El número de días de permanencia de los enfermos en un hospital sigue una ley Normal de media μ días y desviación típica 3 días.

a) Determine un intervalo de confianza para estimar μ, a un nivel del 97%, con una muestra aleatoria de 100 enfermos cuya media es 8'1 días.

b) ¿Qué tamaño mínimo debe tener una muestra aleatoria para poder estimar μ con un error máximo de 1 día y un nivel de confianza del 92 %?.

SOCIALES II. 2008 JUNIO. EJERCICIO 3 PARTE II OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

a) La distribución de las medias muestrales es: $N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = N\left(8'1, \frac{3}{\sqrt{100}}\right) = N(8'1, 0'3)$

Como el nivel de confianza es del 97%, podemos calcular $z_{\frac{\alpha}{2}}$

$$\frac{1+0'97}{2} = 0'985 \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 2'17$$

Aplicando la fórmula, tenemos:

$$I.C. = (8'1 \pm 2'17 \cdot 0'3) = (7'499; 8'751)$$

b) $\frac{1+0'92}{2} = 0'96 \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 1'76$

$$E = 1 = 1'76 \cdot \frac{3}{\sqrt{n}} \Rightarrow n = \left(\frac{1'76 \cdot 3}{1}\right)^2 = 27'87 \simeq 28$$

Sea la población $\{1,2,3,4\}$.
a) Construya todas las muestras posibles de tamaño 2, mediante muestreo aleatorio simple.
b) Calcule la varianza de las medias muestrales.
SOCIALES II. 2008 JUNIO. EJERCICIO 3 PARTE II OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

a) Escribimos todas las muestras posibles de tamaño 2.

(1,1) (1,2) (1,3) (1,4)
(2,1) (2,2) (2,3) (2,4)
(3,1) (3,2) (3,3) (3,4)
(4,1) (4,2) (4,3) (4,4)

b) Construimos la tabla para las medias muestrales:

x	f	$x \cdot f$	$x^2 \cdot f$
1	1	1	1
1'5	2	3	4,5
2	3	6	12
2'5	4	10	25
3	3	9	27
3'5	2	7	24'5
4	1	4	16
	16	40	110

Media = $\mu = \dfrac{\sum x_i f_i}{\sum f_i} = \dfrac{40}{16} = 2'5$

Varianza = $\sigma^2 = \dfrac{\sum x_i^2 f_i}{\sum f_i} - \overline{x}^2 = \dfrac{110}{16} - 2'5^2 = 0'625$

Se desea estimar la proporción de individuos zurdos en una determinada ciudad. Para ello se toma una muestra aleatoria de 300 individuos resultando que 45 de ellos son zurdos.
a) Calcule, usando un nivel de confianza del 97%, el correspondiente intervalo de confianza para la proporción de individuos zurdos de la población.
b) ¿Sería mayor o menor el error de estimación si se usara un nivel de confianza del 95%? Razone la respuesta.
SOCIALES II. 2008 RESERVA 1. EJERCICIO 3. PARTE II. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

a) El intervalo de confianza para la proporción viene dado por:

$$I.C.\left(p - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p\cdot(1-p)}{n}}\ , p + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p\cdot(1-p)}{n}}\right)$$

Con los datos del problema calculamos:

$$p = \frac{45}{300} = 0'15$$

$$\frac{1+0'97}{2} = 0'985 \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 2'17$$

Luego, sustituyendo, tenemos:

$$I.C.\left(0'15 - 2'17\cdot\sqrt{\frac{0'15\cdot 0'85}{300}}\ ,0'15 + 2'17\cdot\sqrt{\frac{0'15\cdot 0'85}{300}}\right) = (0'15 \mp 0'0447) = (0'1053;0'1947)$$

b) $\frac{1+0'95}{2} = 0'975 \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 1'96$

$$E = 1'96\cdot\sqrt{\frac{0'15\cdot 0'85}{300}} = 0'0404 \Rightarrow \text{menor}$$

Una variable aleatoria sigue una ley Normal con desviación típica 6. ¿De qué tamaño, como mínimo, se debe elegir una muestra que nos permita estimar la media de esa variable con un error máximo de 2 y una confianza del 99%?
SOCIALES II. 2008 RESERVA 1. EJERCICIO 3. PARTE II. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

$$\frac{1+0'99}{2} = 0'995 \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 2'575$$

$$E = 2 = 2'575 \cdot \frac{6}{\sqrt{n}} \Rightarrow n = \left(\frac{2'575 \cdot 6}{2}\right)^2 = 59'67 \simeq 60$$

Tomada al azar una muestra de 90 alumnos de un Instituto se encontró que un tercio habla inglés.
Halle, con un nivel de confianza del 97%, un intervalo de confianza para estimar la proporción de alumnos de ese Instituto que habla inglés.
SOCIALES II. 2008 RESERVA 2. EJERCICIO 3. PARTE II. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

El intervalo de confianza para la proporción viene dado por:

$$I.C.\left(p - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p\cdot(1-p)}{n}}\,,\, p + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p\cdot(1-p)}{n}}\right)$$

Con los datos del problema calculamos:

$$p = \frac{1}{3}$$

$$\frac{1+0'97}{2} = 0'985 \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 2'17$$

Luego, sustituyendo, tenemos:

$$I.C.\left(\frac{1}{3} - 2'17 \cdot \sqrt{\frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}}{90}}\,,\, \frac{1}{3} + 2'17 \cdot \sqrt{\frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}}{90}}\right) = (\frac{1}{3} \mp 0'1078) = (0'2255; 0'4411)$$

El tiempo de utilización diaria de ordenador entre los empleados de una empresa sigue una distribución Normal de media μ y desviación típica 1’2 horas.
a) Una muestra aleatoria de 40 empleados tiene una media del tiempo de utilización de 2’85 horas diarias. Determine un intervalo de confianza, al 96%, para la media del tiempo de utilización diaria de ordenador.
b) Calcule el tamaño mínimo que debería tener una muestra para estimar la media del tiempo de utilización diaria del ordenador con un error no superior a 0’75 horas y el mismo nivel de confianza del apartado anterior.
SOCIALES II. 2008 RESERVA 2. EJERCICIO 3. PARTE II. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

a) La distribución de las medias muestrales es: $N\left(\mu,\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)=N\left(2'85,\dfrac{1'2}{\sqrt{40}}\right)$

Como el nivel de confianza es del 96%, podemos calcular $z_{\frac{\alpha}{2}}$

$$\frac{1+0'96}{2}=0'98\Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}}=2'06$$

Aplicando la fórmula, tenemos:

$$I.C.=(2'85\pm 2'06\cdot\frac{1'2}{\sqrt{40}})=(2'85\mp 0'3908)=(2'4592\ ;\ 3'2408)$$

b)

$$E=0'75=2'06\cdot\frac{1'2}{\sqrt{n}}\Rightarrow n=\left(\frac{2'06\cdot 1'2}{0'75}\right)^2=10'86\simeq 11$$

El peso, en kg, de los alumnos de primaria de un colegio sigue una distribución Normal de media 28 kg y desviación típica 2'7 kg. Consideremos muestras aleatorias de 9 alumnos.
a) ¿Qué distribución sigue la media de las muestras?.
b) Si elegimos, al azar, una de esas muestras, ¿cuál es la probabilidad de que su media esté comprendida entre 26 y 29 kg?
SOCIALES II. 2008. RESERVA 3. EJERCICIO 3. PARTE II. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

a) La distribución de las medias muestrales es: $N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = N\left(28, \frac{2'7}{\sqrt{9}}\right) = N(28, 0'9)$

b)

$$p(26 < x < 29) = p\left(\frac{26-28}{0'9} < z < \frac{29-28}{0'9}\right) = p(-2'22 < z < 1'11) = p(z < 1'11) - p(z < -2'22) =$$

$$= p(z < 1'11) - \left[1 - p(z - 2'22)\right] = 0'8665 - 1 + 0'9868 = 0'8533$$

En un centro de anillamiento de aves se ha detectado que en una muestra de 250 ejemplares de una especie, 60 son portadoras de una bacteria. Obtenga un intervalo de confianza, al 97%, para la proporción de aves de esa especie que son portadoras de la bacteria.
SOCIALES II. 2008. RESERVA 3. EJERCICIO 3. PARTE II. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

El intervalo de confianza para la proporción viene dado por:

$$I.C.\left(p - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot (1-p)}{n}} \, , p + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot (1-p)}{n}} \right)$$

Con los datos del problema calculamos:

$$p = \frac{60}{250} = 0'24$$

$$\frac{1+0'97}{2} = 0'985 \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 2'17$$

Luego, sustituyendo, tenemos:

$$I.C.\left(0'24 - 2'17 \cdot \sqrt{\frac{0'24 \cdot 0'76}{250}} \, , 0'24 + 2'17 \cdot \sqrt{\frac{0'24 \cdot 0'76}{250}} \right) = (0'1814 \; ; \; 0'2986)$$

En una muestra representativa de 1200 residentes de una ciudad, 450 utilizan habitualmente el transporte público. Obtenga el intervalo de confianza, al 90%, de la proporción de residentes en la ciudad que utilizan habitualmente el transporte público.
SOCIALES II. 2008. RESERVA 4. EJERCICIO 3. PARTE II. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

El intervalo de confianza para la proporción viene dado por:

$$I.C.\left(p - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p\cdot(1-p)}{n}}\, , p + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p\cdot(1-p)}{n}} \right)$$

Con los datos del problema calculamos:

$$p = \frac{450}{1200} = 0'375$$

$$\frac{1+0'90}{2} = 0'95 \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 1'645$$

Luego, sustituyendo, tenemos:

$$I.C.\left(0'375 - 1'645 \cdot \sqrt{\frac{0'375\cdot 0'625}{1200}}\, , 0'375 + 1'645 \cdot \sqrt{\frac{0'375 \cdot 0'625}{1200}} \right) = (0'3611\ ;\ 0'3889)$$

El consumo, en gramos, de un cierto producto sigue una ley Normal con varianza $225\ g^2$.
a) A partir de una muestra de tamaño 25 se ha obtenido una media muestral igual a 175 g. Halle un intervalo de confianza, al 90%, para la media del consumo.
b) ¿Cuál debe ser el tamaño mínimo de la muestra para que el correspondiente intervalo de confianza, al 95%, tenga una amplitud máxima de 5?
SOCIALES II. 2008 RESERVA 4. EJERCICIO 3. PARTE II. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

a) La distribución de las medias muestrales es: $N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = N\left(175, \frac{15}{\sqrt{25}}\right) = N(175, 3)$

Como el nivel de confianza es del 90%, podemos calcular $z_{\frac{\alpha}{2}}$

$$\frac{1+0'90}{2} = 0'95 \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 1'645$$

Aplicando la fórmula, tenemos:

$$I.C. = (175 \pm 1'645 \cdot 3) = (170'065\ ;\ 179'935)$$

b) $\frac{1+0'95}{2} = 0'975 \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 1'96$

$$E = 2'5 = 1'96 \cdot \frac{15}{\sqrt{n}} \Rightarrow n = \left(\frac{1'96 \cdot 15}{2'5}\right)^2 = 138'29 \simeq 139$$

La longitud de los cables de los auriculares que fabrica una empresa es una variable aleatoria que sigue una ley Normal con desviación típica 4'5 cm. Para estimar la longitud media se han medido los cables de una muestra aleatoria de 9 auriculares y se han obtenido las siguientes longitudes, en cm:

205, 198, 202, 204, 197, 195, 196, 201, 202

a) Halle un intervalo de confianza, al 97%, para la longitud media de los cables.

b) Determine el tamaño mínimo que debe tener una muestra de estos auriculares para que el error de estimación de la longitud media sea inferior a 1 cm, con el mismo nivel de confianza del apartado anterior.

SOCIALES II. 2008 SEPTIEMBRE. EJERCICIO 3. PARTE II. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

a) La distribución de las medias muestrales es: $N\left(\mu, \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = N\left(200, \dfrac{4'5}{\sqrt{9}}\right) = N(200, 1'5)$

Como el nivel de confianza es del 97%, podemos calcular $z_{\frac{\alpha}{2}}$

$$\frac{1+0'97}{2} = 0'985 \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 2'17$$

Aplicando la fórmula, tenemos:

$$I.C. = (200 \pm 2'17 \cdot 1'5) = (196'745; 203'255)$$

b)

$$E = 1 = 2'17 \cdot \frac{4'5}{\sqrt{n}} \Rightarrow n = \left(\frac{2'17 \cdot 4'5}{1}\right)^2 = 95'35 \simeq 96$$

Se ha aplicado un medicamento a una muestra de 200 enfermos y se ha observado una respuesta positiva en 140 de ellos. Estímese, mediante un intervalo de confianza del 99%, la proporción de enfermos que responderían positivamente si este medicamento se aplicase a la población de la que se ha extraído la muestra.
SOCIALES II. 2008 SEPTIEMBRE. EJERCICIO 3. PARTE II. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

El intervalo de confianza para la proporción viene dado por:

$$I.C.\left(p - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p\cdot(1-p)}{n}}\ , p + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p\cdot(1-p)}{n}}\right)$$

Con los datos del problema calculamos:

$$p = \frac{140}{200} = 0'7$$

$$\frac{1+0'99}{2} = 0'995 \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 2'575$$

Luego, sustituyendo, tenemos:

$$I.C.\left(0'7 - 2'575 \cdot \sqrt{\frac{0'7\cdot 0'3}{200}}\ , 0'7 + 2'575 \cdot \sqrt{\frac{0'7\cdot 0'3}{200}}\right) = (0'6166; 0'7834)$$