DISTRITO UNIVERSITARIO DE MÁLAGA
2005
MATEMÁTICAS (Mayores de 25 años).
OPCION A

Ejercicio 1.-

(a) [1 punto] Factoriza el polinomio x^3-1.

(b) [1,5 puntos] Resuelve la siguiente inecuación $x^3-1\geq 0$.

$a)$

$$Posibles\ raices\ reales \Rightarrow \pm 1 \Rightarrow \quad \begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & & 1 & 1 & 1 \\ \hline & 1 & 1 & 1 & \underline{|0} \end{array} \quad x^3-1=(x-1)\left(x^2+x+1\right)$$

$$x^2+x+1=0 \Rightarrow \Delta = 1^2-4\cdot 1\cdot 1=-3<0 \Rightarrow No\ hay\ solución \Rightarrow x^3-1=(x-1)\left(x^2+x+1\right)$$

$b)$

$$x^3-1>0 \Rightarrow (x-1)\left(x^2+x+1\right)>0 \Rightarrow \begin{cases} x-1>0 \Rightarrow x>1 \\ x^2+x+1>0 \Rightarrow \forall x \in \Re \end{cases}$$

	$-\infty$	1 ∞
x > 1	(-)	(+)
x^2 + x + 1 > 0	(+)	(+)
Solución	(-)	(+)

Solución de $x^3-1\geq 0 \Rightarrow \forall x \in \Re / x>1$

Ejercicio 2.-

(a) [1 punto] Si los ángulos A y B son del primer cuadrante, *sen* A = 1/2 y *sen* B = 1/3, ¿cuál es el valor de *sen* (A+B)?

(b) [1,5 puntos] Halla la ecuación de la circunferencia centrada en el origen y que pasa por el punto (1,1).

$a)$

$$\begin{cases} \cos A = \sqrt{1-sen^2 A} = \sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{1-\frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos B = \sqrt{1-sen^2 B} = \sqrt{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2} = \sqrt{1-\frac{1}{9}} = \sqrt{\frac{8}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \end{cases} \Rightarrow sen\,(A+B) = sen\ A\cdot \cos B + \cos A \cdot sen\ B \Rightarrow$$

$$sen\,(A+B) = \frac{1}{2}\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{3} = \frac{\sqrt{2}}{3} + \frac{\sqrt{3}}{6} = \frac{2\sqrt{2}+\sqrt{3}}{6}$$

Continuación del Ejercicio 2

b) El radio es el modulo del vector **OP**, siendo **O** el origen de coordenadas (centro de la circunferencia) y el punto **P** dado

$$\overrightarrow{OP} = (1\,,1) - (0\,,\,0) = (1\,,1) \Rightarrow R = \left|\overrightarrow{OP}\right| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \Rightarrow$$

$$Ecuación\ de\ la\ circunferencia \Rightarrow (x-0)^2 + (y-0)^2 = \left(\sqrt{2}\right)^2 \Rightarrow C \equiv x^2 + y^2 - 2 = 0$$

Ejercicio 3.-

Sea la función f dada por $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 2}{x+1}$ para $x \neq -1$, y $f(-1) = a$.

(a) [1 punto] Halla el valor de a para que la función sea continua.

(b) [1,5 puntos] Simplifica la expresión de f y halla el valor de $\int_0^2 f(x)dx$.

$a)$

$$f(1) = \frac{(-1)^2 - (-1) - 2}{(-1)+1} = \frac{0}{0} \Rightarrow In\det er\min ación \Rightarrow$$

$$x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow \Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 9 \geq 0 \Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2 \cdot 1} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1+3}{2} = 2 \\ x = \dfrac{1-3}{2} = -1 \end{cases}$$

$$f(1) = a \Rightarrow f(1) = \lim_{x \to -1} \frac{x^2 - x - 2}{x+1} = \lim_{x \to -1} \frac{(x-2)(x+1)}{x+1} = \lim_{x \to -1} (x-2) = (-1) - 2 = -3 \Rightarrow a = -3$$

$b)$

$$f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x+1} = \frac{(x-2)(x+1)}{x+1} = x - 2$$

$$Puntos\ de\ corte\ con\ OX \Rightarrow y = 0 \Rightarrow x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$$

$$\int_0^2 (x-2)\,dx = \frac{1}{2} \cdot \left[x^2\right]_0^2 - 2 \cdot [x]_0^2 = \frac{1}{2} \cdot \left(2^2 - 0^2\right) - 2 \cdot (2-0) = \frac{4}{2} - 4 = -2$$

Ejercicio 4.-

Considera la función f dada por $f(x)=\dfrac{x^2}{x-1}$ para $x \neq 1$.

(a) [1,5 puntos] Halla los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función.

(b) [1 punto] Determina los máximos y mínimos relativos de f y los valores que alcanza la función en esos puntos.

$a)$

$$f'(x)=\frac{2x\,(x-1)-x^2}{(x-1)^2}=\frac{2x^2-2x-x^2}{(x-1)^2}=-2\cdot\frac{x}{(x-1)^2}\Rightarrow Crecimiento\Rightarrow -2\cdot\frac{x}{(x-1)^2}>0\Rightarrow$$

$$\begin{cases} -2<0\Rightarrow \forall x\in\Re \\ x>0 \\ (x-1)^2>0\Rightarrow \forall x\in\Re \end{cases}$$

-2 < 0	(-)	(-)
x > 0	(-)	(+)
$(x^2 -1)^2 > 0$	(+)	(+)
Solución	(+)	(-)

Creciente $\forall x\in <0$ **Decreciente** $\forall x\in\ x>0$

b)

Máximo relativo $x=0\Rightarrow f(0)=\dfrac{0^2}{0-1}=\dfrac{0}{-1}=0$ **De Creciente pasa a Decreciente**

OPCION B

Ejercicio 1.-

Entre Ana, Isabel y Luis tienen 130 €, Ana tiene el doble de euros que Isabel y Luis tiene 10 € más que Isabel.

(a) [1 punto] Plantea un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas que exprese cada uno de los tres datos dados.

(b) [1,5 puntos] Resuelve el sistema anterior por el método Gauss.

a) Llamando **A** a la cantidad que aporta Ana, **I** a la cantidad aportada por Isabel y **L** la de Luís

$$\begin{cases} A+I+L=130 \\ A=2I \\ L=10+I \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A+I+L=130 \\ A-2I=0 \\ -I+L=10 \end{cases}$$

$b)$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 130 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 10 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 130 \\ 0 & -3 & -1 & -130 \\ 0 & -1 & 1 & 10 \end{array}\right)\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 130 \\ 0 & 0 & -4 & -160 \\ 0 & -1 & 1 & 10 \end{array}\right) \Rightarrow 4L=160 \Rightarrow L=\frac{160}{4}=40 \Rightarrow -I+40=10$$

$$\Rightarrow I=30 \Rightarrow A+40+30=130 \Rightarrow A=60 \Rightarrow Solución \Rightarrow (A\,,\,I\,,\,L)=(60\,,30\,,40)$$

Ejercicio 2.-

Considera la recta r de ecuación $y=3x-2$ y los puntos $A(2, 7)$ y $B(0, 1)$.

(a) [1 punto] Prueba que la recta que pasa por los puntos A y B es paralela a r.

(b) [1,5 puntos] Halla el área de un triángulo ABC, sabiendo que el punto C está situado sobre la recta r.

$a)$

$$\begin{cases} m=3 \\ m=\dfrac{7-1}{2-0}=\dfrac{6}{2}=3 \end{cases} \Rightarrow Son\ iguales \Rightarrow Son\ paralelas$$

b) El área del triangulo ABC, es la misma sea cual sea el punto C tomado, ya que es igual a la longitud de la base (el módulo del vector AB) por la altura (la distancia de un punto C cualquiera de la recta a la recta dada)

$$Ecuación\ de\ la\ recta\ s\ que\ une\ A\ con\ B \Rightarrow \frac{y-7}{x-2}=3 \Rightarrow y-7=3x-6 \Rightarrow y=3x+1 \Rightarrow s\equiv 3x-y+1=0$$

$$\begin{cases} s\equiv 3x-y+1=0 \\ r\equiv 3x-y-2=0 \Rightarrow Cuando\ y=4 \Rightarrow 3x-4-2=0 \Rightarrow 3x=6 \Rightarrow x=2 \Rightarrow C(4\,,2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB}=(2\,,7)-(0\,,1)=(2\,,6) \Rightarrow \left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{2^2+6^2}=\sqrt{40}=2\sqrt{10} \\ Altura=H=d\left(r\,,\overrightarrow{AB}\right)=\dfrac{|3\cdot 2-6+1|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=\dfrac{|1|}{\sqrt{10}}=\dfrac{1}{\sqrt{10}}=\dfrac{\sqrt{10}}{10} \end{cases} \Rightarrow Área=\frac{1}{2}\cdot\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot H=\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{10}\cdot\frac{\sqrt{10}}{10}=1\,u^2$$

Ejercicio 3.-

(a) [1,25 puntos] Calcula el límite de la sucesión cuyo término general es $a_n = \sqrt{2n^2+n} - n$.

(b) [1,25 puntos] Halla el valor de k sabiendo que $f'(2)=1$, cuando f es la función dada por $f(x)=\dfrac{kx}{x^2+2}$, para $x \in \nabla$.

$a)$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{2n^2+n} - n = \infty - \infty = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\sqrt{2n^2+n}-n\right)\left(\sqrt{2n^2+n}+n\right)}{\sqrt{2n^2+n}+n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+n-n^2}{\sqrt{2n^2+n}+n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+n}{\sqrt{2n^2+n}+n} =$$

$$= \frac{\infty}{\infty} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n^2}{n^2}+\frac{n}{n^2}}{\sqrt{2\frac{n^2}{n^4}+\frac{n}{n^4}}+\frac{n}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{n}}{\sqrt{\frac{2}{n^2}+\frac{1}{n^3}}+\frac{1}{n}} = \frac{1+\frac{1}{\infty}}{\sqrt{\frac{2}{\infty}+\frac{1}{\infty}}+\frac{1}{\infty}} = \frac{1+0}{\sqrt{0+0}+0} = \frac{1}{0} = \infty$$

$b)$

$$f'(x) = \frac{k\left(x^2+2\right)-2xk}{\left(x^2+2\right)^2} = \frac{kx^2-2kx+2k}{\left(x^2+2\right)^2} = k\,\frac{x^2-2x+2}{\left(x^2+2\right)^2} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} f'(2)=1 \\ f'(2) = k\,\dfrac{2^2-2\cdot 2+2}{\left(2^2+2\right)^2} = \dfrac{2k}{6^2} = \dfrac{k}{18} \end{cases} \Rightarrow \frac{k}{18} = 1 \Rightarrow k = 18$$

Ejercicio 4.-

Considera la función $f : \nabla \to \nabla$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - mx + 3, & x \le 1 \\ x + n, & x > 1 \end{cases}$$

(a) [1,25 puntos] Halla los valores de m y n sabiendo que f es continua y toma el valor 5 para $x=-1$.

(b) [1,25 puntos] Calcula $\displaystyle\int_{-1}^{0} f(x)\,dx$.

$a)$

$$\begin{cases} f(-1)=5 \Rightarrow (-1)^2 - m\cdot(-1)+3 = 5 \Rightarrow 1+m=2 \Rightarrow m=1 \\ \begin{cases} f(1) = \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = 1^2 - m\cdot 1 + 3 = 4-m = 4-1 = 3 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = 1+n \end{cases} \Rightarrow f(1) = \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) \Rightarrow 1+n=3 \Rightarrow n=2 \end{cases}$$

$b)$

$$\int_0^1 \left(x^2-x+3\right)dx = \frac{1}{3}\cdot\left[x^3\right]_0^1 - \frac{1}{2}\cdot\left[x^2\right]_0^1 + 3\cdot\left[x\right]_0^1 = \frac{1}{3}\cdot\left(1^3-0^3\right) - \frac{1}{2}\cdot\left(1^2-0^2\right) + 3\cdot(1-0) = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 3 = \frac{2-3+18}{6}$$

$$\int_0^1 \left(x^2-x+3\right)dx = \frac{17}{6}$$