Sea la función $f(x)=\begin{cases} \mathbf{2^x} & \textbf{si} \quad x<1 \\ \dfrac{\mathbf{2}}{x} & \textbf{si} \quad x\geq 1 \end{cases}$

a) Estudie la continuidad y la derivabilidad de *f*.
b) Calcule sus asíntotas.
c) Determine la ecuación de la recta tangente a la gráfica de *f* en el punto de abscisa $x=2$
SOCIALES II. 2005. JUNIO. EJERCICIO 2. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

a) La función 2^x es continua y derivable para $x<1$; la función $\dfrac{2}{x}$ es, también, continua y derivable para $x>1$. Vamos a estudiar si la función $f(x)$ es continua y derivable en $x=1$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1^-} 2^x = 2 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{2}{x} = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow f(1)=\lim_{x\to 1} f(x)=2 \Rightarrow \text{Continua en } x=1$$

Calculamos la función derivada: $f'(x)=\begin{cases} 2^x\cdot \ln 2 & si \quad x<1 \\ -\dfrac{2}{x^2} & si \quad x>1 \end{cases}$ y como:

$$\left.\begin{array}{l} f'(1^-)=2\cdot\ln 2 \\ f'(1^+)=-2 \end{array}\right\} \Rightarrow f'(1^-)\neq f'(1^+) \Rightarrow \text{No derivable en } x=1$$

Luego la función *f(x)* es continua en $\mathbb{R}$ y derivable en $\mathbb{R}-\{1\}$

b) La función *f(x)* no tiene asíntota vertical.

Vamos a ver si tiene asíntota horizontal

$$\lim_{x\to -\infty} 2^x = 2^{-\infty} = \frac{1}{2^\infty} = \frac{1}{\infty} = 0 \Rightarrow y=0 \text{ es asíntota horizontal}$$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{2}{x} = \frac{2}{\infty} = 0 \Rightarrow y=0 \text{ es asíntota horizontal}$$

Por lo tanto, la asíntota horizontal es $y=0$.
Como tiene asíntota horizontal, no puede tener asíntota oblicua.

c) La recta tangente en $x=2$ es $y-f(2)=f'(2)\cdot(x-2)$

$$f(2)=\frac{2}{2}=1$$

$$f'(x)=-\frac{2}{x^2} \Rightarrow f'(2)=-\frac{2}{4}=-\frac{1}{2}$$

Sustituyendo en la ecuación, tenemos, $y-1=-\dfrac{1}{2}\cdot(x-2) \Rightarrow y=-\dfrac{1}{2}x+2$

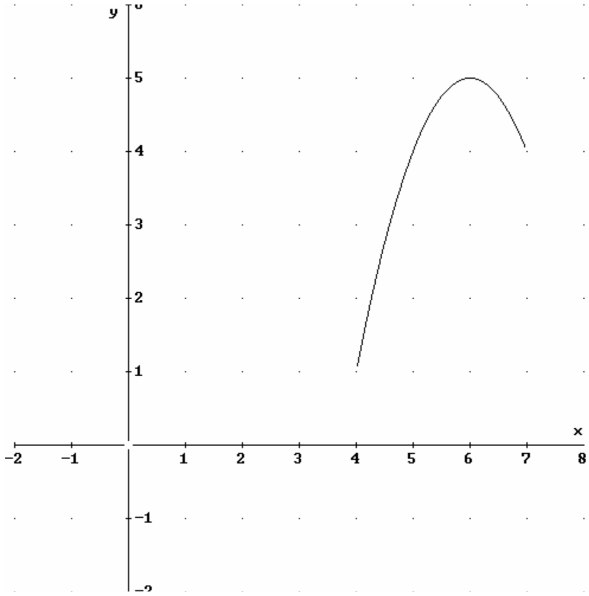
El beneficio, en millones de euros, de una empresa en función del tiempo t, en años, viene dado por:

$$f(t) = -t^2 + 12t - 31 \qquad 4 \le t \le 7$$

a) Represente la gráfica de la función *f*.
b) ¿Para qué valor de *t* alcanza la empresa su beneficio máximo y a cuánto asciende?. ¿Para qué valor de *t* alcanza su beneficio mínimo y cuál es éste?.
SOCIALES II. 2005. JUNIO. EJERCICIO 2. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

a) Representamos la parábola en el intervalo $[4,7]$



b) Calculamos la derivada de la función:

$$f'(t) = -2t + 12 \; ; \; f'(t) = 0 \Rightarrow -2t + 12 = 0 \Rightarrow t = 6$$

	(4,6)	(6,7)
Signo $f'(t)$	+	–
Función $f(t)$	C	D

↓
Máximo (6,5)

Luego, el máximo está en $x = 6$ y es 5 millones de € y el mínimo en $x = 4$ y es 1 millón de €

Halle $f'(2)$; $g'(4)$ y $h'(0)$ para las funciones definidas de la siguiente forma:

$$f(x)=x^2+\frac{16}{x^2} \;\; ; \;\; g(x)=(x^2+9)^3 \;\; ; \;\; h(x)=L(x^2+1)$$

SOCIALES II. 2005. RESERVA 3. EJERCICIO 2. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

$$f'(x)=2x-\frac{32}{x^3}\Rightarrow f'(2)=4-\frac{32}{8}=0$$

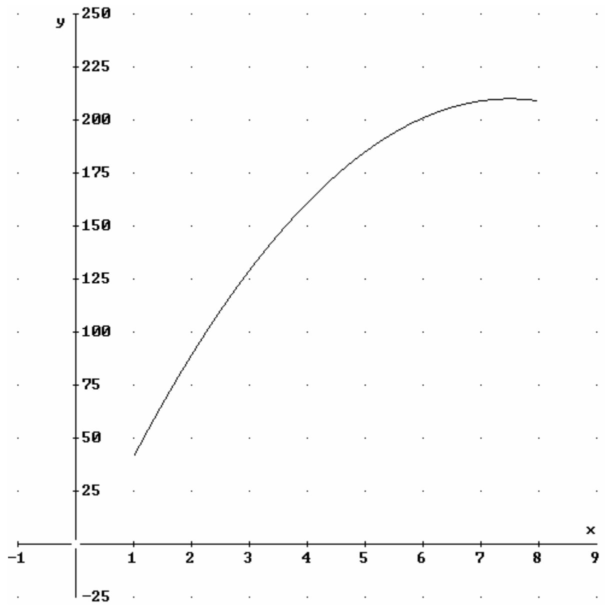
$$g'(x)=3\cdot(x^2+9)^2\cdot 2x\Rightarrow g'(4)=3\cdot 25^2\cdot 8=15.000$$

$$h'(x)=\frac{2x}{x^2+1}\Rightarrow h'(0)=\frac{0}{1}=0$$

El valor, en miles de euros, de las existencias de una empresa en función del tiempo *t*, en años, viene dado por la función: $f(t) = -4t^2 + 60t - 15 \qquad 1 \leq t \leq 8$
a) ¿Cuál será el valor de las existencias para $t = 2$? ¿Y para $t = 4$?.
b) ¿Cuál es el valor máximo de las existencias? ¿En que instante se alcanza?.
c) ¿En qué instante el valor de las existencias es de 185 miles de euros?
SOCIALES II. 2005 SEPTIEMBRE. EJERCICIO 2. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

a)



a)

$$t = 2 \Rightarrow f(2) = -4 \cdot 2^2 + 60 \cdot 2 - 15 = 89.000$$

$$t = 4 \Rightarrow f(2) = -4 \cdot 4^2 + 60 \cdot 4 - 15 = 161.000$$

b)

$$f'(t) = -8t + 60 = 0 \Rightarrow t = 7'5 \Rightarrow f(7'5) = 210.000$$

c)

$$185 = -4 \cdot t^2 + 60 \cdot t - 15 \Rightarrow 4t^2 - 60t + 200 = 0 \Rightarrow t = 5$$