7{,}27\cdot10^{-5})^2}}=4{,}22\cdot10^7\,m$$

Como se pide altura, $h=R_o-R_{superficie}=4{,}22\cdot10^7-6{,}37\cdot10^6=3{,}58\cdot10^7$ m

A. Problema 1.-

a) La velocidad del satélite, igualando fuerza centrípeta y gravitatoria

$$\text{Órbita circular } F_g=F_c;\frac{GMm}{R_o^2}=\frac{mv^2}{R_o};v^2=\frac{GM}{R_o}\Rightarrow v=\sqrt{\frac{GM}{R_o}}$$

No se da en el enunciado los valores de G ni de M, pero el valor de su producto podemos obtenerla del valor proporcionado de la gravedad en la superficie de la Tierra, ya que

$$g=G\frac{M}{R_{superficie}^2}\Rightarrow GM=g\cdot R_{superficie}^2=9{,}8\cdot(6{,}37\cdot 10^6)^2=3{,}9765\cdot 10^{14}\,m^3/s^2$$

Para hallar el radio de la órbita, usamos la relación entre el campo del enunciado: llamamos g_T al valor de la gravedad en la superficie y g_O al valor en la órbita.

$$|\vec{g}|=g=\frac{GM}{R^2}\Rightarrow\frac{g_O}{g_T}=\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{\frac{GM}{r_O^2}}{\frac{GM}{r_T^2}}=\frac{r_T^2}{r_O^2}=\frac{1}{2}\Rightarrow r_O=\sqrt{2}r_T$$

No se solicita la altura, pero se puede calcular $r_O=r_T+h\Rightarrow r_T+h=\sqrt{2}r_T\Rightarrow h=(\sqrt{2}-1)r_T$

Sustituyendo:

$$v=\sqrt{\frac{3{,}9765\cdot 10^{14}}{\sqrt{2}\,6{,}37\cdot 10^6}}=6643{,}9\,m/s$$

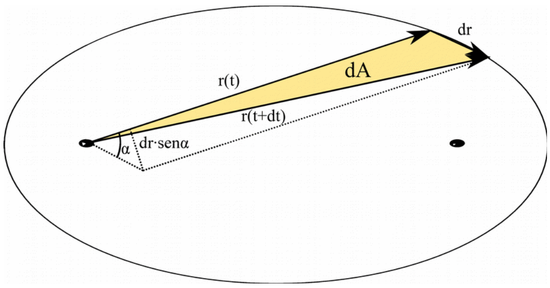
b) Para una órbita circular se puede llegar a la expresión $E_m=\frac{-GMm}{2R_o}$ que también se puede comprobar que $E_m=-E_c$, que es más cómoda ya que en el apartado a tenemos calculada la velocidad, por lo que sustituyendo: $E_m=-0{,}5\cdot 200\cdot 6643{,}9^2=-4{,}4\cdot 10^9$ J

2000-Junio

Cuestión 1.-

a) 1. Ley de las órbitas. Planetas describen órbitas elípticas y el Sol está en uno de los focos.
2. Ley de las áreas. El área barrida por unidad de tiempo por el radio vector que une Sol-Planeta / la velocidad areolar es constante.

b) Como no se indica en enunciado para órbita circular debemos contemplar el caso genérico de órbita elíptica. Si planteamos la órbita elíptica y un área diferencial barrida



$dA=\frac{1}{2}|\vec{r}\times d\vec{r}|$ (La mitad del área del paralelogramo formado por vectores r y dr)

Operando para obtener la velocidad areolar

$$\frac{dA}{dt}=\frac{1}{2}\left|\vec{r}\times\frac{d\vec{r}}{dt}\right|=\frac{1}{2}|\vec{r}\times\vec{v}|$$

Según el teorema de la conservación del momento angular $\frac{d\vec{L}}{dt}=\vec{M}$. Tomando como referencia para el momento de las fuerzas el objeto respecto al que se orbita, siempre tendremos que vector posición y vector fuerza son paralelos, ya que son fuerzas centrales, por lo que $\vec{M}=\vec{r}\times\vec{F}=0$. Por lo tanto la variación del momento angular es nula, y el vector momento angular es constante, en concreto su módulo, $|\vec{L}|=m|\vec{r}\times\vec{v}|=cte$.

Podemos plantear $\frac{dA}{dt}=\frac{1}{2}\frac{|\vec{L}|}{m}=\frac{|\vec{L}|}{2\mathrm{m}}=cte$, que muestra que la segunda ley de Kepler es un caso particular del teorema de conservación del momento angular.

A. Problema 1-

a) Calculamos la energía potencial en ambos puntos:
En superficie antes del lanzamiento:

$$E_{pT}=-G\frac{Mm}{R_T}=-6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 5{,}98\cdot 10^{24}\cdot\frac{600}{6{,}37\cdot 10^6}=-3{,}76\cdot 10^{10}J$$

En la órbita;

$$E_{pO}=-G\frac{Mm}{R_O}=-6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 5{,}98\cdot 10^{24}\cdot\frac{600}{6{,}37\cdot 10^6+1200\cdot 10^3}=-3{,}16\cdot 10^{10}J$$

La diferencia de energía es $\Delta E_p=E_{pO}-E_{pT}=-3{,}16\cdot 10^{10}-(-3{,}76\cdot 10^{10})=6\cdot 10^9$ J

b) La energía de escape es la energía que hay que suministrar para que llegue a una posición infinitamente alejada ($E_p=0$), con velocidad nula ($E_c=0$). Al no considerar fuerzas no conservativas

podemos plantear la conservación de la energía mecánica: la energía mecánica que tenga el satélite en la órbita más la energía adicional suministrada será igual a la energía mecánica en la posición infinitamente alejada
-Energía mecánica en órbita: ya conocemos la E_{pO} del apartado a, calculamos la E_c. Si asumimos órbita circular podemos llegar a la expresión $E_{mO}=1/2\cdot E_{pO}=0,5\cdot(-3,16\cdot 10^{10})=-1,58\cdot 10^{10}$ J
-Energía mecánica en posición infinitamente alejada ($E_p=0$), con velocidad nula ($E_c=0$): $E_{m\infty}=0$.
La diferencia de energía es la energía a suministrar $\Delta E_m=E_{m\infty}-E_{mO}=0-(-1,58\cdot 10^{10})=1,58\cdot 10^{10}$ J

2000-Modelo

Cuestión 1.-

a) Según la segunda ley de Kepler, la velocidad areolar es constante, luego para barrer la misma cantidad de área estando más cerca del Sol, perihelio, tendrá que ir a mayor velocidad. También podemos razonar que como se trata de fuerzas centrales, el momento angular es constante, y como tanto en perihelio como en afelio el vector posición y el vector velocidad son perpendiculares podemos establecer la relación

$$|\vec{L}_{afelio}|=|\vec{L}_{perihelio}|\Rightarrow m\cdot r_{afelio}\cdot v_{afelio}=m\cdot r_{perihelio}\cdot v_{perihelio}\Rightarrow \frac{r_{afelio}}{r_{perihelio}}=\frac{v_{perihelio}}{v_{afelio}}$$

Como $r_{afelio} > r_{perihelio} \rightarrow v_{perihelio} > v_{afelio}$
Respecto a la aceleración, al ser la única fuerza la gravitatoria y ser central, en módulo podemos $a=F/m=GM/r^2$, luego en los puntos donde r sea menor (perihelio), el módulo del vector aceleración será menor.
Nota: Se podría intentar plantear que la aceleración es centrípeta $a=v^2/r$, y como en perihelio v es mayor y r menor, también es mayor. Es cierto en el perihelio porque en ese punto los vectores posición y velocidad son perpendiculares y toda la aceleración es realmente centrípeta, pero no es cierto en todos los puntos de una órbita no circular, donde la aceleración global tiene una componente tangencial a la trayectoria y otra normal, no solamente hay aceleración centrípeta.
b) La expresión de la energía potencial $E_p=-GMm/R$ nos indica que a mayor distancia, el valor negativo es de módulo menor, lo que implica mayor energía potencial: tiene mayor energía potencial en el afelio.
La energía mecánica es constante ya que solamente actúan fuerzas conservativas, por lo que tiene el mismo valor en perihelio y en afelio.
Nota: sería un error utilizar la expresión de que en una órbita $E_{mO}=1/2\cdot E_{pO}$, ya que eso solamente es cierto para órbitas circulares en las que la E_{pO} es constante.

A. Problema 1.-

a) $$\acute{O}rbita\,circular\; F_g=F_c;\;\frac{GMm}{R_o^2}=\frac{mv^2}{R_o};\;v^2=\frac{GM}{R_o}\Rightarrow v=\sqrt{\frac{GM}{R_o}}$$

No se da en el enunciado los valores de G ni de M, pero el valor de su producto podemos obtenerla del valor proporcionado de la gravedad en la superficie de la Tierra, ya que

$$g=G\frac{M}{R_{superficie}^2}\Rightarrow GM=g\cdot R_{superficie}^2=9,8\cdot(6,37\cdot 10^6)^2=3,9765\cdot 10^{14}\,m^3/s^2$$

El radio de la órbita $R_o=R_T+h=6,37\cdot 10^6+300\cdot 10^3=6,67\cdot 10^6$ m
Sustituyendo

$$v=\sqrt{\frac{3,9765\cdot 10^{14}}{6,67\cdot 10^6}}=7721\,m/s$$

Como la órbita es circular, toda la aceleración es centrípeta con dirección radial y sentido dirigido hacia el centro de la Tierra, y su módulo es $a=\frac{v^2}{R_o}=\frac{7721^2}{6,67\cdot 10^6}=8,94\,m/s^2$

El periodo de la órbita es $T=\frac{2\pi R_o}{v}=\frac{2\pi\cdot 6,67\cdot 10^6}{7721}=5428\,s$

b) El trabajo que hay que realizar, considerando solamente hay fuerzas conservativas, es la diferencia de energía mecánica entre las dos situaciones:
-En la superficie antes del lanzamiento: $E_c=0$, $E_p=-GMm/R_T$

No se da en el enunciado los valores de G ni de M, pero el valor de su producto podemos obtenerla del valor proporcionado de la gravedad en la superficie de la Tierra, ya que

$$g=G\frac{M}{R_{superficie}^2}\Rightarrow GM=g\cdot R_{superficie}^2=9{,}8\cdot(6{,}37\cdot10^6)^2=3{,}9765\cdot10^{14}\,m^3/s^2$$

Sustituyendo: E_p=-3,9765·10^{14}·1000/6,37·10^6=-6,24·10^{10} J

-En la órbita, al ser órbita circular se puede llegar a la expresión E_{mO}=1/2·E_{pO}= -1/2·GMm/R_o = -0,5·3,9765·10^{14}·1000/(6,37·10^6+300·10^3)=-2,98·10^{10} J

La diferencia de energía es el trabajo a realizar: ΔE_m=E_{mo}-E_{mT}=-2,98·10^{10}-(-6,24·10^{10})=3,26·10^{10} J