En una población una variable aleatoria sigue una ley Normal de media desconocida y desviación típica 2.
a) Observada una muestra de tamaño 400, tomada al azar, se ha obtenido una media muestral igual a 50. Calcule un intervalo, con el 97% de confianza, para la media de la población.
b) Con el mismo nivel de confianza, ¿qué tamaño mínimo debe tener la muestra para que la amplitud del intervalo que se obtenga sea, como máximo, 1?.
SOCIALES II. 2005 JUNIO. EJERCICIO 3 PARTE II OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

a) El intervalo de confianza de la media poblacional viene dado por: $I.C.\left(\mu - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \mu + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$

En nuestro caso, sabemos que $\mu = 50; \sigma = 2; n = 400$; y como el nivel de confianza es del 97%, podemos calcular $z_{\frac{\alpha}{2}}$

$$\frac{1+0'97}{2} = 0'985 \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 2'17$$

Luego sustituyendo los datos, tenemos:

$$I.C.\left(\mu - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \mu + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \left(50 - 2'17 \cdot \frac{2}{\sqrt{400}}, 50 + 2'17 \cdot \frac{2}{\sqrt{400}}\right) = (49'783; 50'217)$$

b) Si la amplitud máxima del intervalo es 1, eso quiere decir que el error será: $E = \frac{1}{2} = 0'5$. Aplicando la fórmula, tenemos:

$$E = 0'5 = 2'17 \cdot \frac{2}{\sqrt{n}} \Rightarrow n = 75'34 \simeq 76$$

Sea la población de elementos {22, 24, 26}
a) Escriba todas las muestras posibles de tamaño 2, escogidas mediante muestreo aleatorio simple.
b) Calcule la varianza de la población.
c) Calcule la varianza de las medias muestrales.
SOCIALES II. 2005 JUNIO. EJERCICIO 3 PARTE II OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

a)

(22,22) (22,24) (22,26)
(24,22) (24,24) (24,26)
(26,22) (26,24) (26,26)

b) Construimos la tabla para la población:

x	f	$x \cdot f$	$x^2 \cdot f$
22	1	22	484
24	1	24	576
26	1	26	676
	3	72	1736

Media $= \mu = \dfrac{\sum x_i f_i}{\sum f_i} = \dfrac{72}{3} = 24$

Varianza $= \sigma^2 = \dfrac{\sum x_i^2 f_i}{\sum f_i} - \overline{x}^2 = \dfrac{1736}{3} - 24^2 = 2'66$

c) Construimos la tabla para las medias muestrales:

x	f	$x \cdot f$	$x^2 \cdot f$
22	1	22	484
23	2	46	1058
24	3	72	1728
25	2	50	1250
26	1	26	676
	9	216	5196

Media $= \mu = \dfrac{\sum x_i f_i}{\sum f_i} = \dfrac{216}{9} = 24$

Varianza $= \sigma^2 = \dfrac{\sum x_i^2 f_i}{\sum f_i} - \overline{x}^2 = \dfrac{5196}{9} - 24^2 = 1'33$

En una población, una variable aleatoria sigue una ley Normal de media desconocida y desviación típica 3.
a) A partir de una muestra de tamaño 30 se ha obtenido una media muestral igual a 7. Halle un intervalo de confianza, al 96%, para la media de la población.
b) ¿Qué tamaño mínimo debe tener la muestra con la cual se estime la media, con un nivel de confianza del 99% y un error máximo admisible de 2?
SOCIALES II. 2005 RESERVA 1. EJERCICIO 3 PARTE II OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

a) El intervalo de confianza de la media poblacional viene dado por: $I.C.\left(\mu - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \mu + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$

En nuestro caso, sabemos que $\mu = 7; \sigma = 3; n = 30$ y como el nivel de confianza es del 96%, podemos calcular $z_{\frac{\alpha}{2}}$

$$\frac{1 + 0'96}{2} = 0'98 \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 2'055$$

Luego sustituyendo los datos, tenemos:

$$I.C.\left(\mu - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \mu + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \left(7 - 2'055 \cdot \frac{3}{\sqrt{30}}, 7 + 2'055 \cdot \frac{3}{\sqrt{30}}\right) = (5'8745; 8'1255)$$

b) Como el nivel de confianza es del 99%, podemos calcular $z_{\frac{\alpha}{2}}$

$$\frac{1 + 0'99}{2} = 0'995 \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 2'575$$

Aplicando la fórmula, tenemos:

$$E = 2 = 2'575 \cdot \frac{3}{\sqrt{n}} \Rightarrow n = 14'91 \simeq 15$$

a) En una población hay 100 personas: 60 mujeres y 40 hombres. Se desea seleccionar una muestra de tamaño 5 mediante muestreo estratificado con afijación proporcional. ¿Qué composición tendrá dicha muestra?
b) En la población formada por los números 2, 4, 6 y 8, describa las posibles muestras de tamaño 2 seleccionadas por muestreo aleatorio simple, y calcule la varianza de las medias muestrales.
SOCIALES II. 2005 RESERVA 1. EJERCICIO 3 PARTE II OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

a) Vamos a calcular la composición de la muestra.

$$\left.\begin{array}{l} 100 \to 60 \\ 5 \to x \end{array}\right\} \Rightarrow x = 3 \text{ mujeres}$$

$$\left.\begin{array}{l} 100 \to 40 \\ 5 \to x \end{array}\right\} \Rightarrow x = 2 \text{ hombres}$$

Luego la muestra estará formada por 3 mujeres y 2 hombres.

b) Escribimos todas las muestras posibles de tamaño 2.

(2,2) (2,4) (2,6) (2,8)
(4,2) (4,4) (4,6) (4,8)
(6,2) (6,4) (6,6) (6,8)
(8,2) (8,4) (8,6) (8,8)

Construimos la tabla para las medias muestrales:

x	f	$x \cdot f$	$x^2 \cdot f$
2	1	2	4
3	2	6	18
4	3	12	48
5	4	20	100
6	3	18	108
7	2	14	98
8	1	8	64
	16	80	440

$$\text{Media} = \mu = \frac{\sum x_i f_i}{\sum f_i} = \frac{80}{16} = 5$$

$$\text{Varianza} = \sigma^2 = \frac{\sum x_i^2 f_i}{\sum f_i} - \overline{x}^2 = \frac{440}{16} - 5^2 = 2'5$$

La duración de un viaje entre dos ciudades es una variable aleatoria Normal con desviación típica 0’25 horas. Cronometrados 30 viajes entre estas ciudades, se obtiene una media muestral de 3’2 horas.
a) Halle un intervalo de confianza, al 97%, para la media de la duración de los viajes entre ambas ciudades.
b) ¿Cuál es el error máximo cometido con dicha estimación?
SOCIALES II. 2005 RESERVA 2. EJERCICIO 3 PARTE II OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

a) El intervalo de confianza de la media poblacional viene dado por: $I.C.\left(\mu - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \mu + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$

En nuestro caso, sabemos que $\mu = 3'2; \sigma = 0'25; n = 30$ y como el nivel de confianza es del 97%, podemos calcular $z_{\frac{\alpha}{2}}$

$$\frac{1+0'97}{2} = 0'985 \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 2'17$$

Luego sustituyendo los datos, tenemos:

$$I.C.\left(\mu - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \mu + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \left(3'2 - 2'17 \cdot \frac{0'25}{\sqrt{30}}, 3'2 + 2'17 \cdot \frac{0'25}{\sqrt{30}}\right) = (3'101; 3'299)$$

b) Aplicando la fórmula, tenemos:

$$E = 2'17 \cdot \frac{0'25}{\sqrt{30}} = 0'099$$

Sea X una variable aleatoria Normal de media 50 y desviación típica 4.
a) Para muestras de tamaño 4, ¿cuál es la probabilidad de que la media muestral supere el valor 54?
b) Si $\overline{X}_{16}$ indica la variable aleatoria "media muestral para muestras de tamaño 16", calcule el valor de a para que $P(50-a \leq \overline{X}_{16} \leq 50+a) = 0'9876$
SOCIALES II. 2005 RESERVA 2. EJERCICIO 3 PARTE II OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

a) La distribución de las medias muestrales es: $N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = N\left(50, \frac{4}{\sqrt{4}}\right) = N(50,2)$

$$p(x>54) = p\left(z > \frac{54-50}{2}\right) = p(z>2) = 1-p(z<2) = 1-0'9772 = 0'0228$$

b) La distribución de las medias muestrales es: $N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = N\left(50, \frac{4}{\sqrt{16}}\right) = N(50,1)$

$$p(50-a<x<50+a) = p\left(\frac{50-a-50}{1} < z < \frac{50+a-50}{1}\right) = p(-a<z<a) = p(z<a)-p(z<-a) =$$
$$= p(z<a)-\left[1-p(z<a)\right] = 2p(z<a)-1 = 0'9876$$

$$2p(z<a)-1 = 0'9876 \Rightarrow p(z<a) = \frac{1'9876}{2} = 0'9938 \Rightarrow a = 2'5$$

La estatura de los soldados de un cuartel sigue una distribución Normal con desviación típica 12 cm.
a) Indique la distribución que sigue la media de la estatura de las muestras de soldados de ese cuartel, de tamaño 81.
b) Si se desea estimar la estatura media de los soldados de ese cuartel de forma que el error no sobrepase los 3 cm, ¿cuántos soldados deberán escogerse para formar parte de la muestra si se utiliza un nivel de confianza del 97%?
SOCIALES II. 2005 RESERVA 3. EJERCICIO 3 PARTE II OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

a) La distribución de las medias muestrales es: $N\left(\mu,\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)=N\left(\mu,\frac{12}{\sqrt{81}}\right)=N\left(\mu,\frac{4}{3}\right)$

b) Como el nivel de confianza es del 97%, podemos calcular $z_{\frac{\alpha}{2}}$

$$\frac{1+0'97}{2}=0'985\Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}}=2'17$$

Aplicando la fórmula, tenemos:

$$E=3=2'17\cdot\frac{12}{\sqrt{n}}\Rightarrow n=75'34\simeq 76$$

El índice de resistencia a la rotura, expresado en kg, de un determinado tipo de cuerda sigue una distribución Normal con desviación típica 15’6 kg. Con una muestra de 5 de estas cuerdas, seleccionadas al azar, se obtuvieron los siguientes índices:

280, 240, 270, 285, 270.

a) Obtenga un intervalo de confianza para la media del índice de resistencia a la rotura de este tipo de cuerdas, utilizando un nivel de confianza del 95%.

b) Si, con el mismo nivel de confianza, se desea obtener un error máximo en la estimación de la media de 5 kg, ¿será suficiente con elegir una muestra de 30 cuerdas?

SOCIALES II. 2005 RESERVA 3. EJERCICIO 3 PARTE II OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos la media que será: $\mu = \dfrac{280+240+270+285+270}{5} = 269$

El intervalo de confianza de la media poblacional viene dado por: $I.C.\left(\mu - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}, \mu + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$

En nuestro caso, sabemos que $\mu = 269; \sigma = 15'6; n = 5$ y como el nivel de confianza es del 95%, podemos calcular $z_{\frac{\alpha}{2}}$

$$\frac{1+0'95}{2} = 0'975 \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 1'96$$

Luego sustituyendo los datos, tenemos:

$$I.C.\left(\mu - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \mu + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \left(269 - 1'96 \cdot \frac{15'6}{\sqrt{5}}, 269 + 1'96 \cdot \frac{15'6}{\sqrt{5}}\right) = (255'326; 282'674)$$

b) Aplicando la fórmula, tenemos:

$$E = 5 = 1'96 \cdot \frac{15'6}{\sqrt{n}} \Rightarrow n = 37'39 \simeq 38$$

No es suficiente elegir una muestra de 30 cuerdas. Sería necesaria una muestra de 38 cuerdas.

Se supone que la puntuación obtenida por cada uno de los tiradores participantes en la sede de Gádor de los “Juegos Mediterráneos Almería 2005”, es una variable aleatoria que sigue una distribución Normal con desviación típica 6 puntos. Se toma una muestra aleatoria de tamaño 36 que da una media de 35 puntos.
a) Obtenga un intervalo, con un 95% de confianza, para la puntuación media del total de tiradores.
b) Calcule el tamaño mínimo de la muestra que se ha de tomar para estimar la puntuación media del total de tiradores, con un error inferior a 1 punto y con un nivel de confianza del 99%.
SOCIALES II. 2005 RESERVA 4. EJERCICIO 3 PARTE II OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

a) El intervalo de confianza de la media poblacional viene dado por: $I.C.\left(\mu - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \mu + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$

En nuestro caso, sabemos que $\mu = 35; \sigma = 6; n = 36$ y como el nivel de confianza es del 95%, podemos calcular $z_{\frac{\alpha}{2}}$

$$\frac{1+0'95}{2} = 0'975 \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 1'96$$

Luego sustituyendo los datos, tenemos:

$$I.C.\left(\mu - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \mu + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \left(35 - 1'96 \cdot \frac{6}{\sqrt{36}}, 35 + 1'96 \cdot \frac{6}{\sqrt{36}}\right) = (33'04; 36'96)$$

b) Como el nivel de confianza es del 99%, calculamos $z_{\frac{\alpha}{2}}$

$$\frac{1+0'99}{2} = 0'995 \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 2'575$$

Aplicando la fórmula, tenemos:

$$E = 1 = 2'575 \cdot \frac{6}{\sqrt{n}} \Rightarrow n = 238'7 \simeq 239$$

El peso de los cerdos de una granja sigue una ley Normal con desviación típica 18 kg.
a) Determine el tamaño mínimo de una muestra para obtener un intervalo de confianza, para la media de la población, de amplitud 5 kg con un nivel de confianza del 95%.
b) Si la media de los pesos de los cerdos de la granja fuera 92 kg, ¿cuál sería la probabilidad de que el peso medio de una muestra de 100 cerdos estuviese entre 88 y 92 kg?
SOCIALES II. 2005 RESERVA 4. EJERCICIO 3 PARTE II OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

a) Como el nivel de confianza es del 95%, calculamos $z_{\frac{\alpha}{2}}$

$$\frac{1+0'95}{2}=0'975\Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}}=1'96$$

Aplicando la fórmula, tenemos:

$$E=\frac{5}{2}=1'96\cdot\frac{18}{\sqrt{n}}\Rightarrow n=199'14\simeq 200$$

b) La distribución de las medias muestrales es: $N\left(\mu,\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)=N\left(92,\frac{18}{\sqrt{100}}\right)=N(92,1'8)$

$$p(88<x<92)=p\left(\frac{88-92}{1'8}<z<\frac{92-92}{1'8}\right)=p(-2'22<z<0)=p(z<0)-p(z<-2'22)=$$
$$=p(z<0)-\left[1-p(z<2'22)\right]=0'5-1+0'9868=0'4868$$

La longitud de los tornillos fabricados por una máquina sigue una ley Normal con desviación típica 0'1 cm. Se ha seleccionado una muestra aleatoria y, con una confianza del 95% se ha construido un intervalo, para la media poblacional, cuya amplitud es de 0'0784 cm.
a) ¿Cuál ha sido el tamaño de la muestra seleccionada?.
b) Determine el intervalo de confianza, si en la muestra seleccionada se ha obtenido una longitud media de 1'75 cm.
SOCIALES II. 2005 SEPTIEMBRE. EJERCICIO 3 PARTE II OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

a) Si la amplitud del intervalo es 0'0784, eso quiere decir que el error será: $E = \frac{0'0784}{2} = 0'0392$.

Como el nivel de confianza es del 95%, podemos calcular $z_{\frac{\alpha}{2}}$

$\frac{1+0'95}{2} = 0'975 \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 1'96$

Aplicando la fórmula, tenemos:

$$E = 0'0392 = 1'96 \cdot \frac{0'1}{\sqrt{n}} \Rightarrow n = 25$$

b) El intervalo de confianza de la media poblacional viene dado por: $I.C.\left(\mu - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \mu + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$

En nuestro caso, sabemos que $\mu = 1'75; \sigma = 0'1; n = 25$ y como el nivel de confianza es del 95%,

Luego sustituyendo los datos, tenemos:

$$I.C.\left(\mu - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \mu + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \left(1'75 - 1'96 \cdot \frac{0'1}{\sqrt{25}}, 1'75 + 1'96 \cdot \frac{0'1}{\sqrt{25}}\right) = (1'7108; 1'7892)$$

El número de horas semanales que los adolescentes dedican a ver la televisión se distribuye según una ley Normal de media 9 horas y desviación típica 4. Para muestras de 64 adolescentes:
a) Indique cuál es la distribución de las medias muestrales.
b) Calcule la probabilidad de que la media de una de las muestras esté comprendida entre 7'8 y 9'5 horas.
SOCIALES II. 2005 SEPTIEMBRE. EJERCICIO 3 PARTE II OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

a) La distribución de las medias muestrales es: $N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = N\left(9, \frac{4}{\sqrt{64}}\right) = N(9, 0'5)$

b)

$$p(7'8 < x < 9'5) = p\left(\frac{7'8-9}{0'5} < z < \frac{9'5-9}{0'5}\right) = p(-2'4 < z < 1) = p(z < 1) - p(z < -2'4) =$$
$$= p(z < 1) - \left[1 - p(z < 2'4)\right] = 0'8413 - 1 + 0'9918 = 0'8331$$