PROBLEMAS RESUELTOS

SELECTIVIDAD ANDALUCÍA

2014

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES

TEMA 4: FUNCIONES

- Junio, Ejercicio 2, Opción A
- Junio, Ejercicio 2, Opción B
- Reserva 1, Ejercicio 2, Opción A
- Reserva 1, Ejercicio 2, Opción B
- Reserva 2, Ejercicio 2, Opción A
- Reserva 2, Ejercicio 2, Opción B
- Reserva 3, Ejercicio 2, Opción A
- Reserva 3, Ejercicio 2, Opción B
- Reserva 4, Ejercicio 2, Opción A
- Reserva 4, Ejercicio 2, Opción B
- Septiembre, Ejercicio 2, Opción A
- Septiembre, Ejercicio 2, Opción B

La función de beneficios *f*, en miles de euros, de una empresa depende de la cantidad invertida *x*, en miles de euros, en un determinado proyecto de innovación y viene dada por

$$f(x) = -2x^2 + 36x + 138 \qquad x \geq 0$$

a) Determine la inversión que maximiza el beneficio de la empresa y calcule dicho beneficio óptimo.

b) Calcule $f'(7)$ e interprete el signo del resultado.

c) Dibuje la función de beneficios $f(x)$. ¿Para qué valor o valores de la inversión, *x*, el beneficio es de 138 mil euros?.

SOCIALES II. 2014. JUNIO. EJERCICIO 2. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos la primera derivada y la igualamos a cero: $f'(x) = -4x + 36 = 0 \Rightarrow x = 9$

	$(0,9)$	$(9,+\infty)$
Signo $f'(x)$	$+$	$-$
Función	C	D

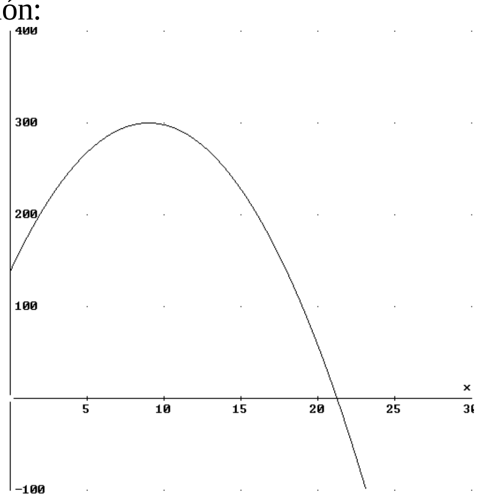
La función es creciente en el intervalo: $(0,9)$ y decreciente en el intervalo: $(9,+\infty)$.

Tiene un máximo relativo en el punto $(9,300)$

Luego, la inversión que maximiza el beneficio es $x = 9$ mil € y el beneficio óptimo es $f(9) = 300$ mil €.

b) $f'(7) = -4 \cdot 7 + 36 = 8 > 0$. Al ser positivo el valor de la derivada de esta función en ese punto, nos indica que la función es creciente en dicho punto.

c) Hacemos el dibujo de la función:



Calculamos para que valores de *x* el beneficio es de 138 mil €.

$$f(x) = -2x^2 + 36x + 138 = 138 \Rightarrow -2x^2 + 36x = 0 \Rightarrow x = 0 \;\; ; \;\; x = 18$$

Luego, se obtiene un beneficio de 138 mil € con una inversión de 0 mil € y 18 mil €.

Sea la función *f* definida por $f(x)=\begin{cases} -bx^2-bx+a & si \quad x\le 2 \\ \dfrac{60}{x} & si \quad x>2 \end{cases}$

a) Obtenga los valores de *a* y *b* para que la función sea continua y derivable.
b) Para $a=48$ y $b=3$, estudie la monotonía de $f(x)$ y calcule sus extremos.
SOCIALES II. 2014. JUNIO. EJERCICIO 2. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

a) La función polinómica $-bx^2-bx+a$ es continua y derivable en $\mathbb{R}$. La función racional $\dfrac{60}{x}$ es continua y derivable en $\mathbb{R}-\{0\}$. Por lo tanto, sólo debemos estudiar la continuidad y derivabilidad en $x=2$.

Estudiamos la continuidad en $x=2$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 2^-} -bx^2-bx+a=-4b-2b+a=-6b+a \\ \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{60}{x}=30 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^+} f(x) \Rightarrow -6b+a=30$$

Estudiamos la derivabilidad en $x=2$

Calculamos la función derivada: $f'(x)=\begin{cases} -2bx-b & si \quad x\le 2 \\ -\dfrac{60}{x^2} & si \quad x>2 \end{cases}$

$$\left.\begin{array}{l} f'(2^-)=-4b-b=-5b \\ f'(2^+)=-\dfrac{60}{4}=-15 \end{array}\right\} \Rightarrow f'(2^-)=f'(2^+) \Rightarrow -5b=-15$$

Resolviendo el sistema formado por las dos ecuaciones obtenidas, tenemos que: $a=48$ y $b=3$

b) Calculamos la función derivada y la igualamos a cero: $f'(x)=\begin{cases} -6x-3 & si \quad x\le 2 \\ -\dfrac{60}{x^2} & si \quad x>2 \end{cases}$

$$-6x-3=0 \Rightarrow x=-\frac{1}{2}$$

	$\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)$	$\left(-\frac{1}{2},2\right)$	$(2,+\infty)$
Signo $f'(x)$	+	−	−
Función	C	D	D

La función es creciente en el intervalo: $\left(-\infty,-\dfrac{1}{2}\right)$ y decreciente en el intervalo: $\left(-\dfrac{1}{2},+\infty\right)$.

Tiene un máximo relativo en el punto $\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{195}{4}\right)$

Sea la función $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$.
a) Estudie la monotonía de *f* y halle los extremos relativos que posea.
b) Estudie su curvatura y calcule su punto de inflexión.
c) Represente la gráfica de la función *f*.
SOCIALES II. 2014. RESERVA 1. EJERCICIO 2. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos la primera derivada y la igualamos a cero: $f'(x) = 3x^2 - 6x + 3 = 0 \Rightarrow x = 1$

	$(-\infty,1)$	$(1,+\infty)$
Signo $f'(x)$	+	+
Función	C	C

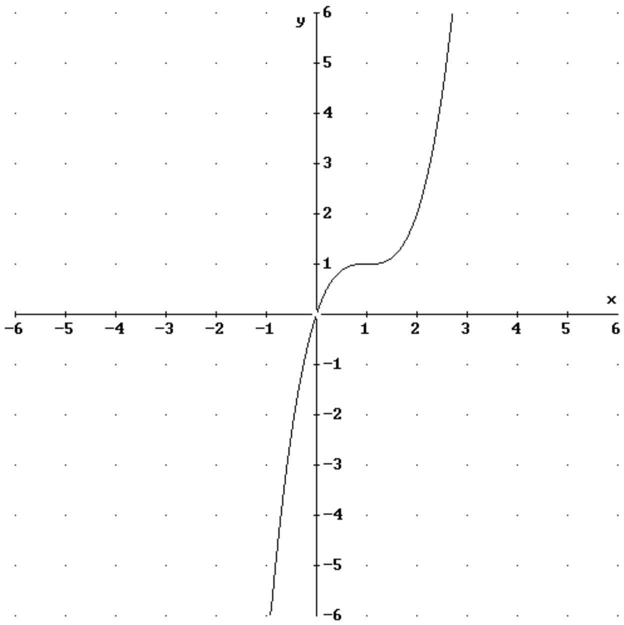
La función es creciente en el intervalo: $(-\infty,1) \cup (1,+\infty)$. Por lo tanto, la función no tiene ni máximos ni mínimos relativos.

b) Calculamos la segunda derivada y la igualamos a cero: $f''(x) = 6x - 6 = 0 \Rightarrow x = 1$

	$(-\infty,1)$	$(1,+\infty)$
Signo $f''(x)$	$-$	+
Función	Cn	Cx

La función es cóncava en el intervalo: $(-\infty,1)$ y convexa en el intervalo $(1,+\infty)$. Por lo tanto, tiene un punto de inflexión en $(1,1)$.

c) Hacemos el dibujo de la función:



Sea la función $f(x)=\begin{cases}(x+1)^2 & si \quad x\le 1\\ \dfrac{4}{x} & si \quad x>1\end{cases}$

a) Estudie la continuidad y derivabilidad de la función en su dominio
b) Determine sus asíntotas, en caso de que existan.
c) Calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica de *f* en el punto de abscisa $x=2$**.**
SOCIALES II. 2014. RESERVA 1. EJERCICIO 2. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

a) La función racional $\frac{4}{x}$ es continua y derivable en $\mathbb{R}-\{0\}$. La función polinómica $(x+1)^2$ es continua y derivable en $\mathbb{R}$.Por lo tanto, solo tenemos que estudiar la continuidad y la derivabilidad en $x=1$.

Estudiamos la continuidad en $x=1$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1^-}(x+1)^2=4\\ \lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{4}{x}=4\end{array}\right\}\Rightarrow \lim_{x\to 1^-}f(x)=\lim_{x\to 1^+}f(x)=f(1)\Rightarrow \text{Es continua en } x=1$$

Estudiamos la derivabilidad en $x=1$

Calculamos la función derivada: $f'(x)=\begin{cases}2(x+1) & si \quad x<1\\ -\dfrac{4}{x^2} & si \quad x>1\end{cases}$ y como:

$$\left.\begin{array}{l}f'(1^-)=4\\ f'(1^+)=-4\end{array}\right\}\Rightarrow f'(1^-)\ne f'(1^+)\Rightarrow \text{ No es derivable en } x=1$$

Por lo tanto, la función es continua en $\mathbb{R}$ y derivable en $\mathbb{R}-\{1\}$.

b) La función polinómica $(x+1)^2$ no tiene asíntotas. La función racional $\frac{4}{x}$ tiene una asíntota vertical en $x=0$, pero no está en su dominio. Además tiene una asíntota horizontal $y=0$, ya que:

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{4}{x}=\frac{4}{\infty}=0$$

c) La recta tangente en $x=2$, es: $y-f(2)=f'(2)\cdot(x-2)$.

- $f(2)=2$
- $f'(2)=-1$

Sustituyendo, tenemos: $y-2=-1\cdot(x-2)\Rightarrow y=-x+4$

Sea la función $f(x) = -2x^3 + a \cdot e^{-x} + bx - 1$

a) Halle los valores de *a* y *b* sabiendo que la función tiene un mínimo en $x = 0$ y que la gráfica de la función pasa por el punto (0, 0).

b) Para $a = 0$ y $b = 1$, determine la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa $x = -1$.

SOCIALES II. 2014. RESERVA 2. EJERCICIO 2. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos la derivada de $f(x) = -2x^3 + a \cdot e^{-x} + bx - 1$.

$$f'(x) = -6x^2 - a \cdot e^{-x} + b$$

Pasa por $(0,0) \Rightarrow f(0) = 0 \Rightarrow a - 1 = 0$

Mínimo en $x = 0 \Rightarrow f'(0) = 0 \Rightarrow -a + b = 0$

Resolviendo el sistema formado por las dos ecuaciones sale: $a = 1$; $b = 1$

b) La recta tangente en $x = -1$ es $y - f(-1) = f'(-1) \cdot (x+1)$

$$f(-1) = 0$$
$$f'(-1) = -5$$

Sustituyendo en la ecuación, tenemos, $y - 0 = -5 \cdot (x+1) \Rightarrow y = -5x - 5$

Sea la función f, definida por $f(x)=\begin{cases} x^2-ax+5 & si \quad x<0 \\ -x^2+b & si \quad x\geq 0 \end{cases}$.

Determine los valores que han de tomar a y b para que la función f sea derivable en $x=0$

SOCIALES II. 2014. RESERVA 2. EJERCICIO 2. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

Como la función es derivable en $x=0$, tiene que ser continua en ese punto, luego:

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 0^-} (x^2-ax+5)=5 \\ \lim_{x\to 0^+} (-x^2+b)=b \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^+} f(x)=f(0) \Rightarrow b=5$$

Calculamos la función derivada: $f'(x)=\begin{cases} 2x-a & si \quad x<0 \\ -2x & si \quad x\geq 0 \end{cases}$

Como la función es derivable en $x=0$,

$$\left.\begin{array}{l} f'(0^-)=-a \\ f'(0^+)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow f'(0^-)=f'(0^+) \Rightarrow a=0$$

Luego, los valores son: $a=0$; $b=5$

Sea la función dada por $f(x)=\begin{cases} x^2+ax & si \quad x\le 2 \\ \dfrac{x+b}{x-1} & si \quad x>2 \end{cases}$.

a) Determine los valores de *a* y *b*, sabiendo que dicha función es derivable.

b) Para $a=2$ y $b=3$, determine la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función *f* en el punto de abscisa $x=1$.

SOCIALES II. 2014. RESERVA 3. EJERCICIO 2. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

a) La función racional $\dfrac{x+b}{x-1}$ es continua y derivable en $\mathbb{R}-\{1\}$. La función polinómica x^2+ax es continua y derivable en $\mathbb{R}$. Por lo tanto, solo tenemos que estudiar la continuidad y la derivabilidad en $x=2$.

Estudiamos la continuidad en $x=2$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 2^-}(x^2+ax)=4+2a \\ \lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{x+b}{x-1}=2+b \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^+} f(x)=f(2)\Rightarrow 4+2a=2+b\Rightarrow 2a-b=-2$$

Estudiamos la derivabilidad en $x=2$

Calculamos la función derivada: $f'(x)=\begin{cases} 2x+a & si \quad x\le 2 \\ \dfrac{-1-b}{(x-1)^2} & si \quad x>2 \end{cases}$ y como es derivable, entonces:

$$\left.\begin{array}{l} f'(2^-)=4+a \\ f'(2^+)=-1-b \end{array}\right\} \Rightarrow f'(2^-)=f'(2^+)\Rightarrow 4+a=-1-b\Rightarrow a+b=-5$$

Resolviendo el sistema formado por las dos ecuaciones, tenemos que: $a=-\dfrac{7}{3}$; $b=-\dfrac{8}{3}$

b) La recta tangente en $x=1$, es: $y-f(1)=f'(1)\cdot(x-1)$.

- $f(1)=3$
- $f'(x)=2x+2\Rightarrow f'(1)=4$

Sustituyendo, tenemos: $y-3=4\cdot(x-1)\Rightarrow y=4x-1$

El porcentaje de personas que sintonizan un programa de radio que se emite entre las 6 y las 12 horas viene dado, según la hora *t*, mediante la función

$$S(t) = 660 - 231t + 27t^2 - t^3 \qquad 6 \le t \le 12$$

a) ¿Qué porcentaje de personas sintonizan el programa al comenzar la emisión? ¿Y al cierre?
b) ¿A qué hora tiene máxima y mínima audiencia? ¿Qué porcentaje de personas sintonizan el programa a dichas horas?
SOCIALES II. 2014. RESERVA 3. EJERCICIO 2. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

a) $S(6) = 660 - 231 \cdot 6 + 27 \cdot 6^2 - 6^3 = 30$. Luego, sintonizan un 30 % de personas al comenzar la emisión.

$S(12) = 660 - 231 \cdot 12 + 27 \cdot 12^2 - 12^3 = 48$. Luego, sintonizan un 48 % de personas al cierre de la emisión.

b) Calculamos la derivada de la función y la igualamos a cero.

$$S'(t) = -231 + 54t - 3t^2 = 0 \Rightarrow t = 7 \ ; \ t = 11$$

Calculamos los valores de $S(t)$, para 6,7,11 y 12.

$$S(6) = 30 \ ; \ S(7) = 23 \ ; \ S(11) = 55 \ ; \ S(12) = 48$$

Luego, vemos que el máximo de audiencia es del 55% y se alcanza a las 11 horas. El mínimo de audiencia es del 23% y se alcanza a las 7 horas.

Sean las funciones: $f(x)=(2x^2-1)^3\ln(x^4)$ **y** $g(x)=\dfrac{e^{-2x+x^2}}{x^2+1}$

Determine el valor de $f'(-1)$ **y de** $g'(0)$

SOCIALES II. 2014 RESERVA 4. EJERCICIO 2. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

$$f'(x)=3\cdot(2x^2-1)^2\cdot 4x\cdot\ln(x^4)+\frac{4x^3}{x^4}\cdot(2x^2-1)^3 \Rightarrow f'(-1)=0+\frac{-4}{1}\cdot 1^3=-4$$

$$g'(x)=\frac{(-2+2x)\cdot e^{-2x+x^2}\cdot(x^2+1)-2x\cdot e^{-2x+x^2}}{(x^2+1)^2} \Rightarrow g'(0)=\frac{-2\cdot 1}{1}=-2$$

Represente gráficamente la función $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x$, estudiando previamente su dominio, puntos de corte con los ejes, intervalos de monotonía, extremos, intervalos de concavidad y convexidad y puntos de inflexión.
SOCIALES II. 2014. RESERVA 4. EJERCICIO 2. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

Dominio: como es una función polinómica su dominio es $\mathbb{R}$.

Corte con el eje X: $y = 0 \Rightarrow x^3 - 6x^2 + 12x = 0 \Rightarrow x = 0$. Luego, corta en el punto $(0,0)$.

Corte con el eje Y: $x = 0 \Rightarrow y = 0$. Luego, corta en el punto $(0,0)$.

Calculamos la primera derivada y la igualamos a cero: $f'(x) = 3x^2 - 12x + 12 = 0 \Rightarrow x = 2$

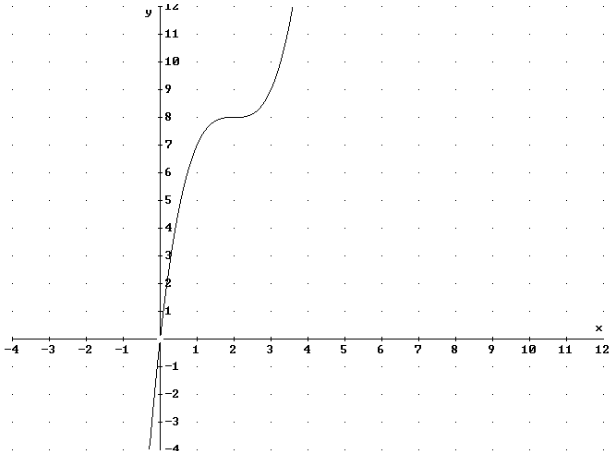
	$(-\infty, 2)$	$(2, +\infty)$
Signo $f'(x)$	+	+
Función	C	C

La función es creciente en el intervalo: $(-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$. Por lo tanto, la función no tiene ni máximos ni mínimos relativos.

Calculamos la segunda derivada y la igualamos a cero: $f''(x) = 6x - 12 = 0 \Rightarrow x = 2$

	$(-\infty, 2)$	$(2, +\infty)$
Signo $f''(x)$	$-$	+
Función	Cn	Cx

La función es cóncava en el intervalo: $(-\infty, 2)$ y convexa en el intervalo $(2, +\infty)$. Por lo tanto, tiene un punto de inflexión en $(2,8)$.
Hacemos el dibujo de la función:



Una empresa ha realizado un estudio sobre los beneficios, en miles de euros, que ha obtenido en los últimos 10 años. La función a la que se ajustan dichos beneficios viene dada por $B(t)=2t^3-36t^2+162t-6$, con $0\leq t\leq 10$.
a) ¿Qué beneficios obtuvo al inicio del periodo $(t=0)$ y al final del décimo año $(t=10)$.
b) ¿En qué momentos se obtiene el máximo y el mínimo beneficio y cuáles fueron sus cuantías?
SOCIALES II. 2014. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 2. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

a) $B(0)=-6$. Luego, para $t=0$ ha tenido unas pérdidas de 6.000 €.
$B(10)=14$. Luego, para $t=10$ ha tenido unas ganancias de 14.000 €.

b) Calculamos la derivada de la función y la igualamos a cero.

$$B'(t)=6t^2-72t+162=0\Rightarrow t=3\ ;\ t=9$$

Calculamos los valores de $B(t)$, para 0,3,9 y 10.

$$B(0)=-6\ ;\ B(3)=210\ ;\ B(9)=-6\ ;\ B(10)=14$$

Luego, vemos que el máximo beneficio es de 210.000 € y se alcanza para $t=3$. El mínimo beneficio es de -6.000 € y se alcanza para $t=0$ y $t=9$.

Sea la función $f(x)=-x^2+px+q$
a) Calcule los valores que deben tener p y q para que la gráfica de la función f pase por el punto $(-4,-5)$ y presente un máximo en el punto de abscisa $x=-1$. Determine el valor de $f(x)$ en ese punto.
b) Represente la gráfica de f para $p=2$ y $q=-1$ y halle la ecuación de la recta tangente a esta gráfica en el punto de abscisa $x=-2$.
SOCIALES II. 2014. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 2. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos la derivada de la función: $f'(x)=-2x+p$ y aplicamos los datos del problema:

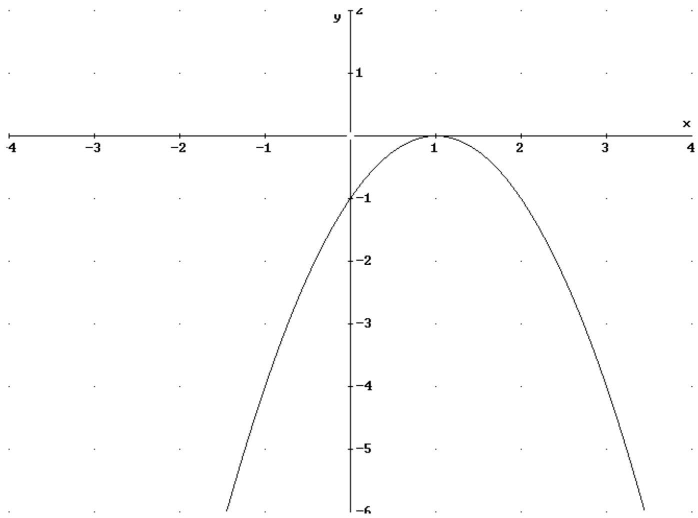
- Pasa por $(-4,-5)\Rightarrow -5=-16-4p+q\Rightarrow 4p-q=-11$

- Máximo en $x=-1\Rightarrow f'(-1)=0\Rightarrow 2+p=0\Rightarrow p=-2$

Sustituyendo en la otra ecuación tenemos que: $-8-q=-11\Rightarrow q=3$

El valor de $f(x)$ en ese punto es: $f(-1)=-(-1)^2-2\cdot(-1)+3=4$

b) Representamos la función para $p=2$ y $q=-1$.



Calculamos la recta tangente en $x=-2$

$f(-2)=-(-2)^2+2\cdot(-2)-1=-9$
$f'(x)=-2x+2\Rightarrow f'(-2)=-2\cdot(-2)+2=6$

$$y-f(-2)=f'(-2)\cdot(x+2)\Rightarrow y+9=6(x+2)\Rightarrow y=6x+3$$