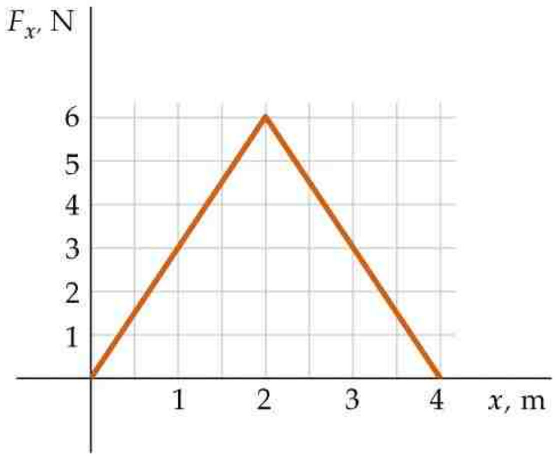
PROBLEMAS RESUELTOS TEMA: 3

1.- Una partícula de 3 kg se desplaza con una velocidad de 2 m/s cuando se encuentra en $x = 0$. Esta partícula se encuentra sometida a una fuerza F_x que varia con la posición del modo indicado en la figura:

a. **¿Cuál es su energía cinética para $x = 0$?**

b. **¿Cuál es el trabajo realizado por la fuerza cuando la partícula se desplaza desde $x = 0\ m$ a $x = 4\ m$?**

c. **¿Cuál es la velocidad de la partícula cuando se encuentra en $x = 4\ m$?**



a)

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}\cdot 3\cdot 2^2 = 6\,J$$

b)

$$W = \int_0^4 F_x\ dx = \frac{6\cdot 4}{2} = 12\,J$$

donde la integral se ha calculado teniendo en cuenta que ésta representa el área encerrada por la figura. En este caso es un triangulo: (base × altura)/2

c) La energía que gana la partícula por la acción de la fuerza en $x = 4$ es $12\,J$ más los $6\,J$ que ya tenía en $x = 0$:

$$E_c = 12 + 6 = 18\,J$$

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 \quad \Longrightarrow \quad v = \sqrt{\frac{2\times 18}{3}} = 3{,}46\ m/s$$

2.- Un objeto de 4 kg inicialmente en reposo en $x = 0$ se acelera con potencia constante de 8 W. En $t = 9\ s$ su posición es $x = 36\ m$. Determinar su velocidad para $t = 6\ s$ y su posición ese instante.

La potencia cumple:

$$P = F \cdot v = m \cdot a \cdot v$$

Según el Ejemplo 2 del párrafo 3.1.2 de los apuntes:

$$x(t) = \left(\frac{8P}{9m}\right)^{1/2} t^{3/2}$$

Y con los datos del problema:

$$36 = \left(\frac{8P}{9 \cdot 4}\right)^{1/2} \cdot 9^{3/2} \quad \Longrightarrow \quad P = 8\ W$$

(en realidad, este dato ya lo dan en el enunciado aunque no era necesario para resolver el problema).

Derivando la expresión $x(t)$ obtenemos

$$v = \left(\frac{2P}{m}\right)^{1/2} \cdot t^{1/2}$$

Para $t = 6\ s$ y con $P = 8\ W$, resulta

$$v = 4{,}9\ m/s \ \text{ y } \ x = 19{,}6\ m$$

La velocidad también se podría haber obtenido del siguiente modo:

$$W = Pt = \frac{1}{2} m v^2$$

$$8 \cdot 6 = \frac{1}{2} 4 v^2 \ \Longrightarrow \ v = 4{,}9\ m/s$$

3.- Una máquina de Atwood sencilla utiliza dos masas m_1 y m_2 ($m_1 > m_2$). Partiendo del reposo, la velocidad de las dos masas es $4\ m/s$ al cabo de $3\ s$. En este instante, la energía cinética del sistema es de $80\ J$. Determinar los valores de m_1 y m_2.

$$v = a \cdot t \quad \Longrightarrow \quad a = \frac{v}{t} = \frac{4}{3}\ m/s^2$$

Según se obtuvo en el problema correspondiente de la máquina de Atwood (prob. 2, tema 2):

$$a = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g \qquad\qquad m_1 > m_2$$

Esto es:

$$\frac{4}{3} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g \qquad\qquad [1]$$

Ahora, la E_c del sistema es:

$$\frac{1}{2} m_1 (4)^2 + \frac{1}{2} m_2 (4)^2 = 80 \qquad\qquad [2]$$

Resolviendo [1] y [2] obtenemos:

$$m_1 = 5{,}67\ kg$$

$$m_2 = 4{,}32\ kg$$

Vemos que la m_1 debe haber descendido una altura h dada por:

$$h = \frac{1}{2} a t^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot 3^2 = 6\ m$$

Esta misma altura la habrá ascendido la masa m_2 mientras cae m_1.

Por conservación de la energía, en el estado inicial sólo tendríamos la energía potencial de la masa m_1 y en el estado final tendríamos energía potencial de la masa m_2 y la energía cinética del sistema:

$$m_1 g h = 80 + m_2 g h$$

O bien, con $h = 6\ m$:

$$(m_1 - m_2) g = \frac{80}{6}$$

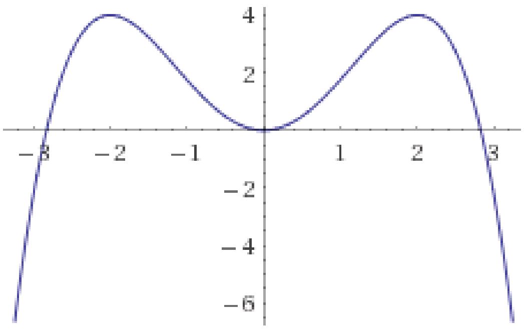
Podríamos haber usado esta ecuación en lugar de la ecuación [1] para resolver el sistema.

4.- La fuerza que actúa sobre un objeto viene dada por la expresión $F(x) = x^3 - 4x$. Localizar las posiciones de equilibrio estable e inestable y demostrar que en estos puntos la energía potencial tiene máximos o mínimos locales.

Como $F = -\frac{dE_P}{dx}$, integrando F y cambiando el signo obtenemos:

$$E_P = -\left(\frac{x^4}{4} - 2x^2\right)$$

Si representamos E_P como función de x, resulta:



Para ver dónde existen extremos (máximos y mínimos) haremos un estudio de los puntos críticos de E_P derivando e igualando a cero. Sabemos:

$$-\frac{dE_p}{dx} = F$$

Hacemos $F = 0 \implies x(x^2 - 4) = 0 \implies \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 2 \end{cases}$

Veremos mediante la derivada 2ª cuáles de dichos extremos son máximos o mínimos:

$$\frac{d^2E_p}{dx^2} = -(3x^2 - 4)$$

En $x = 0 \implies \frac{d^2E_p}{dx^2} = +4 > 0 \implies x = 0$ es mínimo (punto de equilibrio estable).

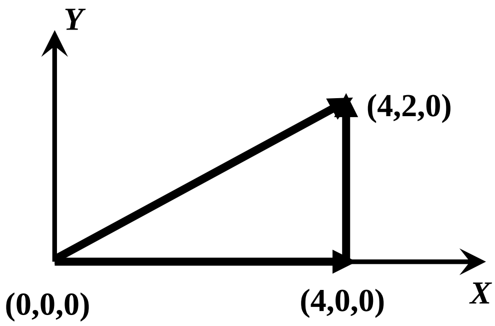
En $x = 2 \implies \frac{d^2E_p}{dx^2} = -0 < 0 \implies x = 2$ es un máximo (punto de equilibrio inestable).

En $x = -2 \implies \frac{d^2E_p}{dx^2} = -8 < 0 \implies x = -2$ es un máximo (punto de equilibrio inestable).

5.- Una partícula se encuentra sometida a la fuerza:

$$\vec{F} = \left(\frac{x}{2} + 2y\right)\vec{a}_x + 2x\vec{a}_y\ N$$

Hallar el trabajo realizado al mover la partícula: a) desde el origen hasta $(4, 0, 0)\ m$ y desde $(4, 0, 0)\ m$ hasta $(4, 2, 0)\ m$ y b) directamente desde al origen a$(4, 2, 0)m$.



Sabemos que el trabajo cumple:

$$W = \int_A^B \vec{F}\ d\vec{r}$$

a) En el primer movimiento nos movemos a lo largo del eje X desde (0,0,0) hasta (4,0,0) $\Rightarrow \quad d\vec{r} = \vec{a}_x\, dx$

Al realizar el producto escalar, resulta:

$$\vec{F}\ d\vec{r} = \left(\frac{x}{2} + 2y\right) dx$$

ya que $\begin{cases} \vec{a}_x \cdot \vec{a}_x = 1 \\ \vec{a}_x \cdot \vec{a}_y = 0 \end{cases}$

Para el primer trayecto a lo largo del eje X desde (0,0,0) hasta (4,0,0), el trabajo quedará:

$$W = \int_0^4 \left(\frac{x}{2} + 2y\right) dx$$

pero el eje X tiene por ecuación $y = 0$, luego:

$$W = \int_0^4 \frac{x}{2}\ dx = \frac{1}{2}\int_0^4 x\ dx = \frac{1}{2}\ \frac{x^2}{2}\Big|_0^4 = \frac{1}{4}(16 - 0) = 4\,J$$

En segundo movimiento nos movemos en vertical (eje de ecuación $x = 4$) desde (4,0,0) hasta (4,2,0), luego $d\vec{r} = \vec{a}_y\ dy$.

El producto escalar quedará (con $x = 4$): $\vec{F}\ d\vec{r} = 2x\ dy = 8\ dy$

Y el trabajo para ese trayecto, será:

$$W = \int_0^2 8\ \ dy = 16\,J$$

El trabajo W total será $4 + 16 = 20\,J$

b) Siguiendo el trayecto directo desde el origen (0,0,0) hasta (4,2,0), la ecuación de la línea es:

$$y = \frac{x}{2} \implies x = 2y \implies dx = 2dy$$

En este trayecto, al desplazarse varía tanto x como y, luego: $d\vec{r} = \vec{a}_x\ dx + \vec{a}_y\ dy$

El trabajo quedará:

$$W = \int_A^B \vec{F}\ \ d\vec{r} = \int_A^B \left[\left(\frac{x}{2} + 2y\right)\vec{a}_x + 2x\ \vec{a}_y\right]\left[dx\ \vec{a}_x + dy\ \vec{a}_y\right] = \int_A^B \left(\frac{x}{2} + 2y\right) dx + 2x\ dy =$$

{Según la ecuación del trayecto, para integrar hacemos el cambio de variable:

$$y = \frac{x}{2} \implies dy = \frac{dx}{2}$$

e integramos ya en x desde 0 hasta 4.}

$$= \int_0^4 \left(\frac{x}{2} + 2\frac{x}{2}\right) dx + 2x\frac{dx}{2} = \int_0^4 \frac{5}{2}x\ \ dx = \frac{5}{2}\int_0^4 x\ \ dx = \frac{5}{2}\cdot\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^4 = \frac{5}{4}\cdot 16 = 20\,J$$

Como para el trayecto a) y para el trayecto b) el trabajo vale $20\,J$ podemos asegurar que $\vec{F}$ es una fuerza conservativa.

Este mismo problema aparecerá en la asignatura de Física II aplicado a cargas eléctricas.

6.- Una partícula de 3 kg parte del reposo en $x = 0$ y se mueve bajo la influencia de una sola fuerza $F_x = 6 + 4x - 3x^2$ en donde F_x se mide en newtons y x en metros

a) Determinar el trabajo realizado por la fuerza cuando la partícula se desplaza desde $x = 0\ m$ hasta $x = 3\ m$.

b) Determinar la potencia suministrada a la partícula cuando se encuentra en $x = 3\ m$.

a)

$$W = \int_0^3 F_x \quad dx = 6x + 2x^2 - 3\frac{x^3}{3}\Big]_0^3 = 18 + 18 - 27 = 9\,J$$

b)

$$P = \frac{dW}{dt} = m \cdot a \cdot v$$

Como por la 2ª ley de Newton $F = m \cdot a$

$$a = \frac{F}{m} = \frac{6}{3} + \frac{4}{3}x - \frac{3}{3}x^2 = 2 + \frac{4}{3}x - x^2$$

que para $x = 3$ vale $a = -3\ m/s^2$.

Como la aceleración está dada en función del desplazamiento, entonces:

$$v^2 = v_0^2 + 2\int_{s_0}^{s} a(s)\,ds$$

Como se parte del reposo $v_0 = 0$; aquí $s_0 = x_0 = 0$ y v^2 para $x = 3$ sera:

$$v^2 = 2\int_0^3 \left(2 + \frac{4}{3}x - x^2\right)\,dx = 2\left(2x + \frac{4}{6}x^2 - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^3 = 2\left(6 + 6 - \frac{27}{3}\right) = 2 \cdot 3$$

$$= 6\ m/s^2 \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{6}\ m/s$$

Finalmente, $P = m \cdot a \cdot v$ que en $x = 3$, resulta:

$$P = 3 \cdot (-3) \cdot \sqrt{6} = -22{,}04\,W$$

Que es negativa porque en realidad la partícula frena ($a = -3\ m/s^2$) en $x = 3\,m$

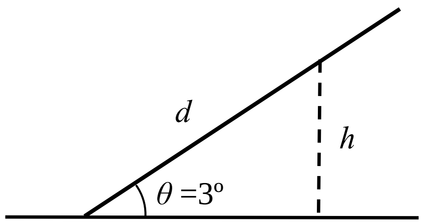
La velocidad también se podía haber obtenido a partir del trabajo W:

$$W = 9 = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{3}{2}v^2 \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{6}\ m/s$$

7.- Una muchacha en bicicleta que circula por una carretera horizontal a 10 m/s deja de pedalear cuando inicia una cuesta inclinada con 3° con la horizontal. Ignorando las fuerzas de rozamiento, que distancia recorrerá sobre la colina antes de detenerse?

Contrariamente a lo que podría pensarse, la repuesta no depende de la masa de la muchacha (y de la bicicleta). En realidad, toda la energía cinética inicial de la muchacha-bici se transforma en únicamente energía potencial en el punto más alto:

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgh$$



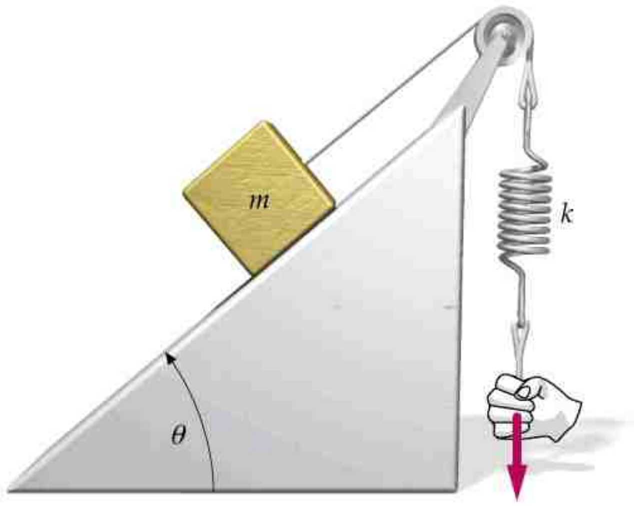
Según el esquema:

$h = d \sin\theta = d \sin 3$

En la conservación de la energía, la masa se cancela:

$$\frac{v^2}{2} = g\, d \sin 3 \quad \Longrightarrow \quad d = \frac{v^2}{2g \sin 3} = 97{,}5\ m$$

8.- Un bloque de masa m reposa sobre un plano inclinado como indica la figura. Por medio de una polea, el bloque esta conectado a un muelle de constante K del cual se tira abajo con una fuerza gradualmente creciente. El valor de μ_e es conocido. Determinar la energía potencial del muelle en el momento que el bloque comienza moverse.



Sabemos que la fuerza del muelle es de tipo $F = -Kx$. Esta fuerza se transmitirá por la cuerda hasta el bloque.

El bloque ejerce una fuerza hacia abajo $mg\sin\theta$ y ofrece una resistencia al movimiento $\mu_e mg\cos\theta$ debido al rozamiento. De modo que para mover el bloque necesitamos aplicar $\mu_e mg\sin\theta + \mu_e mg\cos\theta$. Esta fuerza se debe igualar a la fuerza de estiramiento $F = Kd$ siendo d el estiramiento del muelle en el momento en que el bloque comieza a moverse

$$Kd = mg\sin\theta + \mu_e mg\cos\theta$$

$$d = \frac{mg(\sin\theta + \cos\theta\,\mu_e)}{K}$$

Una vez hallado el estiramiento d, sabemos que la energía potencial (elástica) del muelle es del tipo $\frac{1}{2}Kx^2$:

$$\frac{1}{2}Kd^2 = \frac{1}{2}\frac{(\sin\theta + \mu_e\cos\theta)^2\,m^2g^2}{K}$$

9.- Un péndulo esta formado por una cuerda de longitud *L* y una lenteja de masa *m*. La cuerda dispone en posición horizontal y se da a la lenteja la velocidad inicial mínima para que el péndulo de una vuelta completa en el plano vertical.

a) ¿Cuál es la máxima energía cinética de la lenteja?

b) ¿Cuál es en ese momento la tensión de la cuerda?

a) Según vimos en el capitulo anterior, y pensando desde un punto de vista inercial sin aplicar la 2ª ley de newton, para que el péndulo de la vuelta completa se debe cumplir que en el punto más alto, la fuerza centrifuga se iguale al peso:

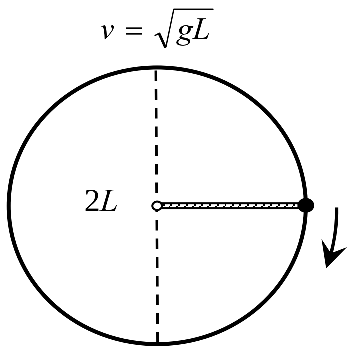
$$m\frac{v^2}{L} = mg \quad \Longrightarrow \quad v = \sqrt{gL}$$

En el punto más alto, el péndulo tendrá una energía cinética que según la expresión anterior de la velocidad, será:

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mgL$$

y tendrá una energía potencial:

$$E_p = mgh = mg2L$$



De modo, que la energía total en el punto más alto:

$$E_T = E_k + E_p = \frac{1}{2}mgL + mg2L = \frac{5}{2}mgL$$

En el punto mas bajo, no tendrá E_p y solo tendrá E_k que será la mayor puesto que la velocidad será también la mayor. Por supuesto, la energía total se conserva y es la misma en cualquier punto del círculo:

$$\frac{1}{2}mgL + mg2L = \frac{1}{2}mv_{max}^2 + 0$$

La energía cinética máxima ocurrirá en el punto más bajo y será:

$$E_k = \frac{5}{2}mgL$$

b) La tensión en el punto más bajo será la suma del peso mg y de la fuerza centrifuga $m\frac{v_{max}^2}{L}$.

Para ello calculamos v_{max}^2 en el punto mas bajo:

$$\frac{5}{2}mgL = \frac{1}{2}mv_{max}^2 \quad \Longrightarrow \quad v_{max}^2 = 5gL$$

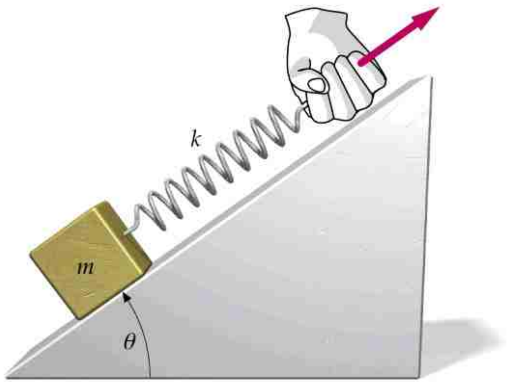
Y finalmente, la tensión:

$$T = mg + m\frac{v_{max}^2}{L} = mg + m\frac{5gL}{L} = 6mg$$

10.- Un bloque de masa m descansa sobre un plano rugoso inclinado θ grados sobre la horizontal. El bloque esta unido a un muelle de constante K próximo a la parte alta del plano. Los coeficientes de rozamiento estatico y cinético entre el bloque y el plano son μ_e y μ_c respectivamente. Tiramos del muelle lentamente hacia arriba a lo largo del plano hasta que el bloque comienza a moverse.

a) Determinar una expresión para el alargamiento d del muelle en el momento que el bloque se mueve.

b) Determinar el valor μ_c tal que el bloque se detenga justo cuando el muelle se encuentra en su condición natural, es decir, ni alargado ni comprimido.



a) Cuando el muelle se haya estirado una distancia d, el movimiento será inminente. Entonces la fuerza del muelle será compensada por la componente del peso del cuerpo a lo largo del plano y la fuerza de rozamiento estática:

$$Kd = mg\sin\theta + \mu_e mg\cos\theta \quad \Longrightarrow \quad d = \frac{mg(\sin\theta + \mu_e\cos\theta)}{K}$$

b) En la situación inicial el bloque está parado (no hay E_K) y, si tomamos el origen de energías potenciales en el punto más bajo (punto inicial), tampoco habrá energía potencial gravitatoria. Sólo habrá energía potencial elástica del resorte $Kd^2/2$.

En la situación final, el resorte estará sin deformar (no tendrá energía potencial elástica), el bloque estará parado (sin energía cinética) pero tendrá una energía potencial gravitatoria $mgh = mgd\sin\theta$. Además, se habrá perdido la energía correspondiente a la fricción $\mu_c mg\cos\theta\ d$, donde se utilizado el coef. de fricción cinética ya que ha habido deslizamiento.

Por conservación de energía:

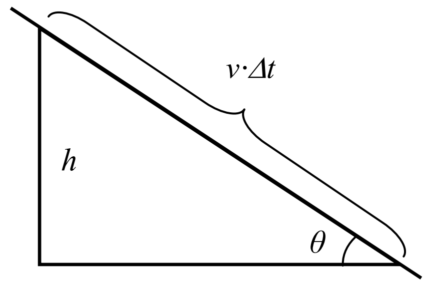
$$\frac{1}{2}Kd^2 = mgd\sin\theta + \mu_c mg\cos\theta\ d \ \Longrightarrow\ \mu_c = \frac{\mu_e - \tan\vartheta}{2}$$

donde se ha utilizado la expresión de d hallada en el apartado a).

11.- Un bloque de masa m se desliza hacia abajo con velocidad constante v por un plano inclinado un ángulo θ con la horizontal. Durante el intervalo de tiempo Δt, ¿Cuál es la magnitud de la energía disipada por rozamiento?

Como el cuerpo se mueve a velocidad v constante, recorrerá una distancia $v\Delta t$ en el tiempo Δt . En ese tiempo, habrá descendido una distancia h, dada por $v\Delta t \cdot \sin\theta$ con lo que su energía potencial ha cambiado en $mgv\Delta t \cdot \sin\theta$.

La energía total que el cuerpo tiene en el punto más alto es $\frac{1}{2}mv^2 + mgv\Delta t \sin\theta$. En el punto más bajo podemos tomar que no tiene energía potencial (si tomamos allí el origen de energías potenciales) pero llevará la mis energía cinética (la velocidad es constante por el enunciado) y se habrá perdido una cierta energía de rozamiento.



Por conservación de la energía:

$$\frac{1}{2}mv^2 + mgv\Delta t \sin\theta = \frac{1}{2}mv^2 + (Energía\ perdida\ por\ rozamiento)$$

De aquí obtenemos la energía perdida por rozamiento que nos piden:

$$Energía\ perdida\ por\ rozamiento = mgv\Delta t \sin\theta$$

Es decir, el cuerpo va eliminando en rozamiento la energía potencial de descenso.

Para que ocurra la situación del problema (caída por un plano con velocidad constante), se debe cumplir la igualdad de la fuerza del peso en dirección del plano $mg\sin\theta$ con la fuerza de rozamiento cinética (una vez se haya iniciado el movimiento de descenso) $\mu_c mg\cos\theta$.

$$mg\sin\theta = \mu_c mg\cos\theta$$

Es decir, para caída con velocidad constante en un plano, el coeficiente de rozamiento cinético debe cumplir:

$$\mu_c = \tan\theta$$

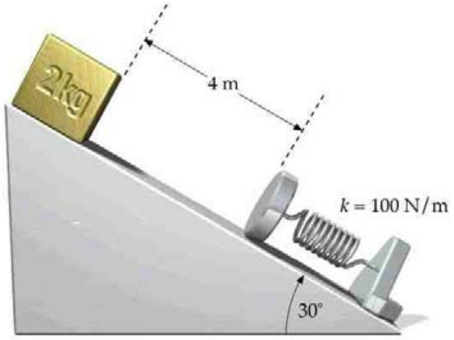
Esta relación ha aparecido en numerosas situaciones.

12.- Un bloque de 2 kg se deja libre sobre un plano inclinado hacia abajo, sin rozamiento, a una distancia de 4 m de un muelle de constante $K = 100\ N/m$. El muelle esta fijo a lo largo del plano inclinado que forma un angulo de 30°.

a) Hallar la compresión máxima del muelle, admitiendo que carece de masa.

b) Si el plano inclinado no es liso sino que el coeficiente de rozamiento entre el bloque y el plano es 0,2 hallar la compresión máxima.

c) En el caso último del plano inclinado rugoso, ¿hasta qué punto subirá el bloque por el plano después de abandonar el muelle?



a) Cuando el bloque haya comprimido al muelle, el bloque habrá recorrido por el plano una distancia $(4 + x)$ siendo x la distancia de compresión que buscamos. El bloque habrá descendido una altura $(4 + x)\sin 30$. Entonces, la energía potencial incial será $mg(4 + x)\sin 30$ que se transformará en energía potencial del resorte en el punto final del movimiento:

$$mg(4 + x)\sin 30 = \frac{1}{2}kx^2$$

Se despeja x de la ecuación de 2º grado y se obtiene $x = 0{,}989\ m$. En la ecuación de 2º grado sólo tiene sentido tomar x positiva

b) En la nueva posición x' final con el muelle comprimido, se habrá perdido una energía de fricción $[\mu_c mg\cos\theta(4 + x')]$:

$$mg(4 + x')\sin 30 = \frac{1}{2}Kx'^2 + \mu_e mg\cos\theta \cdot (4 + x')$$

se despeja x' de la nueva ecuación de 2º grado:

$$x' = 0{,}782\ m$$

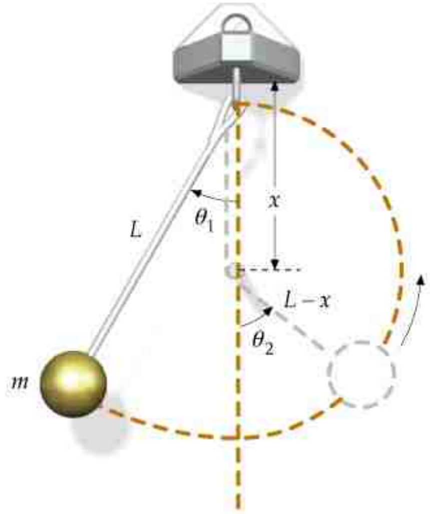
c) Una vez comprimido el muelle y cuando se empiece a subir, la energía potencial del muelle se transformará en energía potencial gravitatoria y pérdidas de fricción durante el todo trayecto de subida que ahora llamaremos x''

$$\frac{1}{2}K(0{,}782)^2 = mgx''\sin 30 + \mu_c mg\cos 30 \cdot x''$$

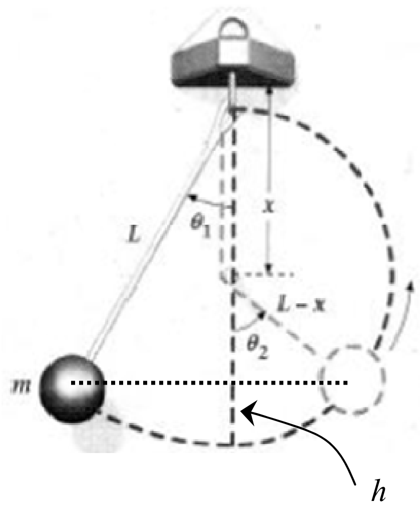
$x'' = 2{,}317\ m$ desde $0{,}782\ m$ de compresión del muelle.

$d = 2{,}317 - 0{,}782 = 1{,}535\ m$ después de abandonar el muelle.

13.- Un péndulo de longitud L tiene una lenteja de masa m. Se deja libre desde un cierto ángulo θ_1. La cuerda choca contra un clavo situado a una distancia x directamente por debajo del propio pivote acortándose realmente la longitud del péndulo. Determinar el ángulo máximo θ_2, que forman la cuerda y la vertical cuando la lenteja esta a la derecha del clavo.



Por la conservación de la energía, a la izquierda (en el punto más alto) sólo hay energía potencial. Por tanto a la derecha en el punto más alto *habrá la misma energía potencial*. Es decir, los puntos tienen la misma altura respecto del punto mas bajo que tomaremos como origen de energías potenciales. A dicha altura la llamaremos h. Del esquema se deduce:



$$h = L - L\cos\theta_1 = L - x - (L - x)\cos\theta_2$$

o bien

$$L\cos\theta_1 = x + (L - x)\cos\theta_2$$

De aquí:

$$\cos\theta_2 = \frac{L\cos\theta_1 - x}{L - x}$$

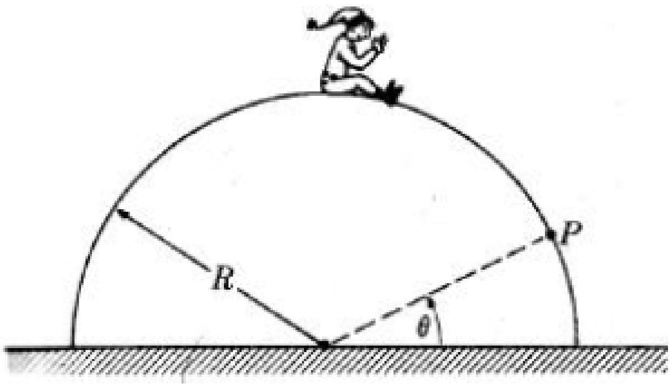
que sumando y restando L en el numerador, podemos escribir como:

$$\cos\theta_2 = \frac{L + L\cos\theta_1 - x - L}{L - x} = \frac{L - x}{L - x} + \frac{L\cos\theta_1}{L - x} - \frac{L}{L - x}$$

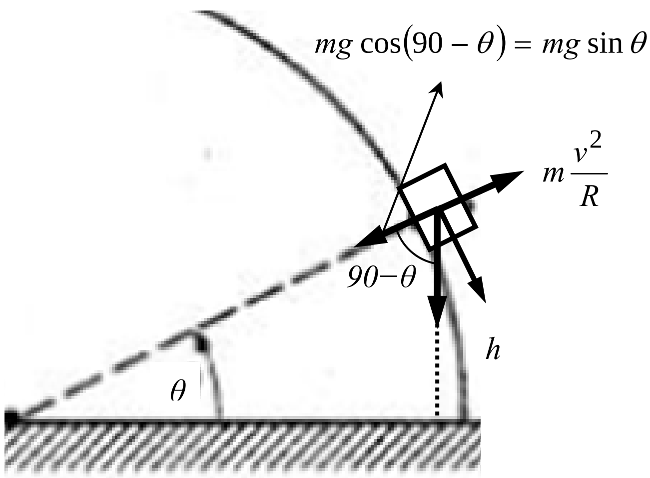
$$= 1 - \frac{L}{L - x}(1 - \cos\theta_1)$$

$$\theta_2 = arc\cos\left[1 - \frac{L}{L - x}(1 - \cos\theta_1)\right]$$

14.- Un muchacho de masa m esta sentando sobre un montículo hemisférico de nieve. Si empieza a resbalar desde el reposo (suponiendo el hielo perfectamente liso) ¿en qué punto *P* deja el muchacho de tener contacto con el hielo?



En el punto de contacto P la fuerza centrífuga igualará la componente normal del peso:



$$m\frac{v^2}{R} = mg\sin\theta$$

O bien:

$$v^2 = gR\sin\theta$$

Ahora, por conservación de energía, la energía potencial inicial del muchacho antes de caer mgR (la cinética es nula debido al reposo inicial) se convertirá en cinética final y potencial final:

Esta última vendrá dada por: $mgh = mgR\sin\theta$

Entonces, por conservación: $$mgR = mgR\sin\theta + \frac{1}{2}mv^2$$

Con la v^2 que hemos hallado antes: $$mgR = mgR\sin\theta + \frac{1}{2}mgR\sin\theta$$

Dividiendo ambos miembros entre mgR:

$$1 = \sin\theta + \frac{\sin\theta}{2} = \frac{3}{2}\sin\theta$$

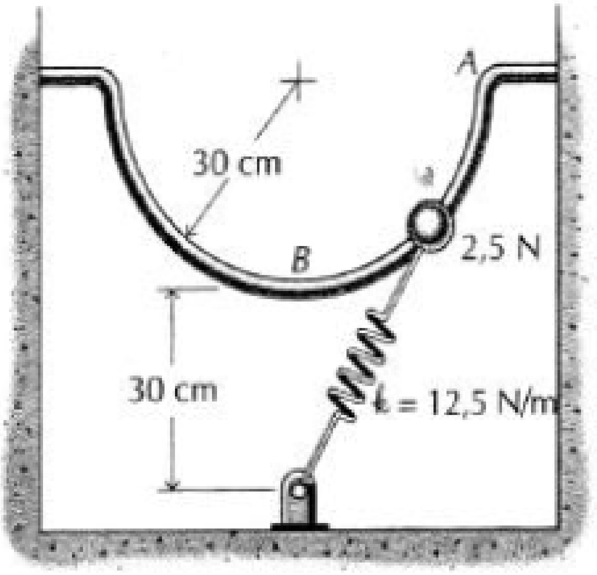
$$\sin\theta = \frac{2}{3} \implies \theta = 41{,}81°$$

O bien $h = R\sin\theta = R\frac{2}{3} = 0,\hat{6}\,R$

15.- Un cuenta que pesa 2,5 N se mueve por un alambre semicircular situado en un plano horizontal. La longitud natural del resorte es de 20 cm y el rozamiento despreciable. Si se suelta la cuenta partiendo del reposo en la posición A, determinar:

a) Su velocidad en la posición B.

b) La fuerza que el alambre ejerce sobre la cuenta en la posición B.



Vista superior del sistema

a) Al ser el movimiento en un plano horizontal, el peso de la cuenta no juega ningún papel, por ser perpendicular al movimiento. La fuerza centrifuga tampoco juega papel porque también es perpendicular al movimiento.

Por el teorema de Pitágoras, la longitud del resorte en la posición A es:

$l_A = \sqrt{60^2 + 30^2} = 67{,}08\ cm$

En A, la deformación inicial del resorte es $67{,}08 = 20 = 47{,}08\ cm = 0{,}4708\ m$

La energía potencial del resorte en la posición A vale:

$$E_{PA} = \frac{1}{2}K(def_A)^2 = \frac{1}{2}(12{,}5)(0{,}4708)^2 = 1{,}385\ J$$

En la poción B, la deformación del resorte es $30 - 20 = 10\ cm = 0{,}1\ m$ y su energía potencial es:

$$E_{PB} = \frac{1}{2}K(def_B)^2 = \frac{1}{2}(12{,}5)(0{,}1)^2 = 0{,}0625\ J$$

En la posición inicial A, como la cuenta parte del reposo $E_{kA} = 0$; pero en posición final B

$$E_{kB} = \frac{1}{2}\left(\frac{2{,}5}{9{,}8}\right)v_B^2 = 0{,}127\ v_B^2$$

Aplicando la conservación de la energía:

$$E_{PA} + E_{kA} = E_{PB} + E_{kB} \quad \Longrightarrow \quad 1{,}385 + 0 = \; 0{,}0625 \; + 0{,}127\, v_B^2$$

Despejando;

$$v_B = 3{,}22 \; m/s$$

b) En la posición *B*, la fuerza centrífuga empuja hacia fuera del círculo y el resorte también tira hacia fuera. Luego, la fuerza total que sentirá el alambre será:

$$F = m\frac{v^2}{R} + Kx = \frac{2{,}5}{1{,}8}\frac{(3{,}22)^2}{0{,}3} + (12{,}5)(0{,}1) = 10{,}06\, N$$