DISTRITO UNIVERSITARIO DE ANDALUCÍA
2004
MATEMÁTICAS (Mayores de 25 años).
OPCION A

Ejercicio 1.-

(a) [1'75 puntos] Resuelve el sistema de ecuaciones lineales que sigue, sabiendo que tiene infinitas soluciones:

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} -3x & + & 4y & + & z & = & 13 \\ x & + & 3y & - & z & = & 0 \\ -5x & - & 2y & + & 3z & = & 13 \end{array}\right\}.$$

(b) [0'75 puntos] Calcula, si existe, una solución del sistema del apartado anterior en la que $z=0$.

$a)$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 4 & 1 & 13 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \\ -5 & -2 & 3 & 13 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 13 & -2 & 13 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 13 & -2 & 13 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 13 & -2 & 13 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow 13y-2z=13 \Rightarrow 13y=13+2z \Rightarrow y=\frac{13+2z}{13}$$

$$y=1+\frac{2z}{13} \Rightarrow x+3\cdot\left(1+\frac{2z}{13}\right)-z=0 \Rightarrow x+3+\frac{6z}{13}-z=0 \Rightarrow x=-3+\frac{7z}{13}$$

$$Solución \Rightarrow (x\,,\,y\,,\,z)=\left(3+\frac{7z}{13}\,,1+\frac{2z}{13}\,,\,z\right) \equiv (3+7\lambda\,,1+2\lambda\,,13\lambda)$$

$b)$

$$Solución \Rightarrow z=0 \Rightarrow 13\lambda=0 \Rightarrow \lambda=0 \Rightarrow y=1+2\cdot 0=1 \Rightarrow z=3+7\cdot 0=3 \Rightarrow$$

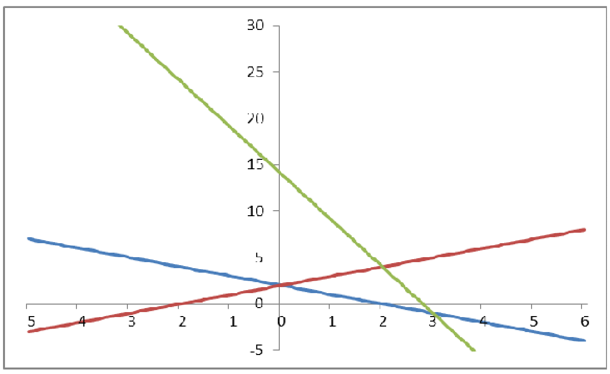
$$Solución \Rightarrow (x\,,\,y\,,\,z)=(3,1\,,\,0)$$

Ejercicio 2. Un rectángulo tiene dos de sus lados sobre las rectas r y s, de ecuaciones $x+y-2=0$ y $x-y+2=0$, respectivamente, y una de sus diagonales está sobre la recta de ecuación $5x+y-14=0$.

(a) [1 punto] Representa las tres rectas dadas.

(b) [1'5 puntos] Halla, razonadamente, los vértices del rectángulo. (La mera apreciación sobre una gráfica no es suficiente).

a)



Por la forma gráfica no parecen lados de un rectangulo,debido a que las unidades de el eje **OX** no son iguales a las de el elеje **OY**

La linea azul es **r**, la roja **s** y la verde es la recta de las diagonales

Continuación del Ejercicio 2

b) Hallaremos los puntos de intersección de r con s, de r con la recta t de las diagonales y la de este con la recta s

$$Punto\ A\begin{cases} r\equiv x+y-2=0 \\ s\equiv x-y+2=0\end{cases}\Rightarrow 2x=0\Rightarrow x=0\Rightarrow 0+y-2=0\Rightarrow y=2\Rightarrow A(0\,,2)$$

$$Punto\ B\begin{cases} r\equiv x+y-2=0 \\ t\equiv -5x-y+14=0\end{cases}\Rightarrow -4x+12=0\Rightarrow 4x=12\Rightarrow x=3\Rightarrow 3+y-2=0\Rightarrow y=-1\Rightarrow B(3\,,-1)$$

$$Punto\ C\begin{cases} s\equiv x-y+2=0 \\ t\equiv 5x+y-14=0\end{cases}\Rightarrow 6x-12=0\Rightarrow 6x=12\Rightarrow x=2\Rightarrow 2-y+2=0\Rightarrow y=4\Rightarrow C(2\,,4)$$

El punto O medio de BC, es el punto medio de A y D, siendo este el último vértice

$$\begin{cases} x_O=\dfrac{3+2}{2}=\dfrac{5}{2} \\ y_O=\dfrac{(-1)+4}{2}=\dfrac{3}{2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases} \dfrac{5}{2}=\dfrac{0+x_D}{2}\Rightarrow x_D=5 \\ \dfrac{3}{2}=\dfrac{2+y_D}{2}\Rightarrow 2+y_D=3\Rightarrow y_D=1\end{cases}\Rightarrow D(5\,,1)$$

Ejercicio 3.-

(a) [1'25 puntos] Calcula el límite de la sucesión de término general $a_n=\dfrac{n^2-n+2}{n}-n+2$.

(b) [1'25 puntos] Dada la función f definida para los números reales x, $x\neq -1$, por:

$$f(x)=\frac{4x^2+x-3}{x+1},$$

prueba que su función derivada es constante, justificando el resultado.

$a)$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-n+2}{n}-n+2=\frac{\infty}{\infty}-\infty=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-n+2-n^2+2n}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{n}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n}{n}+\frac{2}{n}}{\frac{n}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{2}{n}}{1}=\frac{1+0}{1}=1$$

$b)$

$$4x^2+x-3=0\Rightarrow\Delta=1^2-4\cdot 4\cdot(-3)=1+48=49\geq 0\Rightarrow x=\frac{-1\pm\sqrt{49}}{2\cdot 4}\Rightarrow\begin{cases} x=\dfrac{-1+7}{8}=\dfrac{6}{8}=\dfrac{3}{4} \\ x=\dfrac{-1-7}{8}=-1\end{cases}$$

$$4x^2+x-3=(x+1)(4x-3)$$

$$f(x)=\frac{4x^2+x-3}{x+1}=\frac{(x+1)(4x-3)}{x+1}=4x-3\Rightarrow f'(x)=4$$

<u>**Ejercicio 4.-**</u>

Ejercicio 4. [2'5 puntos] Estudia la continuidad de la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3-2x^2}{x^2-4} & (x\neq -2,\ x\neq 2)\\ 0 & (x=-2)\\ 1 & (x=2)\end{cases}.$$

Estudiaremos la continuidad en x = -2 y en x = 2

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to -2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -2^+} f(x)=\dfrac{(-2)^3-2\cdot(-2)^2}{(-2)^2-4}=\dfrac{8-8}{4-4}=\dfrac{0}{0}=\xrightarrow{Aplicando\ L'Hopital}=\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{3x^2-4x}{2x}=\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{3x-4}{2}\Rightarrow\\ f(-2)=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{3x-4}{2}=\dfrac{3\cdot(-2)-4}{2}=\dfrac{-10}{2}=-5\\ f(-2)=0\end{cases}\Rightarrow \lim\limits_{x\to -2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -2^+} f(x)=-5\neq f(-2)=0$$

$No\ es\ continua\ en\ x=-2$

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\dfrac{2^3-2\cdot 2^2}{2^2-4}=\dfrac{8-8}{4-4}=\dfrac{0}{0}=\xrightarrow{Aplicando\ L'Hopital}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^2-4x}{2x}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x-4}{2}=\dfrac{3\cdot 2-4}{2}=1\\ f(2)=1\end{cases}$$

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=f(2)=1\Rightarrow Es\ continua\ en\ x=2$

OPCION B

Ejercicio 1.-

(a) [1'5 puntos] Factoriza el polinomio $p(x)=3+7x+5x^2+x^3$ y halla los valores $x\in\mathbb{R}$ para los que $p(x)\le 0$.

(b) [1 punto] Resuelve la ecuación $\dfrac{2^{x^2}}{8^x}=16$ y comprueba alguna de las soluciones.

a) Las raíces del polinomio pueden ser $\pm 1\,,\,3$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 5 & 7 & 3 \\ 1 & & 1 & 6 & 13 \\ \hline & 1 & 6 & 13 & \underline{|16} \end{array} \qquad \begin{array}{r|rrrr} & 1 & 5 & 7 & 3 \\ -1 & & -1 & -4 & -3 \\ \hline & 1 & 4 & 3 & \underline{|0} \end{array} \Rightarrow x^3+5x^2+7x+3=(x+1)\left(x^2+4x+3\right)$$

$$x^2+4x+3=0\Rightarrow \Delta=4^2-4\cdot 1\cdot 3=16-12=4\Rightarrow x=\frac{-4\pm\sqrt{4}}{2\cdot 1}\Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{-4+2}{2}=-1 \\ x=\dfrac{-4-2}{2}=-3 \end{cases}\Rightarrow$$

$$x^3+5x^2+7x+3=(x+1)(x+1)(x+3)=(x+1)^2\,(x+3)$$

Se estudia la desigualdad para que sea positiva

$$x^3+5x^2+7x+3>0\Rightarrow (x+1)^2\,(x+3)>0\Rightarrow \begin{cases} (x+1)^2>0\Rightarrow \forall x\in\Re \\ x+3>0\Rightarrow x>-3 \end{cases}$$

$(x+1)^2>0$	**(+)**	**(+)**
x > -3	**(-)**	**(+)**
Solución	**(-)**	**(+)**

Como nos piden $x^3+5x^2+7x+3\le 0\Rightarrow Solución\Rightarrow \forall x\in\Re\,/\,x\le -3$

Ejercicio 2. [2'5 puntos] Dada la recta r de ecuación $3x-4y-12=0$, halla las ecuaciones de las rectas paralelas a r que están a una distancia de ella de 2 unidades.

Las rectas paralelas tienen el mismo vector director, siendo, sus ecuaciones, de la forma s: **3x – 4y + D = 0**

$$d(r\,,\,s)=\frac{-12-D}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\pm 2\Rightarrow \frac{-12-D}{\sqrt{25}}=\pm 2\Rightarrow \begin{cases} -12-D=10\Rightarrow D=-22\Rightarrow 3x+4y-22=0 \\ -12-D=-10\Rightarrow D=-2\Rightarrow 3x+4y-2=0 \end{cases}$$

Ejercicio 3. Considera la función f definida, para $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$, por $f(x) = x + 1 - \frac{2}{x}$.

(a) [0'25 puntos] Halla los puntos de corte de su gráfica con los ejes de coordenadas.
(b) [0'75 puntos] Halla las asíntotas de su gráfica.
(c) [1 punto] Calcula sus máximos y mínimos relativos (valores y dónde se alcanzan) y justifica en qué intervalos es creciente o decreciente.
(d) [0'5 puntos] Esboza la gráfica de f.

a)

$$\text{Corte con } OX \Rightarrow y = 0 \Rightarrow 0 = x + 1 - \frac{2}{x} \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow \Delta = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 9 \geq 0 \Rightarrow$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2 \cdot 1} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{-1+3}{2} = 1 \Rightarrow (1\,,0) \\ x = \dfrac{-1-3}{2} = -2 \Rightarrow (-2\,,0) \end{cases}$$

$$\text{Corte con } OY \Rightarrow x = 0 \Rightarrow f(0) = 0 + 1 - \frac{2}{0} \Rightarrow \text{Sin solución} \Rightarrow \text{Asíntota vertical en } x = 0$$

b)

Asíntota vertical en $x = 0$

Asíntotas horizontales

$$y = \lim_{x \to \infty}\left(x + 1 - \frac{2}{x}\right) = \infty + 1 - \frac{2}{\infty} = \infty + 1 - 0 = \infty \Rightarrow \text{No existe asíntota horizontal cuando } x \to \infty$$

$$y = \lim_{x \to -\infty}\left(x + 1 - \frac{2}{x}\right) = -\infty + 1 - \frac{2}{-\infty} = -\infty + 1 - 0 = \infty \Rightarrow \text{No existe asíntota horizontal cuando } x \to -\infty$$

Asíntotas oblicuas

$$m = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x + 1 - \frac{2}{x}}{x} = \lim_{x \to -\infty} 1 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} = 1 + \frac{1}{-\infty} - \frac{2}{\infty} = 1 + 0 - 0 = 1$$

$$n = \lim_{x \to -\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \to -\infty}\left(x + 1 - \frac{2}{x} - 1 \cdot x\right) = \lim_{x \to -\infty}\left(1 - \frac{2}{x}\right) = 1 - \frac{2}{-\infty} = 1 - 0 = 1$$

Existe asíntota oblicua, $y = x + 1$, *cuando* $x \to -\infty$

$$m = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{x + 1 - \frac{2}{x}}{x} = \lim_{x \to \infty} 1 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} = 1 + \frac{1}{\infty} - \frac{2}{\infty} = 1 + 0 - 0 = 1$$

$$n = \lim_{x \to \infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \to \infty}\left(x + 1 - \frac{2}{x} - 1 \cdot x\right) = \lim_{x \to \infty}\left(1 - \frac{2}{x}\right) = 1 - \frac{2}{\infty} = 1 - 0 = 1$$

Existe asíntota oblicua, $y = x + 1$, *cuando* $x \to \infty$

Continuación del Ejercicio 3

$c)$

$$f'(x)=1+\frac{2}{x^2}=\frac{x^2+2}{x^2}\Rightarrow x^2+2=0\Rightarrow x^2=-2\Rightarrow x=\pm\sqrt{-2}\Rightarrow \textit{Sin solución}$$

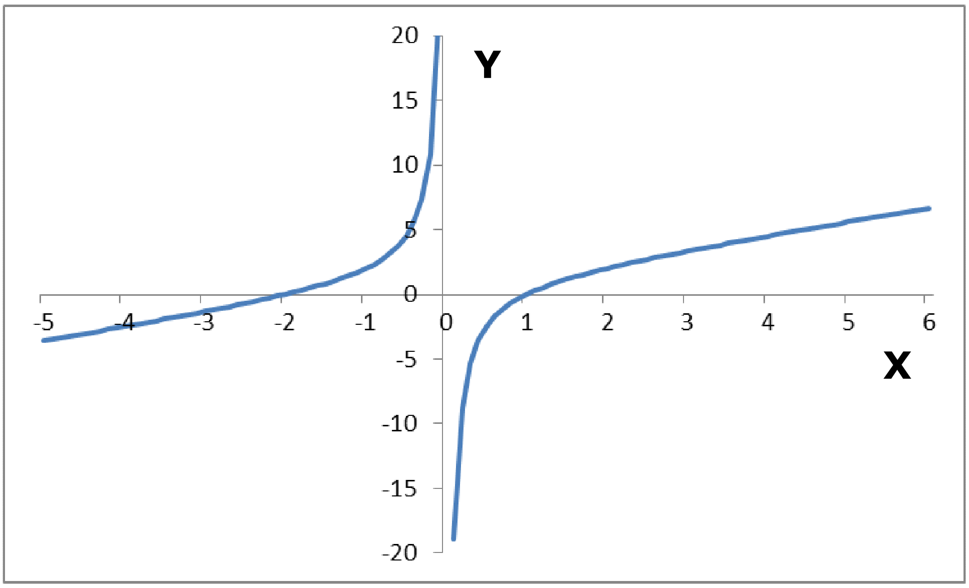
$$\textit{Creciente}\Rightarrow f'(x)>0\Rightarrow\frac{x^2+2}{x^2}>0\Rightarrow\begin{cases}x^2+2>0\Rightarrow\forall x\in\Re\\ x^2>0\Rightarrow\forall x\in\Re\end{cases}$$

$x^2 > 0$	**(+)**
$x^2 + 2 > 0$	**(+)**
Solución	**(+)**

Crecimiento $\forall x\in\Re/(x<0)\cup(x>0)$

No hay máximos ni mínimos relativos

d)



Ejercicio 4. [2'5 puntos] Calcula el área de la región del plano limitada por la gráfica de la parábola de ecuación $y=x^2+4x+2$, el eje de abscisas y las rectas de ecuaciones $x=1$ y $x=3$.

$$\textit{Puntos de corte con OX}\Rightarrow y=0\Rightarrow x^2+4x+2=0\Rightarrow\Delta=4^2-4\cdot1\cdot2=8\geq0\Rightarrow x=\frac{-4\pm\sqrt{8}}{2\cdot1}\Rightarrow\begin{cases}x=\frac{-4+2\sqrt{2}}{2}=-2+\sqrt{2}\\ x=\frac{-4-2\sqrt{2}}{2}=-2-\sqrt{2}\end{cases}$$

$$\begin{cases}-2+\sqrt{2}\notin(1,3)\\ -2-\sqrt{2}\notin(1,3)\end{cases}\Rightarrow 2\in(1,3)\Rightarrow y(2)=2^2+4\cdot2+2=4+8+2=14>0\Rightarrow \textit{Positivo}$$

$$A=\int_1^3\left(x^2+4x+2\right)dx=\frac{1}{3}\cdot\left[x^3\right]_1^3+4\cdot\frac{1}{2}\cdot\left[x^2\right]_1^3+2\cdot\left[x\right]_1^3=\frac{1}{3}\cdot\left(3^3-1^3\right)+2\cdot\left(3^2-1^2\right)+2\cdot(3-1)=\frac{26}{3}+2\cdot8+4=20+\frac{26}{3}=\frac{86}{3}u^2$$