Sean las matrices $M=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$ y $N=\begin{pmatrix}4 & 3\\ 2 & 1\end{pmatrix}$

a) Calcule la matriz $A=M\cdot M^t-5M$ (M^t indica la traspuesta de M).

b) Calcule la matriz $B=M^{-1}$ y resuelva la ecuación $N+X\cdot M=M\cdot B$, donde X es una matriz 2x2.

SOCIALES II. 2003. JUNIO. EJERCICIO 1. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

a)

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}5 & 10\\ 15 & 20\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 11\\ 11 & 25\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}5 & 10\\ 15 & 20\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -4 & 5\end{pmatrix}$$

b)

$$B=M^{-1}=\frac{(M^d)^t}{|M|}=\frac{\begin{pmatrix}4 & -3\\ -2 & 1\end{pmatrix}^t}{-2}=\frac{\begin{pmatrix}4 & -2\\ -3 & 1\end{pmatrix}}{-2}=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

$$N+X\cdot M=M\cdot B\Rightarrow X=(M\cdot B-N)\cdot M^{-1}=(I-N)\cdot M^{-1}=\left[\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}4 & 3\\ 2 & 1\end{pmatrix}\right]\cdot\begin{pmatrix}-2 & 1\\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-3 & -3\\ -2 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2 & 1\\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{3}{2} & -\frac{3}{2}\\ 4 & -2\end{pmatrix}$$

Sea la matriz $A=\begin{pmatrix} \mathbf{3} & \boldsymbol{m} \\ \mathbf{1}-\boldsymbol{m} & \boldsymbol{m}+\mathbf{1} \end{pmatrix}$

a) Calcule los valores de *m* para que dicha matriz tenga inversa.

b) Haciendo *m* = 0, resuelva la ecuación matricial $A\cdot X\cdot A=I_2$**, donde** I_2 **es la matriz unidad de orden 2 y *X* es una matriz cuadrada de orden 2.**

SOCIALES II. 2003 RESERVA 1. EJERCICIO 1. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos el determinante de *A*.

$$|A|=\begin{vmatrix} 3 & m \\ 1-m & m+1 \end{vmatrix}=3m+3-m+m^2=m^2+2m+3=0\Rightarrow \text{ No tiene solución.}$$

Luego, la matriz *A* tiene inversa para todos los valores de *m*.

b)

$$A^{-1}=\frac{(A^d)^t}{|A|}=\frac{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^t}{3}=\frac{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}}{3}=\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix}$$

$$A\cdot X\cdot A=I_2\Rightarrow X=A^{-1}\cdot I_2\cdot A^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{9} & 0 \\ -\frac{4}{9} & 1 \end{pmatrix}$$

Determine la matriz *X*, de orden 2, que verifica la igualdad:

$$X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 7 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

SOCIALES II. 2003 RESERVA 2. EJERCICIO 1. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

$$X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 7 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 7 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 10 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a & 3a+b \\ c & 3c+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 17 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ 3a+b = 17 \\ c = -1 \\ 3c+d = 3 \end{cases} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 1 & 14 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$$

Sean las matrices $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ **y** $B=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$**. Calcule** $\left(A^t \cdot B - 2 \cdot I\right)^{-1}$**.**

SOCIALES II. 2003 RESERVA 3. EJERCICIO 1. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

$$M = A^t \cdot B - 2I = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Vamos a calcular la inversa de esta matriz *M*.

$$M^{-1} = \frac{(M^d)^t}{|M|} = \frac{\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}^t}{2} = \frac{\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}{2} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Resuelva la ecuación: $\begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{-5} \\ \mathbf{4} & \mathbf{2+x} & \mathbf{x} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{1} & \mathbf{-3} \end{vmatrix} = \mathbf{0}$

SOCIALES II. 2003 RESERVA 4. EJERCICIO 1. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 4 & 2+x & x \\ -1 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -6-3x-3x-20-10-5x+36-x=0 \Rightarrow -12x=0 \Rightarrow x=0$$

Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & x \\ 0 & x+2 \end{pmatrix}$

a) Halle los valores de x para los que se verifica $A^2 = 2A$

b) Para $x = -1$, halle A^{-1}. Compruebe el resultado calculando $A \cdot A^{-1}$.

SOCIALES II. 2003. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 1. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

a)

$$\begin{pmatrix} 2 & x \\ 0 & x+2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & x \\ 0 & x+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2x \\ 0 & 2x+4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 4 & x^2+4x \\ 0 & x^2+4x+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2x \\ 0 & 2x+4 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2+4x = 2x \\ x^2+4x+4 = 2x+4 \end{cases} \Rightarrow x = 0 \ ; \ x = -2$$

b) Vamos a calcular la inversa de *A*.

$$A^{-1} = \frac{(A^d)^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^t}{2} = \frac{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}}{2} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$