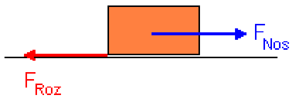
TRABAJO Y ENERGÍA. CUESTIONES y PROBLEMAS

a) Un hombre rema en un bote contra corriente, de manera que se encuentra en reposo respecto a la orilla. ¿Realiza trabajo?
b) ¿Se realiza trabajo cuando se arrastra un mueble con velocidad constante?

a) El hombre realiza trabajo porque está ejerciendo una fuerza con los remos y además hay desplazamiento, lo que ocurre es que se mueve con la misma velocidad que la corriente del río y en sentido contrario y por tanto permanece en reposo respecto de un observador en la orilla. Dicho de otra forma, lo que el hombre avanza se lo hace retroceder la corriente y prueba de ello es que si dejase de remar el río lo arrastraría aguas abajo.

b) Naturalmente que sí, puesto que para arrastrarlo con velocidad constante (sin aceleración) es preciso que la fuerza resultante sobre el mueble sea nula, así que nosotros tendremos que hacer una fuerza igual y de sentido contrario a la de rozamiento máxima del mueble contra el suelo.



Sin embargo, el trabajo total, que es debido a la fuerza resultante, sí que es nulo porque el trabajo que realizamos nosotros para arrastrar el mueble ($W_{Nos}=F_{nos}\cdot s\cdot \cos 0$) es igual y de signo contrario al que realiza la fuerza de rozamiento ($W_{Roz}=F_{Roz}\cdot s\cdot \cos 180$).

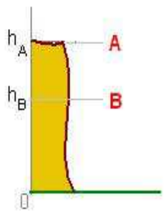
E1B.S2008

a) Principio de conservación de la energía mecánica.
b) Desde el borde de un acantilado de altura h se deja caer libremente un cuerpo. ¿Cómo cambian sus energías cinética y potencial? Justifique la respuesta.

a) Teoría

b) Si despreciamos el rozamiento contra el aire, se conservará la energía mecánica y si además consideramos que la altura del acantilado es despreciable frente al radio de la tierra, podemos tomar a la gravedad como una constante.

Cuando el cuerpo descienda del punto A al B, la variación de *Ec* y *Ep* que tendrá lugar será:



$$\Delta Ep = Ep_B - Ep_A = mgh_B - mgh_A = mg(h_B - h_A) < 0$$

$$\Delta Ec = Ec_B - Ec_A = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 = \frac{1}{2}m(v_B^2 - v_A^2) > 0$$

De acuerdo al principio de conservación de la energía mecánica, $\Delta Ep\downarrow + \Delta Ec\uparrow = 0$, la disminución de energía potencial (porque al caer va disminuyendo) debe ser igual al aumento de la energía cinética para que sigan sumando cero

E3B.S2004

a) ¿Qué se entiende por fuerza conservativa? Explique la relación entre fuerza y energía potencial.
b) Sobre un cuerpo actúa una fuerza conservativa. ¿Cómo varía su energía potencial al desplazarse en la dirección y sentido de la fuerza? ¿Qué mide la variación de energía potencial del cuerpo al desplazarse desde un punto A hasta otro B? Razone las respuestas.

a) Las fuerzas conservativas son aquellas que:

- No merman la capacidad de realizar trabajo de un cuerpo
- Aquellas que al llevar un cuerpo de un punto A hasta otro B, realizan un trabajo que no depende el camino seguido: $W_{A\to B,c1} = W_{A\to B,c2}$, sino que solamente de la posición de los puntos inicial y final.
- Aquellas que al recorrer una trayectoria cerrada hacen un trabajo nulo: $\oint \vec{F}\bullet d\vec{r} = 0$

Precisamente porque el trabajo que realiza la fuerza F conservativa, solo depende de la posición de los puntos inicial y final, se define una energía asociada a la posición que llamamos energía potencial. Por definición, el trabajo realizado por la fuerza conservativa para llevar una partícula desde un punto A hasta otro B es igual al a "menos" incremento de energía potencial.

$$W_{\substack{A\to B\\ F.Conservativa}} = -\Delta Ep$$

O lo que es igual: "El trabajo que hacemos nosotros para llevar un cuerpo desde un punto A hasta otro B, contra las fuerzas del campo y sin aceleración, es igual a la variación de energía potencial entre esos puntos"

$$W_{\substack{A\to B\\ nosotros}} = Ep_B - Ep_A = \Delta Ep = -W_{\substack{A\to B\\ F.Conserv.Campo}}$$

b1) Disminuye. Supongamos que la fuerza conservativa sea constante (aunque el resultado sería igual si no lo fuera). Al ser constante podemos utilizar la expresión particular para el trabajo y poner que $W_{A\to B,F.Conservativa} = F_{Conserv}\cdot s\cdot \cos\alpha = F_{Conserv}\cdot s\cdot \cos 0 = +$ donde hemos tenido en cuenta que como el cuerpo se desplaza "en la dirección y sentido de la fuerza conservativa" α=0 y en consecuencia el trabajo que hace la fuerza conservativa es positivo.

Ahora, teniendo en cuenta que por definición el trabajo que hace una fuerza conservativa para llevar un cuerpo desde un punto a otro es igual a "menos" la variación de energía potencial entre esos puntos:

$$W_{\substack{A\to B\\ F.Conservativa}} = -\Delta Ep = Ep_A - Ep_B = + \quad\Rightarrow\quad Ep_A > Ep_B$$

Es el caso de una piedra que cae en el vacío. Obviamente el ángulo formado por la fuerza peso (que es conservativa) y el desplazamiento es cero y su coseno 1, por tanto $W_{A\to B,F.Conservativa} = F_{Conserv}\cdot s\cdot \cos 0 = +$ y la piedra se mueve desde el punto de mayor Ep hasta el de menor Ep.

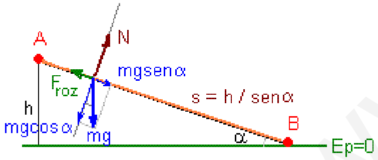
De acuerdo con la definición $W_{A\to B,F.Conservativa} = -\Delta Ep$ el signo menos se interpreta como que la fuerza conservativa realiza trabajo real (trabajo positivo) cuando desplaza el cuerpo desde los puntos de mayor energía potencial a los puntos con menor energía potencial, es decir la Ep disminuye cuando desplaza al cuerpo en la dirección y sentido de la fuerza conservativa.

b2) Hemos dicho que $W_{A\to B,F.Conserv} = -\Delta Ep$. Como el trabajo que hacemos nosotros para llevar un cuerpo de un punto a otro es igual, con el signo cambiado, al que hace la fuerza conservativa (porque la fuerza que debemos hacer es igual y de sentido opuesto a la conservativa) $W_{A\to B,F.Conserv} = -\Delta Ep = -W_{A\to B,nosotros}$, que nos dice que la variación de energía potencial entre dos puntos es igual al trabajo que hacemos nosotros para llevar un cuerpo desde un punto A hasta otro B, contra las fuerzas del campo y sin aceleración.
Por otro lado, si todas las fuerzas son conservativas se conservará la energía mecánica, $\Delta Ec + \Delta Ep = 0$ por tanto, la variación de energía potencial es igual a la variación de energía cinética con el signo cambiado.

E1B.S2009

a) Explique el principio de conservación de la energía mecánica y en qué condiciones se cumple.
b) Un automóvil desciende por un tramo pendiente con el freno accionado y mantiene constante su velocidad. Razone los cambios energéticos que se producen.

a) Teoría
b) En este caso, obviamente, no se conserva la energía mecánica, ya que la energía cinética no varía y entones la disminución de la energía potencial se transforma en trabajo realizado contra la fuerza de rozamiento, que no es conservativa, y que finalmente se transforma en calor.



Aplicando el principio de conservación de la energía total entre los puntos A y B, tendremos:

$$Ec_A + Ep_A + W_{\substack{A\to B\\ F.NoConservat}} = Ec_B + Ep_B$$

- En este caso la fuerza no conservativa es la fuerza de rozamiento
- De acuerdo con la segunda ley de Newton, si el automóvil baja con velocidad constante, la suma de todas las fuerzas sobre él debe ser cero y, como se deduce de la figura, la fuerza de rozamiento debe ser igual a la componente del peso en la dirección del plano: $F_{roz} = mgsen\alpha$ y lleva sentido contrario al movimiento. En forma de vector sería $\vec F_{roz} = mgsen\alpha\,(-\vec i)$
- El trabajo realizado por la fuerza de rozamiento es negativo, precisamente porque tiene sentido contrario al desplazamiento, es decir forma ángulo de 180 con el desplazamiento. Teniendo en cuenta que el espacio recorrido es s=h/senα :

$$W_{\substack{A\to B\\ F.NoConservat}} = W_{roz} = F_{roz}\cdot s\cdot \cos 180 = -F_{roz}\cdot s = -mg\,sen\alpha\cdot\frac{h}{sen\alpha} = -mgh$$

$$W_{roz} = \int_A^B \vec F_{roz}\bullet d\vec r = \int_A^B -mgsen\alpha\,\vec i\bullet dx\,\vec i = \int_{x_A=0}^{x_B=s} -mgsen\alpha\,dx = -mg\,sen\alpha\cdot[x]_0^s = -mgsen\alpha\cdot s = -mgh$$

Sustituyendo en la expresión de la conservación de la energía total, y teniendo en cuenta que si la velocidad no varía la energía cinética es la misma en los puntos A y B, y tomando nivel cero de energía potencial en el punto B, tendremos que:

$$\cancel{Ec_A} + Ep_A - mgh = \cancel{Ec_B} + \cancel{Ep_B}$$

de donde se deduce que $Ep_A = mgh$, es decir, toda la energía potencial que tenía en el punto A se ha perdido en trabajo de rozamiento, es decir se ha disipado en forma de calor.

E3B.S2009

En un instante t_1 la energía cinética de una partícula es 30J y su energía potencial es 12J. En un instante posterior, t_2, la energía cinética de la partícula es 18J.
a) Si únicamente actúan fuerzas conservativas sobre la partícula ¿Cuál es su energía potencial en el instante t_2?
b) Si la energía potencial en el instante t_2 fuese 6 J, ¿actuarían fuerzas no conservativas sobre la partícula?. Razone las respuestas.

a) Deduce el teorema de conservación de la energía mecánica. Del mismo se desprende que si sobre un cuerpo actúan solo fuerzas conservativas se conserva la energía mecánica:

$$Ec_A + Ep_A = Ec_B + Ep_B = E = const$$

$$30 + 12 = 18 + Ep \quad\Rightarrow\quad Ep = 24 Julios$$

b) Deduce el teorema de conservación de la energía en su forma general, de él se deduce que:

$$Ec_A + Ep_A + W_{\substack{A\to B\\ F.NoConservat}} = Ec_B + Ep_B$$

$$30 + 12 + W_{\substack{A\to B\\ F.NoConservat}} = 18 + 6 \quad\Rightarrow\quad W_{\substack{A\to B\\ F.NoConservat}} = -18 Julios$$

Dependiendo del signo del trabajo de las fuerzas no conservativas la energía mecánica al final puede ser mayor o menor que la inicial. En el caso que nos ocupa la energía mecánica final (24J) es menor que la inicial (42J), seguramente debido a la existencia de fuerzas de rozamiento, ya que el trabajo que realizan es negativo (porque al llevar sentido contrario al desplazamiento el ángulo que forma la F_{roz} y el desplazamiento es de 180, o si hiciéramos el tratamiento vectorial al realizar el producto escalar $\vec{F}_{Roz} \bullet d\vec{r}$ tendremos siempre, por ejemplo $-\vec{i} \bullet \vec{i} = -1$) la energía al final siempre será menor que la inicial.

E4B.S2010

a) Explique qué son fuerzas conservativas. Ponga un ejemplo de fuerza conservativa y otro de fuerza que no lo sea.
b) ¿Se puede afirmar que el trabajo realizado por todas las fuerzas que actúan sobre un cuerpo es siempre igual a la variación de su energía cinética? ¿Es igual a la variación de su energía potencial? Razone las respuestas.

a) Teoría

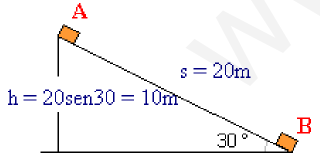
b) Sí, el Teorema de la Fuerzas Vivas dice: El trabajo realizado por todas las fuerzas es igual a la variación de su energía cinética.

La segunda parte es falso ya que, de acuerdo con la definición $W_{A\to B,F.Conserv} = -\Delta Ep$, solamente en el caso de que todas las fuerzas sean conservativas el trabajo realizado por las fuerzas es igual a la variación de energía potencial cambiada de signo.

E5B.S2007
Un trineo de 100 kg parte del reposo y desliza hacia abajo por una ladera de 30º de inclinación respecto a la horizontal.
a) Explique las transformaciones energéticas durante el desplazamiento del trineo suponiendo que no existe rozamiento y determine, para un desplazamiento de 20 m, la variación de sus energías cinética y potencial.
b) Explique, sin necesidad de cálculos, cuáles de los resultados del apartado a) se modificarían y cuáles no, si existiera rozamiento.
$g = 10\ m\ s^{-2}$

a) Como no hay rozamiento y únicamente desliza bajo la acción de la fuerza peso, que es una fuerza central y por tanto conservativa, se conservará la energía mecánica: $\Delta Ec + \Delta Ep = 0$ Al descender y disminuir ΔEp debe aumentar ΔEc. Dicho de otra forma, si inicialmente se encuentra en reposo, toda la energía del trineo es potencial, debida a su posición en el campo gravitatorio. y por tanto al descender, la disminución de energía potencia será igual a lo que aumentará la energía cinética:

$$\Delta Ec + \Delta Ep = 0 \quad \longrightarrow \quad Ec_A + Ep_A = Ec_B + Ep_B$$



Para un desplazamiento de 20m, sobre la pendiente de 30º, es decir para un descenso de 10m, el incremento de energía potencial

$$\Delta Ep = \cancel{Ep_B} - Ep_A = -mgh_A = -10000J$$

Como vinos en el ejercicio E3B.S2004, un cuerpo se mueve espontáneamente hacia donde su energía potencial es menor y por eso ΔEp=−
El incremento de energía cinética, teniendo en cuenta que $\Delta Ec = -\Delta Ep$ =+10000 J

$$\Delta Ec = Ec_B - \cancel{Ec_A} = +10000J$$

b) La energía potencial es una consecuencia de que el campo gravitatorio es conservativo y solamente depende de la posición, así que si los puntos A y B siguen siendo los mismos, la variación de energía potencial entre ellos seguirá siendo la misma. Sin embargo ahora no se conserva la energía mecánica, así que toda esa energía potencial que pierde no se transforma en incrementar su energía cinética, porque ahora una parte se desprenderá en forma de calor por efecto del rozamiento, ya que:

$$\Delta Ec + \Delta Ep = W_{\substack{A\to B \\ F.NoConservat}}$$

Debes tener en cuenta que si la fuerza no conservativa es la de rozamiento el trabajo que realiza es negativo, ya que la fuerza de rozamiento y el desplazamiento forman 180º y su coseno es –1. Así, por ejemplo, si el W_{Roz}=−2000J, entonces ΔEc=8000J.

E1A.S2003
Conteste razonadamente a las siguientes preguntas:
a) Si la energía mecánica de una partícula permanece constante, ¿puede asegurarse que todas las fuerzas que actúan sobre la partícula son conservativas?
b) Si la energía potencial de una partícula disminuye, ¿tiene que aumentar su energía cinética?

a) De acuerdo con el principio de conservación de la energía:

$$Ec_A + Ep_A + W_{\substack{A\to B \\ F.NoConservat}} = Ec_B + Ep_B \quad \longrightarrow \quad W_{\substack{A\to B \\ F.NoConservat}} = \Delta Ec_{Mecánica}$$

resulta evidente que si la variación de energía mecánica es nula, el trabajo realizado por las fuerzas no conservativas es nulo. No obstante eso no quiere decir que no las haya, aunque de haberlas el trabajo realizado por todas ellas debe ser nulo, sería el caso de un coche donde el motor ejerza una fuerza igual a la de rozamiento.

b) El principio de conservación de la energía también puede escribirse como:

$$\Delta Ec + \Delta Ep = W_{\substack{A\to B \\ F.NoConservat}}$$

Como vemos, si el trabajo realizado por las fuerzas no conservativas es nulo entonces podemos decir que si disminuye la energía potencial deberá aumentar la energía cinética en la misma medida. Pero en el caso de que existan fuerzas no conservativas no puede asegurarse.

Un ejemplo sencillo lo tenemos en un cuerpo que desciende frenando por un plano inclinado. En tal caso la energía potencial disminuye y puesto que baja frenando también disminuye su energía cinética. No obstante, la energía total sigue conservándose ya que la disminución de energía mecánica será igual a la perdida en rozamiento.

E2B.S2001
Comente las siguientes afirmaciones:
a) Un móvil mantiene constante su energía cinética mientras actúa sobre él: i) una fuerza; ii) varias fuerzas.
b) Un móvil aumenta su energía potencial mientras actúa sobre él una fuerza.

a) El Teorema de la Fuerzas Vivas dice: El trabajo realizado por todas las fuerzas es igual a la variación de su energía cinética, $W_{A\rightarrow B} = \Delta Ec$, por tanto:
i) Falso. Una sola fuerza siempre dará lugar a una variación de energía cinética (aumentándola si la fuerza lleva la dirección del movimiento o disminuyéndola si lleva sentido contrario, como ocurre si un coche va acelerando o va frenando)
ii) Podría ser verdad, pero siempre que las dos fuerzas dieran resultante nula

b) Depende. Si solamente hay fuerzas conservativas sería Falso, porque una fuerza conservativa nunca hará que aumente la energía potencial, sino todo lo contrario, ya que por definición $W_{A\rightarrow B,F.Conservativa} = -\Delta Ep$ lo que quiere decir que la fuerza conservativa, de forma espontánea, llevará siempre al cuerpo desde el punto de mayor Ep al de menor Ep. (Así un cuerpo siempre cae hacia abajo o un resorte siempre tiende a su posición de equilibrio, pero no al revés.)

También sería Falso si el cuerpo se mueve por una superficie equipotencial, porque $\Delta Ep=0$. (que es lo que ocurre cuando sujetamos un cuerpo con la mano y lo desplazamos horizontalmente o cuando la luna gira alrededor de la tierra). En efecto, ya que $W_{A\rightarrow B,F.Conserv} = Ep_A - Ep_B = m(V_A - V_B)$ y al desplazarse entre dos putos del mismo potencial ($V_A=V_B$), la expresión anterior es igual a cero.
A la misma conclusión llegaríamos teniendo en cuenta que la intensidad de campo es un vector perpendicular a la superficie equipotencial, lo que implica que la fuerza también lo es, y por tanto el trabajo para un desplazamiento de un punto a otro de la superficie equipotencial es nulo porque $\vec{F} \perp d\vec{r}$.

No obstante puede ser cierto, si la fuerza en cuestión fuese no conservativa y tuviera la dirección y sentido del desplazamiento, ya que de acuerdo con el principio de conservación de la energía $\Delta Ec + \Delta Ep = W_{\substack{A\rightarrow B\\ F.NoConservat}}$ podría aumentar su energía potencial, aunque no necesariamente, porque puede limitarse a aumentar la energía cinética o ambas. Serían los casos de un coche que sube una cuesta manteniendo la velocidad ($W_{F.NoConserv}=\Delta Ep\uparrow$), de un coche que acelera por una carretera horizontal ($W_{F.NoConserv}=\Delta Ec\uparrow$), o una mezcla de ambas situaciones.

E3A.S2007
¿Puede ser negativa la energía cinética de una partícula? ¿Y la energía potencial? En caso afirmativo explique el significado físico del signo.
b) ¿Se cumple siempre que el aumento de energía cinética es igual a la disminución de energía potencial? Justifique la respuesta.

a) La energía cinética no puede ser nunca negativa, ya que es la energía que una partícula que tiene como consecuencia de la velocidad. La energía potencial, sí que puede ser negativa como ocurre en el caso de dos masas y de dos cargas de distinto signo. El signo menos indica que una partícula es atraía hacia la otra.

b) Solamente es cierto en el caso de un campo de fuerzas conservativo y donde no existan otro tipo de fuerzas.
De acuerdo con el principio de conservación de la energía total:

$$\Delta Ec + \Delta Ep = W_{\substack{A\rightarrow B\\ F.NoConservat}}$$

Como puede verse, si hay fuerzas no conservativas, el aumento de ΔEc no es igual a la disminución de ΔEp. Si las fuerzas no conservativas tienen sentido contrario al desplazamiento (como la de rozamiento) como su trabajo es negativo la energía mecánica final será menor que la inicial. Pero si se trata de fuerzas no conservativas que actúan en la dirección y sentido del desplazamiento (como la que ejerce el motor de un coche) la energía mecánica aumentará. Este último caso sería el de un coche que sube acelerando por una pendiente: ΔEp aumenta y también ΔEc y todo ello a costa del trabajo realizado por el motor.

E6A.S2007
Conteste razonadamente a las siguientes preguntas:
a) ¿Puede asociarse una energía potencial a una fuerza de rozamiento?
b) ¿Qué tiene más sentido físico, la energía potencial en un punto o la variación de energía potencial entre dos puntos?

a) La fuerza de rozamiento es una fuerza disipativa y por tanto no se le puede asociar una energía potencial, ya que el trabajo realizado para llevar un cuerpo desde un punto A hasta otro punto B depende del camino seguido y no exclusivamente de la posición de los puntos inicial y final. Eso no ocurre con las fuerzas conservativas, y por eso precisamente a esos puntos se le puede asociar una energía “que solamente depende de la posición” y que llamamos energía potencial.

b) Por definición, el trabajo que hace una fuerza conservativa para llevar un cuerpo desde un punto A hasta otro B es igual a menos la variación de energía potencial entre esos puntos: $W_{A\rightarrow B,F.Conserv.Campo} = -\Delta Ep = Ep_A - Ep_B$. Por tanto, es evidente que, solamente tiene sentido hablar de variación de energía potencial entre dos puntos.

De hecho, la energía potencial en un punto realmente es también la diferencia de potencial entre dos puntos, solo que uno de ellos (por ejemplo el infinito) le asignamos por acuerdo energía potencial nula. Así:

$$W_{\underset{\text{F.Conserv.Campo}}{A\to\infty,}} = -\Delta Ep = Ep_A - \cancel{Ep_\infty}$$

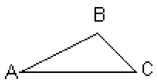
según esto, la energía potencial gravitatoria de una masa en un punto A es igual al trabajo que el campo gravitatorio debe hacer para llevar esa masa hasta el infinito, al que se le asigna $Ep_\infty = 0$ (También podemos definirlo como el trabajo que nosotros hemos de hacer para traer una masa desde el infinito hasta ese punto).

E5A.S2006

Una masa M se mueve desde el punto A hasta el B de la figura y posteriormente desciende hasta el C. Compare el trabajo mecánico realizado en el desplazamiento A→B→C con el que se hubiera realizado en un desplazamiento horizontal desde A hasta C.

a) Si no hay rozamiento.
b) En presencia de rozamiento.

Justifique las respuestas.



a) Si no hay rozamiento, puesto que el trabajo realizado por las fuerzas conservativas es independiente del camino seguido y solo depende de la posición inicial y final, es evidente que el trabajo realizado a través de la trayectoria ABC es el mismo que el realizado por la trayectoria AC. De acuerdo con la definición de energía potencial, el trabajo sería:

$$W_{\underset{\text{F.Conservat}}{A\to C}} = -\Delta Ep = Ep_A - Ep_C$$

si lo hiciéramos nosotros

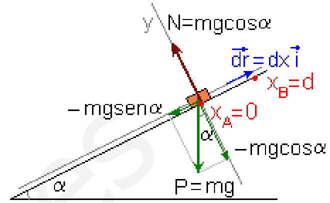
$$W_{\underset{\text{Nosotros}}{A\to C}} = \Delta Ep = Ep_C - Ep_A$$

b) Al haber rozamiento el trabajo ya sí que depende del camino seguido, porque la fuerza de rozamiento no es conservativa. Como los puntos A y C son los mismos que antes, la variación de energía potencial sigue siendo la misma que antes, pero el trabajo de rozamiento, en valor absoluto, será mayor por el camino más largo porque el trabajo realizado por la fuerza de rozamiento es directamente proporcional al desplazamiento. Por tanto el trabajo a través de la trayectoria ABC será mayor que el realizado por la trayectoria AC.

E3B.S2008

a) Explique la relación entre fuerza conservativa y variación de energía potencial.
b) Un cuerpo desliza hacia arriba por un plano inclinado que forma un ángulo α con la horizontal. Razone qué trabajo realiza la fuerza peso del cuerpo al desplazarse éste una distancia d sobre el plano.
c) Variación de energía potencial
d) Variación de energía cinética

a) Igual al E3B.S2004
b) Como puede verse en la figura, donde se han dibujado las fuerzas que hay sobre el cuerpo (peso y reacción del plano)



Teniendo en cuenta que la fuerza peso es una fuerza conservativa, y que por definición $W_{\underset{\text{F.Conservat}}{A\to B}} = -\Delta Ep = Ep_A - Ep_B$. Si asignamos $Ep_A=0$ y teniendo en cuenta que $h_B=d\cdot sen\alpha$, nos quedaría que:

$$W_{\underset{\text{F.Conservat(PESO)}}{A\to B}} = -\Delta Ep = \cancel{Ep_A} - Ep_B = -m\,g\,h_B = -m\,g\cdot d\,sen\alpha$$

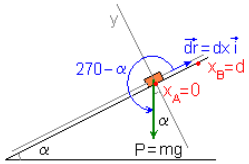
También podríamos calcular el trabajo que hace el peso aplicando la definición de trabajo: Teniendo en cuenta que el vector desplazamiento es $d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k} = dx\vec{i}$ porque el cuerpo solamente se desplaza a lo largo del eje X:

$$W_{A\to B,peso} = \int_A^B \vec{P}\bullet d\vec{r} = \int_A^B (-mgsen\alpha\cdot\vec{i} - mg\cos\alpha\cdot\vec{j})\bullet dx\cdot\vec{i}$$

Teniendo en cuenta que $\vec{i}\bullet\vec{i} = 1$ y que $\vec{j}\bullet\vec{i} = 0$ porque forman 90º, nos queda que: (como ya se deduce de la figura $-mgsen\alpha\cdot\vec{i}$ es la única componente del peso que realiza trabajo porque es la que tiene la dirección del desplazamiento)

$$W_{A\to B,peso} = \int_A^B \vec{P}\bullet d\vec{r} = \int_{x=0}^{x=d} -mgsen\alpha\cdot dx = -mgsen\alpha\,[x]_o^d = -mgsen\alpha\,(d-0) = -mg\,d\,sen\alpha$$

A la misma conclusión habríamos llegado aplicando la definición particular de trabajo para el caso de fuerzas constantes. Pero mucho cuidado de no confundir los ángulos, que una cosa es el ángulo que el plano forma con la horizontal (α) y otra cosa el ángulo que la fuerza forma con el desplazamiento (270−α).



$$W_{A\to B,peso} = P\cdot s\cdot\cos(270-\alpha) = mg\cdot d\cdot\cos(270-\alpha)$$

Teniendo en cuenta que cos(270−α)=−senα

$$W_{A\to B,peso} = -mg\,d\,sen\alpha$$

También habríamos llegado a la misma conclusión teniendo en cuenta que solamente realiza trabajo la componente de la fuerza que lleva su misma dirección, esto es: la componente del peso P_x=mgsenα. Como esta componente forma 180º con el desplazamiento: $W_{A\to B,peso} = mgsen\alpha\cdot d\cdot\cos 180 = -mg\,d\,sen\alpha$.

El signo menos del trabajo realizado por el peso al subir el cuerpo desde el punto A hasta el punto B indica que el peso realmente no hace trabajo. (Como sabes, ese trabajo se debe a la energía cinética que el cuerpo debe tener en el punto A)

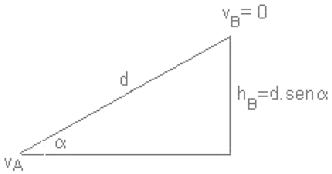
c) Como, por definición, el trabajo realizado por la fuerza conservativa (el peso en este caso) para llevar la partícula desde un punto A hasta otro B es igual al a "menos" incremento de energía potencial.

$$W_{A\to B,F.Conservativa} = -\Delta Ep = -mg\,d\,sen\alpha$$

Resulta que $\Delta Ep = mg\,sen\alpha \cdot d$ que es positiva, como es lógico, ya que está subiendo.

d) De acuerdo al principio de conservación de la energía mecánica, $\Delta Ec + \Delta Ep = 0$, por tanto $\Delta Ec = -mg\,d\,sen\alpha$ que es negativo, lo que indica que al ir subiendo va perdiendo velocidad.

De otra forma:



Si tomamos nivel cero de Ep en el punto A entonces

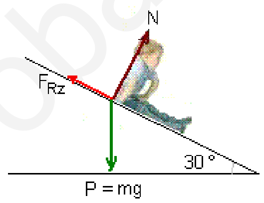
$$\Delta Ep = Ep_B - Ep_A = mgh_B - 0 = mg\,d\,sen\alpha$$

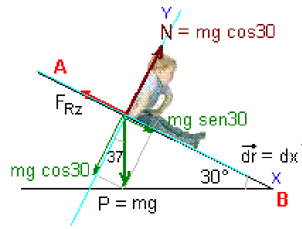
$$\Delta Ec + \Delta Ep = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta Ec = -mg\,d\,sen\alpha$$

TRABAJO Y ENERGÍA. PROBLEMAS

Un niño montado sobre un trineo de 50 Kg parte del reposo y desliza 20 m hacia abajo por una colina inclinada 30º respecto de la horizontal. El coeficiente de rozamiento entre la ladera de la colina y el trineo es 0,2. Calcular:
a) Trabajo realizado por la fuerza gravitatoria.
b) Trabajo realizado por la fuerza de rozamiento.
c) Energía cinética ganada por el trineo.
d) Tiempo que tarda en recorrer los 20 m.

Las fuerzas que actúan sobre el trineo son el peso, la reacción del plano y la fuerza de rozamiento:





Vamos a resolver el ejercicio utilizando la expresión general del trabajo, aunque no es necesario al tratarse de fuerzas constantes. Elegimos para descomponer las fuerzas un SR con el eje X en la dirección del movimiento. Respecto de ese SR, las tres fuerzas que actúan sobre el trineo son:

$$\vec{P} = mg\,sem30\,\vec{i} - mg\,\cos 30\,\vec{j}$$
$$\vec{N} = \qquad\qquad mg\,\cos 30\,\vec{j}$$
$$\vec{F}_{Roz} = -mg\,\cos 30 \cdot \mu\,\vec{i}$$

Por otro lado, el vector desplazamiento en su forma general se escribe como $d\vec{r} = dx\,\vec{i} + dy\,\vec{j} + dz\,\vec{k}$. En el SR elegido el trineo solamente se desplaza a lo largo del eje X, por tanto el vector desplazamiento se reduce a $d\vec{r} = dx\,\vec{i}$

a) El trabajo realizado por la fuerza gravitatoria, es decir por la fuerza peso, será:

$$W_{Peso,A\to B} = \int_A^B \vec{P} \bullet d\vec{r} = \int_{x=0}^{x=20} (mg\,sen30\,\vec{i} - mg\,\cos 30\,\vec{j}) \bullet dx\,\vec{i}$$

teniendo en cuenta al resolver el producto escalar que $\vec{i} \bullet \vec{i} = 1$ porque tienen la misma dirección y que $\vec{j} \bullet \vec{i} = 0$ porque son vectores perpendiculares y el cos90=0. Nos queda:

$$W_{Peso,A\to B} = \int_{x=0}^{x=20} mg\,sen30\,dx = mg\,sen30\,x\Big|_0^{20} = mg\,sen30 \cdot 20 = 5000J$$

El trabajo realizado por el peso, al tratarse de una fuerza conservativa, podemos calcularlo también teniendo en cuenta que por definición $W_{\substack{A\to B\\ F.Conservat}} = -\Delta Ep = Ep_A - Ep_B$.

Si asignamos $Ep_B=0$ y teniendo en cuenta que $h_A=20\cdot sen30$, nos quedaría que:

$$W_{\substack{A\to B\\ F.Conservat(PESO)}} = -\Delta Ep = Ep_A - \cancel{Ep_B} = m\,g\,h_A = m\,g\cdot 20 sen30 = 5000J$$

Como hemos dicho, al tratarse de fuerzas constantes no es necesario utilizar la expresión general del trabajo y podríamos haber llegado a la misma conclusión aplicando la expresión particular del trabajo para este tipo de fuerzas, así:

$$W = Fs\,\cos\alpha = F_\tau\, s$$

donde F_τ es la fuerza en la dirección del desplazamiento, que es la única que realiza trabajo, que en este caso es la componente del peso: $mg\,sen30$

$$W = mg\,sen30\cdot s = 50\cdot 10\cdot sen30\cdot 20 = 5000J$$

Realmente, esta manera de resolver parece más corta, pero no es ni más ni menos difícil. Sin embargo, la forma general tiene la ventaja de que siempre es la misma para cualquier tipo de fuerza, mientras que esta última no nos valdría si la fuerza fuese variable, como por ejemplo en el caso de un resorte.

b) De la misma forma:

$$W_{Roz,A\to B} = \int_A^B \vec{F}_{Roz}\bullet d\vec{r} = \int_{x=0}^{x=20} -mg\,\cos30\cdot\mu\,\vec{i}\bullet dx\,\vec{i} = \int_{x=0}^{x=20} -mg\,\cos30\cdot\mu dx$$

$$W_{Roz,A\to B} = -mg\,\cos30\cdot\mu\left|x\right|_0^{20} = -50\cdot 10\cos30\cdot 0{,}2\cdot 20 = -1732J$$

Igualmente, al ser la fuerza de rozamiento una fuerza constante podemos aplicar la expresión particular del trabajo:

$$W_{Roz,A\to B} = F_{Roz}\cdot s\cdot\cos\alpha = (mg\cos30\cdot\mu)\cdot s\cdot\cos180 = (50\cdot 10\cos30\cdot 0{,}2)\cdot 20\cdot\cos180 = -1732J$$

c) Para calcular la variación de energía cinética del trineo aplicaremos el principio de conservación de la energía. (Ten en cuenta que, por definición, el trabajo que hace una fuerza conservativa (el peso en este caso) para llevar el cuerpo desde el punto A hasta el B es igual a "menos" la variación de energía potencial, así que ΔEp=−5000 J)

$$\Delta Ec + \Delta Ep = W_{\substack{A\to B\\ F.NoConservat}}$$

$$\Delta Ec\ + (-5000) = -1732 \qquad \to \qquad \Delta Ec\ = 3268\ J$$

También podríamos calcular la variación de Ec aplicando teorema del trabajo y la energía cinética o teorema de las fuerzas vivas, que dice que “el trabajo total realizado sobre el trineo es igual a su variación de energía cinética”:

$$W_{A\to B,F.Resultante} = \Delta Ec = Ec_B - Ec_A$$

El trabajo total es la suma del trabajo realizado por las tres fuerzas que actúan sobre el trineo, y como la Normal no realiza trabajo por ser perpendicular al desplazamiento, nos queda que :

$$W_{A\to B,F.Resultante} = 5000 + (-1732) = 3268J$$

como el trineo en el punto A estaba en reposo, y por tanto su energía cinética inicial es cero, nos queda finalmente que:

$$3268 = \frac{1}{2}m\,v_B^2 \qquad \to \qquad v_B = 11{,}4\,m/s$$

d) Para poder calcular el tiempo sí que tenemos que utilizar las ecuaciones de la cinemática, lo que pasa es que podemos aprovechar que ya sabemos la velocidad final y plantearlas directamente:

$$\left.\begin{array}{l} v = v_o + a\,t \\ s = v_o t + \frac{1}{2}a\,t^2 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} 11{,}4 = a\,t \\ 20 = \frac{1}{2}a\,t^2 \end{array}\right\} \qquad a=3{,}26\ m.s^2,\quad t=3{,}5\ s$$

Al mismo resultado llegaríamos en los apartados c) y d) por métodos dinámicos, es decir, calculando la fuerza resultante sobre el trineo, aplicando la segunda ley de Newton para calcular la aceleración y por último aplicando las ecuaciones de la cinemática para el movimiento uniformemente acelerado. La fuerza resultante sobre el trineo, se deduce de la figura, que es:

$$F_{Resultante} = mg\,sen30 - F_{Roz} = 163{,}4\,N$$

aplicando la 2ª ley de Newton: $F = m\,a \ \to\ 163{,}4 = 50\,a \ \to\ a=3{,}26\ m.s^2$

Ecuaciones de la cinemática:

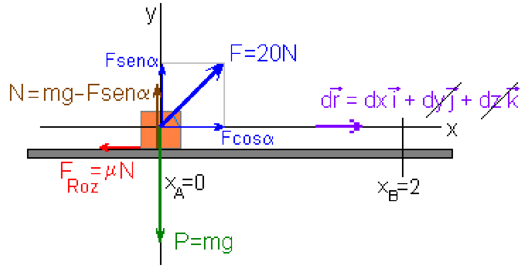
$$\left.\begin{array}{l} v = v_o + a\,t \\ s = v_o t + \frac{1}{2}a\,t^2 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} v = 3{,}26\,t \\ 20 = \frac{1}{2}3{,}26\,t^2 \end{array}\right\} \qquad v=11{,}4\ m/s,\quad t=3{,}5\ s$$

E6A.S2013

Un bloque de 5 kg se desliza con velocidad constante por una superficie horizontal rugosa al aplicarle una fuerza de 20 N en una dirección que forma un ángulo de 60º sobre la horizontal.

a) Dibuje en un esquema todas las fuerzas que actúan sobre el bloque, indique el valor de cada una de ellas y calcule el coeficiente de rozamiento del bloque con la superficie.

b) Determine el trabajo total de las fuerzas que actúan sobre el bloque cuando se desplaza 2 m y comente el resultado obtenido. $g = 9{,}8\ m\ s^{-2}$



a) Las cuatro fuerzas que actúan sobre el cuerpo, respecto del SR elegido serían:

$$\vec F = 20\cos 60\,\vec i + 20\mathrm{sen}60\,\vec j \qquad = 10\,\vec i \;+\; 17{,}32\,\vec j$$
$$\vec P = \qquad -5\cdot 9{,}8\,\vec j \qquad = \qquad -49\,\vec j$$
$$\vec N = \qquad +(5\cdot 9{,}8 - 20\mathrm{sen}60)\,\vec j = \qquad +31{,}68\,\vec j$$
$$\vec F_{Roz} = -\,(5\cdot 9{,}8 - 20\mathrm{sen}60)\cdot\mu\,\vec i \qquad = -\,31{,}68\cdot\mu\,\vec i$$

$$\sum \vec F = (10 - 31{,}68\cdot\mu\,)\,\vec i$$

Aplicando la segunda ley de Newton $\sum \vec F = m\,\vec a$ y teniendo en cuenta que el bloque desliza "con velocidad constante" y que por tanto la aceleración debe ser nula, tenemos que:

$$\sum \vec F = (10 - 31{,}68\cdot\mu\,)\,\vec i = 0 \qquad \rightarrow \qquad \mu = 10/31{,}68 = 0{,}32$$

b) El trabajo total podemos obtenerlo de tres formas:

- Teniendo en cuenta el teorema de las fuerzas vivas: El trabajo realizado por todas las fuerzas es igual a la variación de su energía cinética, $W_{A\rightarrow B} = \Delta Ec$. Como la velocidad es constante $\Rightarrow$ su energía cinética no varía $\Rightarrow$ W=0
- Es el trabajo que realiza la fuerza resultante, que como es nula, resulta que W=0
- Es la suma del trabajo realizado por cada una de las fuerzas. Podríamos calcular el trabajo que realiza cada fuerza por separado para desplazar el cuerpo 2m y sumar. Vamos a calcular los trabajo aplicando la definición general y laparticular:

  * Aplicando la definición general de trabajo: En este caso utilizamos la expresión vectorial de cada fuerza y tendremos en cuenta que como el cuerpo se mueve solamente a lo largo del eje X, el vector desplazamiento será $d\vec r = dx\,\vec i$

$$W_{A\rightarrow B,F} = \int_A^B \vec F \bullet d\vec r = \int_A^B (10\,\vec i + 17{,}32\,\vec j)\bullet dx\,\vec i = \int_{x=0}^{x=2} 10\,dx = \left|10x\right|_o^2 = 10\cdot 2 - 10\cdot 0 = 20J$$
$$W_{A\rightarrow B,Peso} = \int_A^B \vec P \bullet d\vec r = \int_A^B -49\,\vec j \bullet dx\,\vec i = 0$$
$$W_{A\rightarrow B,Normal} = \int_A^B \vec N \bullet d\vec r = \int_A^B 31{,}68\,\vec j \bullet dx\,\vec i = 0$$
$$W_{A\rightarrow B,FRoz} = \int_A^B \vec F_{Roz} \bullet d\vec r = \int_A^B -31{,}86\cdot 0{,}32\,\vec i \bullet dx\,\vec i = \int_{x=0}^{x=2} -10\,dx = \left|-10x\right|_o^2 = -10\cdot 2 - (-10)\cdot 0 = -20J$$

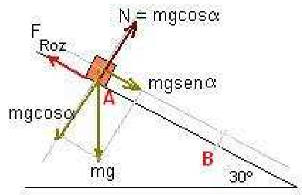
* Aplicando la particularización de trabajo para el caso de que la fuerza sea constante: En este caso utilizamos el valor de los módulos de las fuerzas y además hay que tener en cuenta que α es el ángulo que forma cada fuerza con el desplazamiento.

$$W_{A\rightarrow B,F} = F\cdot s\cdot\cos\alpha = 20\cdot 2\cdot\cos 60 = 20J$$
$$W_{A\rightarrow B,Peso} = P\cdot s\cdot\cos\alpha = 49\cdot 2\cdot\cos 270 = 0$$
$$W_{A\rightarrow B,Normal} = N\cdot s\cdot\cos\alpha = 31{,}68\cdot 2\cdot\cos 90 = 0J$$
$$W_{A\rightarrow B,FRoz} = F_{Roz}\cdot s\cdot\cos\alpha = 10\cdot 2\cdot\cos 180 = -20J$$

E4B.S2008

Un bloque de 5 kg desciende por una rampa rugosa (μ=0,2) que forma 30º con la horizontal, partiendo del reposo.
a) Dibuje en un esquema las fuerzas que actúan sobre el bloque y analice las variaciones de energía durante el descenso del bloque.
b) Calcule la velocidad del bloque cuando ha deslizado 3 m y el trabajo realizado por la fuerza de rozamiento en ese desplazamiento.
$g = 10\ m\ s^{-2}$

a) Las fuerzas sobre el bloque son:



Puesto que hay rozamiento no se conservará la energía mecánica, aunque sí la energía total: $\Delta Ec + \Delta Ep = W_{\substack{A\rightarrow B\\ F.NoConservat}}$

Teniendo en cuenta que en este caso la fuerza no conservativa es la de rozamiento y que el trabajo que hace siempre es negativo (porque la fuerza de rozamiento tiene la misma dirección del desplazamiento y sentido contrario ya que cos180=−1), la energía potencial que tiene en el punto A irá disminuyendo a medida que desciende y se irá transformando una parte en cinética y otra parte se disipará en rozamiento:

$$\cancel{Ec}_A + Ep_A + W_{\substack{A\rightarrow B\\ F.NoConservat}} = Ec_B + Ep_B$$

como $W_{\substack{A\rightarrow B\\ F.NoConservat}} = W_{Roz} = -$ sería como poner que $Ep_A = Ec_B + Ep_B + W_{perdido\ en\ roz}$

b) Cuando el bloque haya deslizado 3m sobre el plano:

- La energía cinética en A es cero, si inicialmente estaba en reposo

- la altura que habrá descendido es $h_A = 3\text{sen}30 = 1{,}5\text{m}$.
- La fuerza de rozamiento es $F_{Roz} = N\mu = mg\cos 30\mu$
- Tomamos nivel de Ep cero en el punto B, así que $Ep_B = 0$

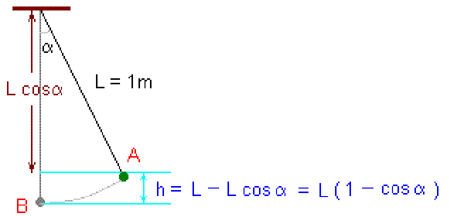
$$\cancel{Ec_A} + Ep_A + W_{\underset{F.NoConservat}{A\to B}} = Ec_B + \cancel{Ep_B}$$

$$mgh_A + F_{Roz}s\cdot\cos 180 = \frac{1}{2}mv_B^2$$

$$5\cdot 10\cdot 3\text{sen}30 + 5\cdot 10\cdot\cos 30\cdot 0{,}2\cdot 3\cdot\cos 180 = \frac{1}{2}5v_B^2$$

$$v_B = 4{,}4\text{m/s}$$

Un hilo de 1 m de longitud del que pende una masa de 2 Kg se le desplaza 30º de su posición de equilibrio y luego se suelta. ¿Qué velocidad tendrá al pasar por la posición de equilibrio?



Si aplicamos el principio de conservación de la energía mecánica entre A y B y tomamos el punto B como nivel cero de energía potencial, entonces tendremos que la energía potencial de la masa en el punto B se transformará completamente en cinética en el punto B:

$$\cancel{Ec_A} + Ep_A = Ec_B + \cancel{Ep_B}$$

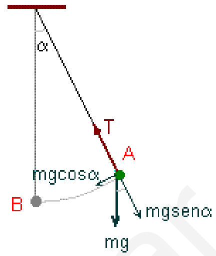
$$mgh_A = \frac{1}{2}mv_B^2$$

Como de la figura se deduce que $h_A = L(1–\cos\alpha)$, despejando la velocidad nos queda que:

$$v_B = \sqrt{2gh_A} = \sqrt{2gL(1-\cos\alpha)}$$

$$v_B = \sqrt{2\cdot 10\cdot 1\cdot(1-\cos 30)} = 1{,}6\,\text{m/s}$$

Para alumnos muy avanzados, y solamente con objeto de ver lo ventajoso que resulta resolver este tipo de ejercicios por métodos energéticos, porque se puede prescindir del tipo de fuerzas que actúan, vamos a resolver el mismo ejercicio por el método dinámico. Empezaremos por ver las fuerzas que actúan sobre la masa del péndulo:



Las únicas fuerzas que actúan sobre la masa son el peso y la tensión de la cuerda.

Descomponiendo el peso en un sistema con el eje Y en la dirección de la cuerda, como se indica en la figura, tendríamos que la tensión de la cuerda sería igual a la componente del peso en la dirección de la cuerda, anulándola. Así que la única fuerza que nos queda, y que será la responsable del movimiento del péndulo, sería:

$$F = mg\ \text{sen}\alpha$$

Como vemos la fuerza responsable del movimiento es una fuerza variable, puesto que depende del ángulo que el péndulo forma con la vertical. Aplicando la segunda ley de Newton obtenemos la aceleración, que obviamente también será variable:

$$F = m\,a$$

$$mg\,\text{sen}\alpha = m\,a \quad\rightarrow\quad a = g\,\text{sen}\alpha$$

Teniendo en cuenta que la aceleración, por definición es igual a la variación de la velocidad respecto al tiempo:

$$a = \frac{dv}{dt}$$

$$dv = a\cdot dt = g\,\text{sen}\alpha\cdot dt$$

puesto que el ángulo varía con el tiempo, para poder integrar debemos poner el ángulo en función del tiempo, o bien el tiempo en función del ángulo. Haremos lo último. Teniendo en cuenta que el ángulo y el tiempo están relacionados mediante la velocidad angular, que a su vez puede relacionarse con la velocidad lineal ($v = \omega R$):

$$\omega = \frac{d\alpha}{dt} \quad\rightarrow\quad dt = \frac{d\alpha}{\omega} = \frac{d\alpha}{v/R} = \frac{R}{v}d\alpha$$

ahora sustituyendo:

$$dv = g\,\text{sen}\alpha\cdot\frac{R}{v}d\alpha$$

agrupando las variables:

$$v\,dv = gR\,\text{sen}\alpha\cdot d\alpha$$

integrando entre la posición A y la B, para los que los límites de integración son: Para la velocidad v_A=0 y v_B=v y para el ángulo α_A=0º y α_B=30º

$$\int_0^v v\,dv = \int_0^{30} gR\,\text{sen}\alpha\,d\alpha$$

$$\left[\frac{v^2}{2}\right]_0^v = gR\left[-\cos\alpha\right]_0^{30^\circ}$$

$$\frac{v^2}{2} = gR\ (\cos 0 - \cos 30)$$

como la R es igual a la longitud del péndulo, L, y cos0º=1, tenemos:

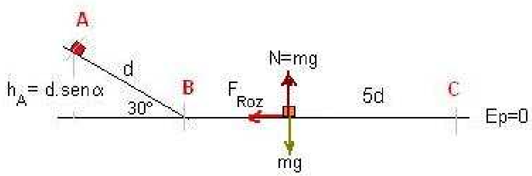
$$v = \sqrt{2gL(1-\cos\alpha)}$$

que es la misma expresión que antes obtuvimos de una manera muchísimo más fácil.

E2B.S2008

Un muchacho subido en un trineo desliza por una pendiente con nieve (rozamiento despreciable) que tiene una inclinación de 30º. Cuando llega al final de la pendiente, el trineo continúa deslizando por una superficie horizontal rugosa hasta detenerse.
a) Explique las transformaciones energéticas que tienen lugar durante el desplazamiento del trineo.
b) Si el espacio recorrido sobre la superficie horizontal es cinco veces menor que el espacio recorrido por la pendiente, determine el coeficiente de rozamiento.
$g = 10\ m\ s^{-2}$

a) Como puede verse en la figura, y si tomamos el nivel cero de *Ep* en la horizontal:



- Cuando el muchacho está en el punto A toda la energía que tiene es potencial, como consecuencia de su posición.
- A medida que desliza por el plano, como no hay rozamiento se conservará la energía mecánica, va perdiendo energía potencial y ésta se va transformando en cinética: $\Delta Ec + \Delta Ep = 0 \Rightarrow$ Cuando llega al final del plano (B) toda la energía que tiene es cinética e igual a la potencial que tenía en el punto A
- A medida que desliza por el plano horizontal su energía potencial no varía, pero ahora ya no se conserva la energía mecánica porque hay rozamiento, que es una fuerza no conservativa. La energía cinética que tenía en B la va perdiendo en rozamiento hasta llegar a C con velocidad cero: $\Delta Ec + \Delta Ep = W_{\substack{A\to B\\ F.NoConservat}}$

b) teniendo en cuenta las consideraciones anteriores, podemos decir que:

$$\cancel{Ec_A} + Ep_A + W_{F.NoConserv(Roz)B\to C} = \cancel{Ec_C} + \cancel{Ep_C}$$

balanceando entre el principio y el final:

$$mgh_A + F_{Roz}\cdot s\cdot\cos\alpha' = 0$$

Teniendo en cuenta que:
- $h_A = d\cdot sen\alpha$
- $F_{Roz} = N\mu = mg\mu$
- $s = 5d$
- $\alpha' = 180^\circ$ y que $\cos 180 = -1$

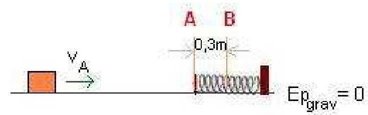
$$mg\cdot d\cdot sen30 + mg\mu\cdot 5d\cdot\cos 180 = 0 \qquad\Rightarrow\qquad \mu = \frac{sen30}{5} = 0{,}1$$

E5B.S2008

Un bloque de 2 kg desliza con velocidad constante por una superficie horizontal sin rozamiento y choca contra el extremo de un muelle horizontal, de constante elástica 120 $N\ m^{-1}$, comprimiéndolo.
a) ¿Cuál ha de ser la velocidad del bloque para comprimir el muelle 30 cm?
b) Explique las transformaciones energéticas que tienen lugar considerando la existencia de rozamiento.

a) Si no hay rozamiento, la energía mecánica debe conservarse: $\Delta Ec + \Delta Ep = 0$.
La disminución de energía cinética debe ser igual al aumento de la energía potencial (en este caso la Ep se debe tanto a la gravitatoria como a la elástica). Así la cinética que tiene al chocar debe transformase íntegramente en energía potencial elástica, ya que al estar sobre una superficie horizontal la potencial gravitatoria antes y después es la misma.

$$Ec_A + \cancel{Ep_{A,grav}} + \cancel{Ep_{A,elast}} = \cancel{Ec_B} + \cancel{Ep_{B,grav}} + Ep_{B,elast}$$



$$\frac{1}{2}mv_A^2 = \frac{1}{2}kx_B^2$$

de donde

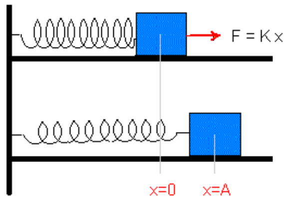
$$v_A = \sqrt{\frac{kx_B^2}{m}} = \sqrt{\frac{120\cdot 0{,}3^2}{2}} = 2{,}3m/s$$

b) Si hubiese rozamiento, sería lo mismo, solo que en este caso una parte de la energía cinética se disiparía en rozamiento, ya que $\Delta Ec + \Delta Ep = W_{F.NoConservat}$ y particularizando:

$$Ec_A + W_{F.NoConserv(Roz)A\to B} = Ep_{B,elast}$$

teniendo en cuenta que el trabajo que realiza la fuerza de rozamiento siempre es negativo (porque la fuerza de rozamiento y el desplazamiento forman 180º y su coseno es –1), en realidad es como si tuviéramos que $Ec_A = Ep_{B,elast} + W_{perdido}$ por lo tanto en este caso la velocidad de la masa tendría que se mayor que antes para provocar la misma deformación en el muelle.

Un muelle horizontal de constante K = 1000 $N.m^{-1}$ tiene uno de sus extremos fijo y el otro sujeta a una masa de 0,2 Kg. Se deforma el muelle tirando de él una distancia de 8cm y se suelta. Hallar las energías potencial y cinética del sistema cuando el alargamiento vale: a) x=8cm, b) x=4cm, c) x=0



Al soltar el muelle éste ejecutará un movimiento vibratorio armónico simple (MAS). Al máximo desplazamiento de la posición de equilibrio lo llamaremos Amplitud (A=8cm)

Cuando nosotros deformamos el muelle (con velocidad constante), mediante una fuerza deformadora (F_{Deform}=Kx) igual y de sentido contrario a la recuperadora, estamos haciendo un trabajo. A medida que vamos alargando el muelle nuestro trabajo se va almacenando en el resorte en forma de energía potencial elástica. Así pues, en la máxima deformación todo nuestro trabajo es energía potencial elástica:

$$W_{0\to A,Nos} = \Delta Ep = Ep_A - \cancel{Ep_O} = \int_{x=0}^{x=A} F_{Nos}\cdot dx = \int_{x=0}^{x=A} K\,x\cdot dx = \frac{1}{2}K\left|x^2\right|_0^A = \frac{1}{2}K\,A^2$$

Naturalmente, puesto que en el lugar de máxima deformación la masa está parada, su energía cinética es nula, y en consecuencia tenemos que la energía Total del sistema es igual a la potencial máxima, es decir la que tiene en el punto A:

$$E = \cancel{Ec_A} + Ep_A = \frac{1}{2}K\,A^2$$

Cuando soltamos el resorte la fuerza recuperadora ($F_{Recup}=-Kx$ el signo menos indica que la fuerza recuperadora apunta "siempre" hacia la posición de equilibrio) tira de la masa para llevarla a la posición de equilibrio. En la posición de equilibrio (x=0) la energía potencial es nula y por lo tanto ahora toda la energía será cinética

$$E = Ec_O + \cancel{Ep_O} = \frac{1}{2}K\,A^2$$

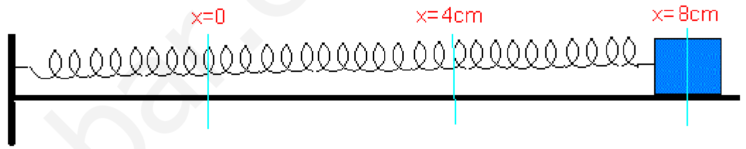
En cualquier posición intermedia entre la de equilibrio y la de máxima deformación tendremos que la energía total seguirá siendo la misma, pero ahora tendremos una parte cinética y una parte potencial:

$$E = Ec_x + Ep_x = \frac{1}{2}K\,A^2$$

o sustituyendo:

$$E = \frac{1}{2}m\,v^2 + \frac{1}{2}K\,x^2 = \frac{1}{2}K\,A^2$$

en los puntos concretos del ejercicio, tendríamos que:



$Ep = 0$	$Ep = \frac{1}{2}Kx^2$	$Ep = \frac{1}{2}KA^2$
$Ec = \frac{1}{2}KA^2$	$Ec = \frac{1}{2}K(A^2 - x^2)$	$Ec = 0$

Sustituyendo:

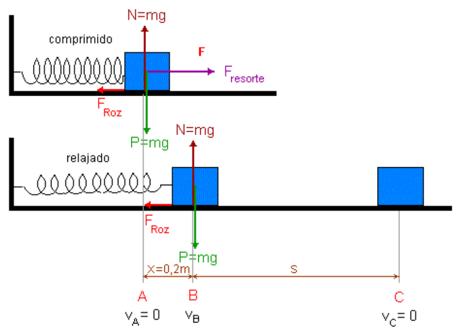
Ep=0	Ep=0,8J	Ep=3,2J
Ec=3,2J	Ec=2,4J	Ec=0
––––––	––––––	––––––
E = 3,2J	E = 3,2J	E = 3,2J

E1B.S2007

Un bloque de 2 kg se encuentra sobre un plano horizontal, sujeto al extremo de un resorte de constante elástica k = 150 $N\ m^{-1}$, comprimido 20 cm. Se libera el resorte de forma que el cuerpo desliza sobre el plano, adosado al extremo del resorte hasta que éste alcanza la longitud de equilibrio, y luego continúa moviéndose por el plano. El coeficiente de rozamiento es de 0,2.

a) Explique las transformaciones energéticas que tienen lugar a lo largo del movimiento del bloque y calcule su velocidad cuando pasa por la posición de equilibrio del resorte.

b) Determine la distancia recorrida por el bloque hasta detenerse. g = 10 $m\ s^{-2}$



a) En la posición A el bloque está comprimido y en reposo, por tanto su energía cinética es nula, mientras que su energía potencial es máxima (suma de la gravitatoria y la elástica). Al soltarlo $\Delta Ec + \Delta Ep = W_{\substack{A\to B\\ F.NoConservat}}$ la energía potencial comienza a disminuir (la Ep gravitatoria no varía porque se mueve en la horizontal, pero su energía potencial elástica es cada vez menor). Esta disminución de Ep se emplea en aumentar su energía cinética y en rozamiento (transformándose en calor).

En el punto B, toda la energía que tenía acumulada el resorte en forma de potencial elástica menos la que se ha disipado en rozamiento se ha transformado en energía cinética.

$$\cancel{Ec_A} + \cancel{Ep_{A,gravit}} + Ep_{A,elastica} + W_{\substack{A\to B\\ F.NoConservat}} = Ec_B + \cancel{Ep_{B,gravit}} + \cancel{Ep_{B,elastica}}$$

$$\frac{1}{2}Kx^2 + F_{Roz}\,x\cdot\cos 180 = \frac{1}{2}mv_B^2 \quad\rightarrow\quad \frac{1}{2}150\cdot 0{,}2^2 + 0{,}2\cdot 20\cdot 0{,}2\cdot(-1) = \frac{1}{2}2\cdot v_B^2 \quad\rightarrow\quad v = 1{,}48\ \text{m/s}$$

b) Ahora toda la energía cinética que tiene en B se disipa en rozamiento.

$$Ec_B + \cancel{Ep_{B,gravit}} + W_{\substack{A\to B\\ F.NoConservat}} = Ec_C + \cancel{Ep_{C,gravit}}$$

$$\frac{1}{2}mv_A^2 + F_{Roz}\,s\cdot\cos 180 = 0 \quad\rightarrow\quad \frac{1}{2}2\cdot 1{,}48^2 + 0{,}2\cdot 20\cdot s\cdot(-1) = 0 \quad\rightarrow\quad s = 0{,}55\ \text{m}$$

También podríamos balancear entre la posición inicial y final: Toda la energía potencial elástica que tiene en A se disipa en rozamiento. (Lo único es que en este caso obtendremos la distancia total recorrida, es decir 0,2m+0,55m)

$$Ep_{A,elastica} + W_{\substack{A\to C\\ F.NoConservat}} = 0 \quad\rightarrow\quad \frac{1}{2}150\cdot 0{,}2^2 + 0{,}2\cdot 20\cdot s'\cdot(-1) = 0 \quad\rightarrow\quad s' = 0{,}75\ \text{m}$$

E1B.S2010

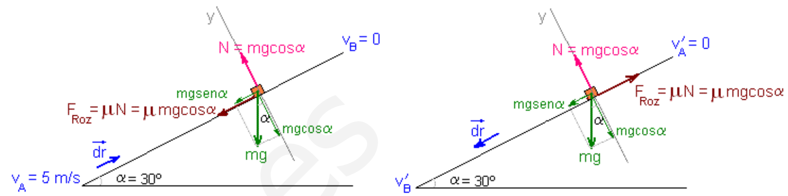
Por un plano inclinado que forma un ángulo de 30º con la horizontal se lanza hacia arriba un bloque de 10 Kg con una velocidad inicial de 5 m s^{-1}. Tras su ascenso por el plano inclinado, el bloque desciende y regresa al punto de partida con una cierta velocidad. El coeficiente de rozamiento entre el plano y el bloque es 0,1.

a) Dibuje en dos esquemas distintos las fuerzas que actúan sobre el bloque durante su ascenso y durante el descenso e indique sus respectivos valores. Razone si se verifica el principio de conservación de la energía en este proceso.

b) Calcule el trabajo de la fuerza de rozamiento en el ascenso y en el descenso del bloque. Comente el signo del resultado obtenido.

$g=10\ m\ s^{-2}$

a) Tanto cuando sube como cuando desciende sobre el cuerpo hay tres fuerzas que son el peso, la normal que es la reacción del plano y la fuerza de rozamiento. La única diferencia entre ambas situaciones está en que la fuerza de rozamiento tiene sentido contrario en cada caso porque su sentido es el opuesto al del movimiento:



Las fuerzas, en el sistema de referencia de la figura serían, en newton:

$$\vec{P} = -mgsen\alpha\,\vec{i} - mg\cos\alpha\,\vec{j} = -10\cdot 10\cdot sen30\,\vec{i} - 10\cdot 10\cdot\cos 30\,\vec{j} = -50\,\vec{i} - 86{,}6\,\vec{j}$$
$$\vec{N} = mg\cos\alpha\,\vec{j} = 86{,}6\,\vec{j}$$
$$\vec{F}_{Roz,sube} = \mu\cdot mg\cos\alpha\,(-\vec{i}) = -0{,}1\cdot 86{,}6\,\vec{i} = -8{,}66\,\vec{i}$$
$$\vec{F}_{Roz,baja} = \mu\cdot mg\cos\alpha\,\vec{i} = +8{,}66\,\vec{i}$$

Puesto que hay fuerza de rozamiento, que es una fuerza no conservativa, la energía mecánica no se conserva, pero si se conserva la energía total:

$$Ec_A + Ep_A + W_{\substack{A\to B\\ F.NoConservat}} = Ec_B + Ep_B$$

b) <u>Método energético</u>: Para calcular el trabajo que hace la fuerza de rozamiento primero debemos calcular el espacio que recorre sobre el plano, ya que

$$W_{roz} = F_{roz}\cdot s\cdot\cos 180 = -F_{roz}\cdot s = -\mu\, mg\,\cos\alpha\cdot s = -6{,}86\cdot s$$

Aplicando el principio de conservación de la energía tenemos que:

$$Ec_A + \cancel{Ep_A} + W_{\substack{A\to B\\ F.NoConservat}} = \cancel{Ec_B} + Ep_B$$
$$\frac{1}{2}10\cdot 5^2 - 6{,}86\cdot s = 10\cdot 10\cdot s\cdot sen30 \quad\rightarrow\quad s = 2{,}13\ \text{m}$$

por tanto, $W_{roz} = -6{,}86\cdot s = -18{,}45\,J$ y el mismo valor se perdería en rozamiento al bajar, así que en total el trabajo perdido en rozamiento sería 36,9 J.

El signo menos que resulta indica que la fuerza de rozamiento es una fuerza disipativa, y que por tanto la energía mecánica que el cuerpo tendrá al llegar al punto B es menor que la que tenía inicialmente en el punto A.

b) <u>Método dinámico</u>: Para calcular el trabajo que realiza la fuerza de rozamiento primero debemos calcular el espacio que recorre sobre el plano hasta que se detiene, que será el mismo que recorre cuando baje. Para ello, primero calculamos la aceleración con que sube, aplicando la ley Newton, y después aplicamos las ecuaciones del movimiento acelerado para calcular el espacio.

Teniendo en cuenta que la componente del peso en dirección de eje Y y la normal se anulan, nos queda que cuando sube, la segunda ecuación de la dinámica sería, como se deduce de la primera figura:

$$\Sigma\vec{F} = m\vec{a}$$

$$-mgsen\alpha\,\vec{i} - \mu\cdot mg\cos\alpha\,\vec{i} = m\cdot\vec{a}$$

$$\vec{a} = -gsen\alpha\,\vec{i} - \mu\cdot g\cos\alpha\,\vec{i} = -5{,}87\vec{i}$$

Resulta evidente que se trata de un movimiento uniformemente retardado y que terminará parándose, porque la velocidad y la aceleración tienen la misma dirección y sentido contrario, ya que el cuerpo que sube tiene dirección $+\vec{i}$ y la aceleración tiene sentido $-\vec{i}$.

$$\left.\begin{array}{l} v = v_o + a.t \\ s = s_o + v_o t + \frac{1}{2}at^2 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{l} 0 = 5 - 5{,}87\,t \\ s = 5t - \frac{1}{2}5{,}87\,t^2 \end{array}\right\} \qquad \begin{array}{l} t = 0{,}85seg \\ s = 2{,}13m \end{array}$$

También podríamos calcular el espacio recorrido con la expresión que se obtiene eliminando el espacio entre esas dos expresiones: $v = \sqrt{v_o^2 + 2as}$

El trabajo realizado por la fuerza de rozamiento: (para variar lo vamos a calcular aplicando la definición general de trabajo en lugar de la expresión particular para fuerzas constantes): Teniendo en cuenta que el vector desplazamiento (independientemente de para donde se mueva) es $d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k} = dx\vec{i}$ porque el cuerpo solamente se desplaza a lo largo del eje X:

$$W_{roz} = \int_{x=0}^{x=2,13}\vec{F}_{roz}\bullet d\vec{r} = \int_{x=0}^{x=2,13}-\mu\cdot mg\cos\alpha\,\vec{i}\bullet dx\,\vec{i} = \int_{x=0}^{x=2,13}-\mu\cdot mg\cos\alpha\cdot dx = -\mu\cdot mg\cos\alpha\,[x]_{x=0}^{x=2,13}$$

$$W_{roz} = -\mu\cdot mg\cos\alpha\cdot 2{,}13 = -18{,}45Julios$$

De forma análoga podemos calcular el trabajo realizado por la fuerza de rozamiento mientras desciende, solo que en este caso la F_{roz} tiene sentido $+\vec{i}$ pero de acuerdo al mismo sistema de referencia anterior ahora la posición inicial es $x_{A'}$=2,13m y la final $x_{B'}$=0.

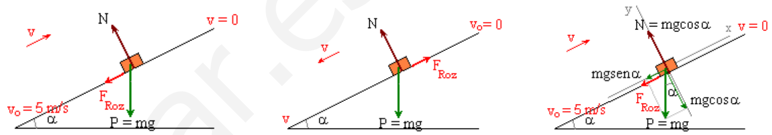
$$W_{roz} = \int_{x=2,13}^{x=0}\vec{F}_{roz}\bullet d\vec{r} = \int_{x=2,13}^{x=0}\mu\cdot mg\cos\alpha\,\vec{i}\bullet dx\,\vec{i} = \int_{x=2,13}^{x=0}\mu\cdot mg\cos\alpha\cdot dx = -18{,}45Julios$$

E4A.S2007

Un cuerpo de 0,5 kg se lanza hacia arriba por un plano inclinado, que forma 30º con la horizontal, con una velocidad inicial de 5 m s^{-1}. El coeficiente de rozamiento es 0,2.
a) Dibuje en un esquema las fuerzas que actúan sobre el cuerpo, cuando sube y cuando baja por el plano, y calcule la altura máxima alcanzada por el cuerpo.

b) Determine la velocidad con la que el cuerpo vuelve al punto de partida. g = 10 m s^{-2}

a) Este ejercicio se resolvió en los ejemplos de dinámica. Ahora lo resolveremos desde el punto de vista de la energía. Tanto si el cuerpo está subiendo como si está bajando sobre él hay tres fuerzas: el peso, la reacción del plano y la fuerza de rozamiento. La única diferencia es que la fuerza de rozamiento mientras sube y mientras baja tiene sentido opuesto, ya que siempre tiene sentido contrario al movimiento:



Cuando sube la fuerza de rozamiento máxima es: $F_{Roz} = \mu\cdot N = \mu\cdot mg\cos 30$
El trabajo realizado por la fuerza de rozamiento desde que comienza a ascender hasta que se para, es decir, para un recorrido s = h/sen30, es:

$$W_{roz} = F_{roz}\cdot s\cdot\cos 180 = -F_{roz}\cdot s = -\mu mg\,\cos 30\cdot\frac{h}{sen30} = -0{,}2\cdot 5\cdot\cos 30\cdot\frac{h}{sen30} = -1{,}73h$$

Aplicando el teorema de conservación de la energía, y teniendo en cuenta que si tomamos nivel cero de Ep en el punto más bajo, Ep_A=0, y que en el punto B la Ec es nula porque se detiene:

$$Ec_A + \cancel{Ep_A} + \underset{F.NoConservat}{W_{A\to B}} = \cancel{Ec_B} + Ep_B$$

$$\frac{1}{2}mv_A^2 + W_{Roz} = mgh_B \quad\rightarrow\quad \frac{1}{2}0{,}5\cdot 5^2 - 1{,}73h = 0{,}5\cdot 10\cdot h \quad\rightarrow\quad h{=}0{,}93\ m$$

b) Cuando vuelve a la posición de partida, después de haber subido y vuelto, ha recorrido el doble del trayecto, por tanto el trabajo perdido en rozamiento es el doble. Teniendo en cuenta que h=0,93 m, tenemos que :

$$W_{roz} = F_{roz}\cdot 2s\cdot\cos 180 = -2\cdot 1{,}73h = -3{,}22\,Julios$$

La conservación de la energía entre el punto A al inicio y el punto A cuando está de vuelta es:

- La energía cinética en el punto A inicial y final son diferentes, ya que parte de la energía cinética inicial la ha perdido en rozamiento mientras ha subido y ha bajado. Por ese motivo la velocidad con que regresará será menor a la inicial.
- La energía potencial en el punto A inicial y final es exactamente la misma puesto que esta energía solamente depende de la posición

$$Ec_A + \cancel{Ep_A} + \underset{F.NoConservat}{W_{A\to B\to A}} = Ec'_A + \cancel{Ep_A}$$

$$\frac{1}{2}mv_A^2 + W_{Roz} = \frac{1}{2}mv'^2_A \quad\rightarrow\quad \frac{1}{2}0{,}5\cdot 5^2 - 3{,}22 = \frac{1}{2}0{,}5\cdot v'^2 \quad\rightarrow\quad v'{=}3{,}49\ m/s$$

TRABAJO Y ENERGÍA. Ejercicios similares con soluciones

E3A.S2006
Un bloque de 2 kg está situado en el extremo de un muelle, de constante elástica 500 N m^{-1}, comprimido 20 cm. Al liberar el muelle el bloque se desplaza por un plano horizontal y, tras recorrer una distancia de 1 m, asciende por un plano inclinado 30º con la horizontal. Calcule la distancia recorrida por el bloque sobre el plano inclinado.
a) Supuesto nulo el rozamiento
b) Si el coeficiente de rozamiento entre el cuerpo y los planos es 0,1. g = 10 m s^{-2}
Soluciones: a) a) s= 1m b) s=0,68m

E5B.S2006
Un bloque de 3 kg, situado sobre un plano horizontal, está comprimiendo 30 cm un resorte de constante k = 1000 N m^{-1}. Al liberar el resorte el bloque sale disparado y, tras recorrer cierta distancia sobre el plano horizontal, asciende por un plano inclinado de 30º.
Suponiendo despreciable el rozamiento del bloque con los planos:
a) Determine la altura a la que llegará el cuerpo.
b) Razone cuándo será máxima la energía cinética y calcule su valor. g = 10 m s^{-2}
Soluciones: a) h=1,5m b) $Ec_{máx}$=45J

E1B.S2005
Con un arco se lanza una flecha de 20 g, verticalmente hacia arriba, desde una altura de 2 m y alcanza una altura máxima de 50 m, ambas sobre el suelo. Al caer, se clava en el suelo una profundidad de 5 cm.
a) Analice las energías que intervienen en el proceso y sus transformaciones.
b) Calcule la constante elástica del arco (que se comporta como un muelle ideal), si el lanzador tuvo que estirar su brazo 40 cm, así como la fuerza entre el suelo y la flecha al clavarse. g =10 m s^{-2}
Soluciones: b) K=120N/m ; F_{suelo}=200,2N

E2B.S2005
a) ¿Por qué la fuerza ejercida por un muelle que cumple la ley de Hooke se dice que es conservativa?
b) ¿Por qué la fuerza de rozamiento no es conservativa?

E3A.S2005
Una partícula parte de un punto sobre un plano inclinado con una cierta velocidad y asciende, deslizándose por dicho plano inclinado sin rozamiento, hasta que se detiene y vuelve a descender hasta la posición de partida.
a) Explique las variaciones de energía cinética, de energía potencial y de energía mecánica de la partícula a lo largo del desplazamiento.
b) Repita el apartado anterior suponiendo que hay rozamiento.
Soluciones: a) Aplica la conservación de la energía mecánica: Puesto que ΔEp=0 (al volver al mismo punto) → ΔEc=0 → regresa con la misma velocidad inicial. b) Aplica la conservación de la energía. ΔEp=0 → ΔEc=W_{Roz}. Como W_{Roz}=– → $v_{final}<v_{inic}$

E3B.S2005
Un bloque de 500 kg asciende a velocidad constante por un plano inclinado de pendiente 30º, arrastrado por un tractor mediante una cuerda paralela a la pendiente. El coeficiente de rozamiento entre el bloque y el plano es 0,2.
a) Haga un esquema de las fuerzas que actúan sobre el bloque y calcule la tensión de la cuerda.
b) Calcule el trabajo que el tractor realiza para que el bloque recorra una distancia de 100 m sobre la pendiente. ¿Cuál es la variación de energía potencial del bloque? g =10 m s^{-2}
Soluciones: a) T=3366N b) W=336600J ; ΔEp=249998J

E4A.S2005
Un bloque de 1 kg desliza con velocidad constante por una superficie horizontal y choca contra el extremo de un muelle horizontal, de constante elástica 200 N m^{-1}, comprimiéndolo.
a) ¿Cuál ha de ser la velocidad del bloque para comprimir el muelle 40 cm?
b) Explique cualitativamente cómo variarían las energías cinética y potencial elástica del sistema bloque – muelle, en presencia de rozamiento. g = 10 m s^{-2}
Soluciones: a) v=5,66 m/s
b) $Ec_A + \cancel{Ep}_{A,gravit} + \cancel{Ep}_{A,elastica} + W_{\substack{A\to B\\ F.NoConservat}} = \cancel{Ec}_B + \cancel{Ep}_{B,gravit} + Ep_{B,elastica}$

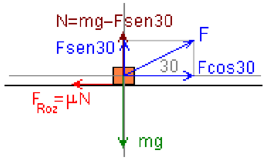
E4B.S2005
a) Defina energía potencial a partir del concepto de fuerza conservativa.
b) Explique por qué, en lugar de energía potencial en un punto, deberíamos hablar de variación de energía potencial entre dos puntos. Ilustre su respuesta con algunos ejemplos.

E1A.S2004
Sobre un plano inclinado que forma un ángulo de 30º con la horizontal se encuentra un bloque de 0,5 kg adosado al extremo superior de un resorte, de constante elástica 200N/m, paralelo al plano y comprimido 10 cm. Al liberar el resorte, el bloque asciende por el plano hasta detenerse y, posteriormente, desciende. El coeficiente de rozamiento es 0,1.
a) Dibuje en un esquema las fuerzas que actúan sobre el bloque cuando asciende por el plano y calcule la aceleración del bloque.
b) Determine la velocidad con la que el bloque es lanzado hacia arriba al liberarse el resorte y la distancia que recorre el bloque por el plano hasta detenerse. g =10 m s^{-2}
Soluciones: a) a=–5,87 m/s^2 b) v_B=1,68 m/s ; s=0,34 m (desde la posición comprimida)

E2A.S2004
Se deja caer un cuerpo de 0,5 kg desde lo alto de una rampa de 2 m, inclinada 30º con la horizontal, siendo el valor de la fuerza de rozamiento entre el cuerpo y la rampa de 0,8 N.
Determine:
a) El trabajo realizado por cada una de las fuerzas que actúan sobre el cuerpo, al trasladarse éste desde la posición inicial hasta el final de la rampa.
b) La variación que experimentan las energías potencial, cinética y mecánica del cuerpo en la caída a lo largo de toda la rampa. g = 10 m s^{-2}
Soluciones: W_{Peso}=5J ; W_{Roz}=–1,6J b) ΔEp=–5J ; ΔEc=3,4J ; $ΔE_{mecánica}$=–1,6J

E4B.S2004
Un trineo de 100 kg desliza por una pista horizontal al tirar de él con una fuerza **F**, cuya dirección forma un ángulo de 30º con la horizontal. El coeficiente de rozamiento es 0,1.
a) Dibuje en un esquema todas las fuerzas que actúan sobre el trineo y calcule el valor de F para que el trineo deslice con movimiento uniforme.
b) Haga un análisis energético del problema y calcule el trabajo realizado por la fuerza **F** en un desplazamiento de 200 m del trineo. g =10 m s^{-2}
Soluciones: a) F = 109,16N b) W_F = 18907J = $-W_{Roz}$

E4B.S2004
Un trineo de 100 kg desliza por una pista horizontal al tirar de él con una fuerza **F**, cuya dirección forma un ángulo de 30º con la horizontal. El coeficiente de rozamiento es 0,1.
a) Dibuje en un esquema todas las fuerzas que actúan sobre el trineo y calcule el valor de F para que el trineo deslice con movimiento uniforme.
b) Haga un análisis energético del problema y calcule el trabajo realizado por la fuerza **F** en un desplazamiento de 200 m del trineo.
g =10 m s^{-2}



Sol. a) ΣF=ma=0 → −0,1(1000−Fsen30)+Fcos30=0 → F=109,17New
b) ΔEc+ΔEp=W_{FNC} → Como ΔEc=0(v=cte) y ΔEp=0(pista horizontal) →W_{FNC}=0 → El trabajo realizado por las fuerzas no conservativas, que es igual al trabajo realizado por la fuerza de rozamiento + el trabajo realizado por la fuerza F debe ser cero.
W_F=F·s·cos30=18908,8J (El trabajo realizado por la F_{Roz} debe ser −18908,8J)

EJERCICIOS PROPUESTOS EN SELECTIVIDAD CADA CURSO

TRABAJO Y ENERGÍA. CURSO 2011/2012

E3A.S2012
a) Explique el significado de “fuerza conservativa” y “energía potencial” y la relación entre ambos.
b) Si sobre una partícula actúan tres fuerzas conservativas de distinta naturaleza y una no conservativa, ¿cuántos términos de energía potencial hay en la ecuación de la energía mecánica de esa partícula? ¿Cómo aparece en dicha ecuación la contribución de la fuerza no conservativa?
b) $\Delta Ec + \Delta Ep_1 + \Delta Ep_2 + \Delta Ep_3 = W_{\substack{A\to B\\ F.NoConservat}}$

E4A.S2012
Un bloque de 2 kg se lanza hacia arriba por una rampa rugosa (μ = 0,2), que forma un ángulo de 30º con la horizontal, con una velocidad de 6 m s^{-1}. Tras su ascenso por la rampa, el bloque desciende y llega al punto de partida con una velocidad de 4,2 m s^{-1}.
a) Dibuje en un esquema las fuerzas que actúan sobre el bloque cuando asciende por la rampa y, en otro esquema, las que actúan cuando desciende e indique el valor de cada fuerza.
b) Calcule el trabajo de la fuerza de rozamiento en el ascenso del bloque y comente el signo del resultado obtenido.
g = 10 m s^{-2}
a) P=20N; N=17,32N; F_{Roz}=3,46N
b) Haciendo un balance de energía entre el punto inicial y el mismo punto después de recorrido: $Ec_A + Ep_A + W_{\substack{A\to B\\ F.NoConservat}} = Ec_B + Ep_B \Rightarrow \frac{1}{2}2\cdot 6^2 + W_{\substack{A\to B\\ F.NoConservat}} = \frac{1}{2}2\cdot 4{,}2^2$

$W_{\substack{A\to B\\ F.NoConservat}} = -18{,}36\,J \Rightarrow$ En la mitad del recorrido −9,18J. El signo menos indica que la fuerza No conservativa, que en este caso es la de rozamiento, disipa energía, que transforma en calor, haciendo que disminuya la energía mecánica

E5B.S2012
Un cuerpo de 5 kg, inicialmente en reposo, se desliza por un plano inclinado de superficie rugosa que forma un ángulo de 30º con la horizontal, desde una altura de 0,4 m. Al llegar a la base del plano inclinado, el cuerpo continúa deslizándose por una superficie horizontal rugosa del mismo material que el plano inclinado. El coeficiente de rozamiento dinámico entre el cuerpo y las superficies es de 0.3.
a) Dibuje en un esquema las fuerzas que actúan sobre el cuerpo en su descenso por el plano inclinado y durante su movimiento a lo largo de la superficie horizontal. ¿A qué distancia de la base del plano se detiene el cuerpo?
b) Calcule el trabajo que realizan todas las fuerzas que actúan sobre el cuerpo durante su descenso por el plano inclinado.
g = 10 m s^{-2}
a) $Ec_A + Ep_A + W_{\substack{A\to B\\ F.NoConservat}} = Ec_B + Ep_B \Rightarrow$

5·10·0,4 + [0,3·50·cos30]·0,8·cos180 + [0,3·50]·s·cos180 = 0 ⇒ s = 0,64m
b) W_{Peso} = 50·0,8·cos300 = 20 J (el ángulo se mide desde el plano, en sentido antihorario)
W_{Normal} = 50cos30·0,8·cos90 = 0
W_{FRoz} = [0,3·50·cos30]·0,8·cos180 = –10,4 J

WTotal = 9,6 J

TRABAJO Y ENERGÍA. CURSO 2012/2013

E1B.S2013

3. Un bloque de 5 kg se encuentra inicialmente en reposo en la parte superior de un plano inclinado de 10 m de longitud, que presenta un coeficiente de rozamiento μ = 0,2 (ignore la diferencia entre el coeficiente de rozamiento estático y el dinámico).
a) Dibuje en un esquema las fuerzas que actúan sobre el bloque durante el descenso por el plano y calcule el ángulo mínimo de inclinación del plano para que el bloque pueda deslizarse.
b) Analice las transformaciones energéticas durante el descenso del bloque y calcule su velocidad al llegar al suelo suponiendo que el ángulo de inclinación del plano es de 30º.
$g = 9{,}8\ m\ s^{-2}$

a) para que deslice $\Sigma F=0 \Rightarrow\ mg\cdot sen\alpha - \mu\cdot mg\cdot cos\alpha = 0\ \Rightarrow \mu=tg\alpha \Rightarrow \alpha=11{,}3º$

b) $Ep_A + Ec_A + W_{F.NoConserv} = Ep_B + Ec_B \Rightarrow mg(s\cdot sen\alpha) + \mu\cdot mg\cdot cos\alpha\cdot s\cdot cos180 = ½\, mv_B^2 \Rightarrow$
v_B=8m/s

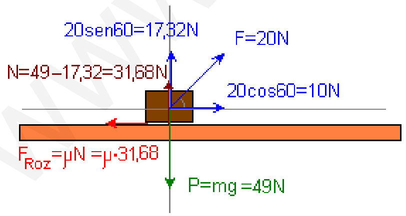
E2B.S2013

1. a) Explique qué es la energía mecánica de una partícula y en qué casos se conserva.
b) Un objeto se lanza hacia arriba por un plano inclinado con rozamiento. Explique cómo cambian las energías cinética, potencial y mecánica del objeto durante el ascenso.

b) $\Delta Ep + \Delta Ec = W_{A\rightarrow B,F.NOConserv} \Rightarrow$ La pérdida de energía cinética se emplea en: (1) aumentar la variación de energía potencial y (2) en vencer el trabajo realizado por la fuerza de rozamiento.
(Recuerda que el trabajo realizado por la fuerza de rozamiento siempre es negativo, porque dicha fuerza siempre forma 180 con el desplazamiento. Supongamos que fuese −20J, la situación sería: $\Delta Ep\uparrow + \Delta Ec\downarrow + 20 = 0$)
La energía mecánica (suma de la Ep + Ec), como puede verse escribiendo la expresión de la forma $Ec_A+Ep_A-20=Ec_B+Ep_B$, disminuye en la misma cantidad que el trabajo que se pierde en rozamiento.

E6A.S2013

Un bloque de 5 kg se desliza con velocidad constante por una superficie horizontal rugosa al aplicarle una fuerza de 20 N en una dirección que forma un ángulo de 60º sobre la horizontal.
a) Dibuje en un esquema todas las fuerzas que actúan sobre el bloque, indique el valor de cada una de ellas y calcule el coeficiente de rozamiento del bloque con la superficie.
b) Determine el trabajo total de las fuerzas que actúan sobre el bloque cuando se desplaza 2 m y comente el resultado obtenido.
$g = 9{,}8\ m\ s^{-2}$



a) Presta atención al calcular el valor de la fuerza normal. La normal es la reacción a la resultante de las fuerzas que el cuerpo hace perpendicularmente contra el plano: $N=P-F_y$
$\Sigma F=0 \Rightarrow F_{Roz}=10 \Rightarrow \mu=0{,}32$
b) De acuerdo con el teorema de las fuerzas vivas: $W_{\underset{A\rightarrow B}{F\,Resultante}} = \Delta Ec = 0$
Comprobación:

$W_{Peso}=49\cdot 2\cdot cos270=0$
$W_{Normal}=31{,}68\cdot 2\cdot cos90=0$
$W_F=20\cdot 2\cdot cos60=+20J$
$W_{FRoz}=10\cdot 2\cdot cos180=-20J$
$W_{TOTAL}=0$

TRABAJO Y ENERGÍA. CURSO 2013/2014

E1A.S2014

Por un plano inclinado 30º respecto a la horizontal desciende un bloque de 100 kg y se aplica sobre el bloque una fuerza $\vec{F}$ paralela al plano que lo frena, de modo que desciende a velocidad constante. El coeficiente de rozamiento entre el plano y el bloque es 0,2.
a) Dibuje en un esquema las fuerzas que actúan sobre el bloque y calcule el valor de la fuerza $\vec{F}$
b) Explique las transformaciones energéticas que tienen lugar en el deslizamiento del bloque y calcule la variación de su energía potencial en un desplazamiento de 20 m.
$g = 9{,}8\ m\ s^{-2}$

a) $980\cdot sen30 - F - 0{,}2\cdot 980\cdot cos30 = 0 \Rightarrow F=320{,}26N$ (sentido contrario al desplazamiento)
b) $\Delta Ep = -9800$ J. Puede calcularse directamente como $Ep_B - Ep_A = 0 - mgh_A$ o bien aplicando la conservación de la energía y teniendo en cuenta que $\Delta Ec=0$ porque v=cte. :
$\Delta Ep + \Delta Ec = W_{A\rightarrow B,F.NOConserv} = W_{A\rightarrow B,F} + W_{A\rightarrow B,FROZ} = 320{,}26\cdot 20\cdot cos180 + 169{,}74\cdot 20\cdot cos180 =$
$= -6405{,}2 - 3394{,}8 = -9800$ J
En este último planteamiento se ve muy claramente que al ser $\Delta Ec=0$, la pérdida de energía potencial se emplea en: (1) vencer el trabajo realizado por la fuerza F y (2) en vencer el trabajo realizado por la fuerza de rozamiento

E2A.S2014

a) Conservación de la energía mecánica.
b) Un objeto desciende con velocidad constante por un plano inclinado. Explique, con la ayuda de un esquema, las fuerzas que actúan sobre el objeto. ¿Es constante su energía mecánica?. Razone la respuesta.

a) Teoría
b) No, porque si v=cote quiere decir que $\Delta Ec=0$ y puesto que al descender disminuye la energía potencial es imposible que $\Delta Ec+\Delta Ep=0$ como exige la conservación de la energía mecánica. Por tanto debe existir una fuerza no conservativa (como la de rozamiento, o que descienda frenando) de forma que $\Delta Ec+\Delta Ep=W_{F.NoConserv}$

E5A.S2014

a) Energía potencial asociada a una fuerza conservativa.
b) Si la energía mecánica de una partícula es constante, ¿debe ser necesariamente nula la fuerza resultante que actúa sobre la misma? Razone la respuesta.

b) No. Lo que debe ser nula es la resultante de las fuerzas no−conservativas, sin embargo sí que puede haber fuerzas conservativas sin que por ello varíe la energía mecánica.

TRABAJO Y ENERGÍA. CURSO 2014/2015

E1B.S2015

Se deja caer un cuerpo, partiendo del reposo, por un plano inclinado que forma un ángulo de 30º con la horizontal. Después de recorrer 2 m llega al final del plano inclinado con una velocidad de 4 m s^{-1} y continúa deslizándose por un plano horizontal hasta detenerse. La distancia recorrida en el plano horizontal es 4 m.
a) Dibuje en un esquema las fuerzas que actúan sobre el bloque cuando se encuentra en el plano inclinado y determine el valor del coeficiente de rozamiento entre el cuerpo y el plano inclinado.
b) Explique el balance energético durante el movimiento en el plano horizontal y calcule la fuerza de rozamiento entre el cuerpo y el plano.
g = 9,8 m s^{-2}

a) $Ec_A + Ep_A + W_{A\to B}^{F.NoConservat} = Ec_B + Ep_B \Rightarrow mg\cdot 1 + [\mu\cdot mg\cdot \cos 30]\cdot s\cdot \cos 180 = ½\, m\cdot 4^2$ $\Rightarrow \mu=0,1$

b) $Ec_B + Ep_B + W_{A\to B}^{F.NoConservat} = Ec_C + Ep_C \Rightarrow ½\, m\cdot 4^2 + [\mu\cdot mg]\cdot s\cdot \cos 180 = 0 \Rightarrow \mu=0,2 \Rightarrow$ $F_{Roz}=2m$ N

E3A.S2015
a) Explique la relación entre fuerza conservativa y variación de energía potencial.
b) Un esquiador se desliza desde la cima de una montaña hasta un cierto punto de su base siguiendo dos caminos distintos, uno de pendiente más suave y el otro de pendiente más abrupta. Razone en cuál de los dos casos llegará con más velocidad al punto de destino. ¿Y si se tuviera en cuenta la fuerza de rozamiento?
b) Si despreciamos el rozamiento: $\Delta Ec + \Delta Ep = 0 \Rightarrow$ la velocidad de llegada es la misma, ya que solamente depende de la disminución de energía potencial, que es la misma en ambos casos porque los puntos de inicio y de llegada son los mismos.
Si tenemos en cuenta el rozamiento: $Ec_A + Ep_A + F_{Roz}\cdot s\cdot \underline{\cos 180} = Ec_B + Ep_B \Rightarrow$ Por el camino de mayor longitud, s, se perderá mayor trabajo debido a la fuerza No conservativa de rozamiento y por tanto el esquiador llegará con menor velocidad. (La variación de energía potencial sigue siendo la misma que antes, sin embargo ahora llega con menor energía mecánica y por tanto con menor energía cinética.)

E4A.S2015
Un bloque de 2 kg asciende por un plano inclinado que forma un ángulo de 30º con la horizontal. La velocidad inicial del bloque es de 10 m s^{-1} y se detiene después de recorrer 8 m a lo largo del plano.
a) Calcule el coeficiente de rozamiento entre el bloque y la superficie del plano.
b) Razone los cambios de la energía cinética, potencial y mecánica del bloque.
g = 9,8 m s^{-2}

a) $Ec_A + Ep_A + W_{A\to B}^{F.NoConservat} = Ec_B + Ep_B \Rightarrow ½\, 2\cdot 10^2 + \mu\cdot 2\cdot 9,8\cdot \cos 30\cdot 8\cdot \cos 180 =$ $2\cdot 9,8\cdot 4 \Rightarrow \mu=0,16$
b) $\Delta Ec = -100J$; $\Delta Ep = +78,4J$; $\Delta E = W_{Roz} = -21,6$ J

E6A.S2015
Un bloque de 200 g se mueve sobre un plano horizontal sin rozamiento con una velocidad de 10 m·s^{-1} y choca con el extremo libre de un resorte de masa despreciable y constante elástica k = 1500 N·m^{-1}, comprimiéndolo.
a) Haga un análisis energético del problema y calcule la compresión máxima del resorte.
b) Determine la velocidad del bloque cuando el muelle se ha comprimido 6 cm.

a) $Ec_A + Ep_{A,grav} + Ep_{A,Elást} = Ec_B + Ep_{B,grav} + Ep_{B,Elást} \Rightarrow ½\, 0,2\cdot 10^2 = ½\, 1500\cdot x^2 \Rightarrow$ x=11,54cm
b) $½\, 0,2\cdot 10^2 = ½\, 0,2\cdot v_B^2 + ½\, 1500\cdot (0,06)^2 \Rightarrow v_B=8,54$ m/s

E6B.S2015
a) Trabajo y diferencia de energía potencial.
b) La energía cinética de una partícula sobre la que actúa una fuerza conservativa se incrementa en 500 J. Razone cuáles son las variaciones de la energía mecánica y de la energía potencial de la partícula.
b) Si la fuerza es conservativa $\Rightarrow \Delta Ec + \Delta Ep = 0 \Rightarrow \Delta Ep = -500J$ y $\Delta E = 0$

CAMPO GRAVITATORIO

E1A.S2009

Desde una altura de 5000 Km sobre la superficie terrestre se lanza hacia arriba un cuerpo con una cierta velocidad.

a) Explique para qué valores de esa velocidad el cuerpo escapará de la atracción terrestre.

b) Si el cuerpo se encontrara en una órbita geoestacionaria ¿Cuál sería su velocidad?

$G=6{,}67\cdot 10^{-11}$ N m^2 kg^{-2} ; $M_T=6\cdot 10^{24}$ Kg ; R_T=6400 Km

a) La velocidad de escape es aquella que debemos comunicar al satélite para que escape del campo gravitatorio, es decir para mandarlo hasta el infinito, o dicho de otra manera, para que su energía mecánica sea cero, ya que como sabemos la energía potencial siempre es negativa y va aumentando hasta hacerse nula en el infinito, mientras que la energía cinética es siempre positiva y va disminuyendo hasta hacerse cero también en el infinito, así que allí $Ec_\infty + Ep_\infty = 0 + 0 = 0$

aplicando el principio de conservación de la energía mecánica entre el punto P (situado a una altura de 5000 Km sobre la superficie, es decir que *r=R$_T$+5000Km*) y el infinito:

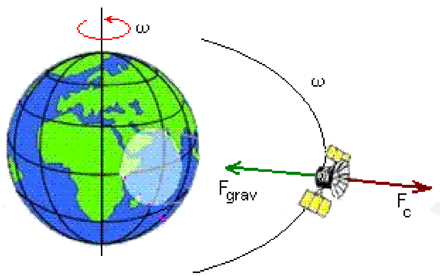
$$Ec_P + Ep_P = Ec_\infty + Ep_\infty$$

$$E = \frac{1}{2}mv^2_{escape} + \left(-G\frac{M\cdot m}{r}\right) = \cancel{\frac{1}{2}mv^2_\infty} + \cancel{\left(-G\frac{M\cdot m}{\infty}\right)}$$

de donde:

$$v_{escape} = \sqrt{\frac{2GM}{r}} = \sqrt{\frac{2\cdot 6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 6\cdot 10^{24}}{6400.000+5000.000}} = 8379 m/s$$

a) Una órbita geoestacionaria es aquella órbita, en el plano del ecuador, en la que el satélite gira con la misma velocidad angular que la tierra (es decir que tenga un periodo de 1 día), porque de esa forma siempre estará sobre el mismo lugar de la tierra, como si estuviera inmóvil ahí encima. Para un observador no inercial, la fuerza de atracción gravitatoria debe compensar la centrífuga, así que:



$$G\frac{M\cdot m}{r^2} = m\frac{v^2}{r}$$

Despejando se deduce que la velocidad orbital es:

$$v = \sqrt{\frac{GM}{r}}$$

Quiere decir que un satélite puede girar en cualquier órbita sin más que ajustar su velocidad al valor del radio. Sin embargo, de acuerdo con la tercera ley de Kepler, el

valor del periodo de revolución y el radio también debe guardar la relación $T^2 = k\,r^3$ en consecuencia si queremos que la órbita sea estacionaria:

1º debemos calcular el valor del radio para que el periodo sea de 1 día. Para ello aplicamos la tercera ley de Kepler, muy fácil de deducir:

$$G\frac{M\cdot \cancel{m}}{r^{\cancel{2}}} = \cancel{m}\frac{v^2}{\cancel{r}} = \omega^2 r^2 = \boxed{\frac{4\pi^2}{T^2}}\,r^2$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{GM\cdot T^2}{4\pi^2}} = \sqrt[3]{\frac{6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 6\cdot 10^{24}\cdot (24\cdot 3600)^2}{4\pi^2}} = 42297 Km$$

2º una vez calculado el radio que corresponde al periodo de revolución de 1 día (radio de la órbita estacionaria) ahora sí podemos calcular la velocidad orbital que corresponde a ese radio:

$$v = \sqrt{\frac{GM}{r}} = \sqrt{\frac{6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 6\cdot 10^{24}}{42297000}} = 3075\ m/s$$

o bien

$$v = \frac{2\pi r}{T} = \frac{42297 Km}{1 día} = 3075\,m/s$$

E2A.S2009

Suponga que la órbita de la Tierra alrededor del sol es circular, de radio $1{,}5\cdot 10^{11}$ m.

a) Calcule razonadamente la velocidad de la tierra y la masa del sol.

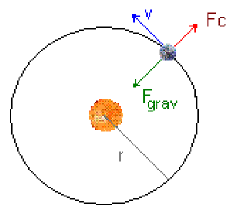
b) Si el radio orbital disminuyera un 20% ¿Cuáles serían el periodo de revolución y la velocidad orbital de la tierra?

$G=6{,}67\cdot 10^{-11}$ N m^2 kg^{-2}

a) Sabiendo el periodo de revolución (que es de 1 año) y el radio de la órbita, para calcular la velocidad orbital de la tierra alrededor del sol, solo hay que tener en cuenta que se mueve con velocidad constante en módulo, por tanto:

$$v = \omega r = \frac{2\pi r}{T} = \frac{2\pi\cdot 1{,}5\cdot 10^{11}}{365\cdot 24\cdot 3600} = 2{,}99\cdot 10^4\,m/s$$

Ahora, teniendo en cuenta que desde el punto de vista de un observador no inercial situado en la tierra, la fuerza de atracción gravitatoria debe compensarse con la centrífuga, tenemos que:



$$G\frac{M\cdot m}{r^2} = m\frac{v^2}{r}$$

$$M = \frac{v^2 r}{G} = \frac{(2{,}99\cdot 10^4)^2\cdot 1{,}5\cdot 10^{11}}{6{,}67\cdot 10^{-11}} = 2{,}01\cdot 10^{30} Kg$$

b) Si el radio orbital disminuyera un 20%, entonces sería *r´=0,8r*. De acuerdo con la tercera ley de Kepler:

$$\left.\begin{array}{l} T^2 = k\,r^3 \\ T'^2 = k\,(0{,}8r)^3 \end{array}\right\} \qquad \frac{T^2}{T'^2} = \frac{1}{0{,}8^3} \qquad \Rightarrow \qquad T' = 0{,}72T$$

y como la velocidad orbital es inversamente proporcional al periodo (ya que $v = 2\pi r / T$), tendremos que la velocidad en la nueva órbita es:

$$v' = \frac{v}{0{,}72} = 1{,}39v$$

obtenemos un valor mayor para la velocidad, lo que resulta razonable, ya que al acercarse al sol la fuerza gravitatoria será mayor, por lo que debe aumentar la velocidad y así la fuerza centrífuga

E2B.S2009
a) Explique qué son fuerzas conservativas. Ponga ejemplos de fuerzas conservativas y no conservativas.
b) Un campo uniforme es aquél cuya intensidad es la misma en todos los puntos. ¿Tiene el mismo valor su potencial en todos los puntos?. Razone la respuesta.

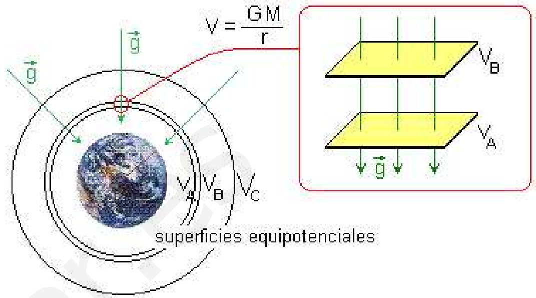
a) Teoría
b) Que el campo gravitatorio (o eléctrico) sea uniforme no significa que el potencial en todos los puntos sea el mismo, de hecho, de acuerdo con la definición de ddp entre dos puntos como la circulación del vector intensidad de campo entre ellos:

$$V_A - V_B = \int_A^B \vec{g} \bullet d\vec{r}$$

En el caso particular de que el campo gravitatorio sea uniforme, es decir constante, (cosa que puede suponerse para puntos próximos, como por ejemplo en las inmediaciones de la superficie terrestre) entonces podemos sacarlo de la integral:

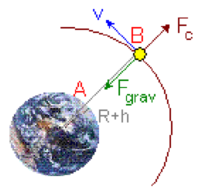
$$V_A - V_B = \int_A^B \vec{g} \bullet d\vec{r} = g(r_B - r_A) = g \cdot d$$

Quiere decir que aunque el campo sea constante el potencial en todos los puntos no es el mismo: La ddp entre dos puntos es igual al valor del campo, supuesto constante, por la distancia entre esos puntos.
No obstante, teniendo en cuenta que el potencial en un punto P, que dista una distancia r_p del centro de la tierra, es $V_P = -G\frac{M}{r_p}$ todos los puntos equidistantes del centro de la tierra (que constituyen una esfera) sí que tienen el mismo valor para la intensidad de campo y el mismo potencial y a esa superficie se le llama superficie equipotencial.



E3A.S2009
a) Defina velocidad de escape de un planeta y deduzca su expresión
b) Se desea colocar un satélite en una órbita circular a una altura h sobre la tierra. Deduzca las expresiones de la energía cinética del satélite en órbita y la variación de su energía potencial respecto de la superficie de la tierra.

a) Teoría
b) La energía cinética del satélite en órbita es la que tiene para la velocidad orbital, que se obtiene considerando que para mantenerse en órbita, desde el punto de vista de un observador no inercial, la fuerza gravitatoria de atracción debe compensarse con la centrífuga:



$$Fgrav = Fc$$

$$G\frac{M \cdot m}{(R+h)^2} = m\frac{v^2}{R+h}$$

$$v_{orbital} = \sqrt{\frac{GM}{R+h}}$$

$$Ec_B = \frac{1}{2}mv_B^2 = \frac{1}{2}m\frac{GM}{R+h}$$

La variación de energía potencial respecto a la superficie de la tierra será:

$$\Delta Ep = Ep_B - Ep_A = -G\frac{M \cdot m}{R+h} - \left(-G\frac{M \cdot m}{R}\right) = GMm\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+h}\right) = GMm\left(\frac{h}{R(R+h)}\right)$$

Como podemos ver para el caso particular de que *h* sea muy pequeña comparado con el valor de *R*, en tal caso $R(R+h) \approx R^2$ y teniendo en cuenta que $g = GM/R^2$ nos quedaría que para puntos próximos a la superficie terrestre una buena aproximación de la variación de energía potencial vendría dada por: $\Delta Ep = mgh$

La energía necesaria para poner en órbita es la suma de la variación de Ep entre la superficie y h más la Ec necesaria para que orbita a una altura h. ya que aplicando el principio de conservación de la energía al satélite entre cuando está parado sobre la superficie del planeta y cuando está girando en la órbita:

$$\Delta Ep + \Delta Ec = W_{\substack{A\to B \\ F.NoConservat}}$$

$$W_{\substack{A\to B \\ F.NoConservat}} = (Ep_{Órbita} - Ep_{Sup.Planeta}) + (Ec_{Órbita} - \cancel{Ec_{Sup.Planeta}})$$

Ese trabajo que debemos aportarle al satélite mediante una fuerza no conservativa se le comunica en forma de energía cinética, así que $W_{\substack{A\to B \\ F.NoConservat}} = Ec_{AlDespegar}$

A la misma conclusión llegaríamos si aplicaríamos la conservación de la energía entre el momento inmediato al despegue y la órbita. Ahora ya si se conservaría la energía mecánica pues ya le comunicamos al satélite la energía necesaria en forma de cinética y comienza a subir bajo la única influencia de la fuerza gravitatoria que es conservativa:

$$Ec_A + Ep_A = Ec_B + Ep_B$$

$$\frac{1}{2}mv_A^2 - G\frac{M\cdot m}{R} = \frac{1}{2}mv_B^2 - G\frac{M\cdot m}{R+h}$$

sustituyendo v_B

$$\frac{1}{2}mv_A^2 - G\frac{M\cdot m}{R} = \frac{1}{2}G\frac{M\cdot m}{R+h} - G\frac{M\cdot m}{R+h}$$

simplificando:

$$v_A = \sqrt{GM\left(\frac{R+2h}{R(R+h)}\right)}$$

E4A.S2009

a) Defina velocidad de escape de la tierra y deduzca su expresión.
b) Explique las variaciones energéticas de un objeto cuando se lanza desde la tierra y alcanza una altura h sobre ella.

a) Teoría
b) Teoría

E5A.S2009

a) Enuncie la ley de gravitación universal y explique algunas diferencias entre las interacciones gravitatoria y eléctrica.
b) Razone porqué dos cuerpos de distintas masas caen con la misma aceleración hacia la superficie de la tierra.

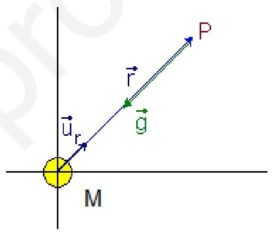
a) Teoría
b) La fuerza en cada punto del campo depende de la característica del testigo, (de su masa en el caso del campo eléctrico o de la carga en el caso de uno eléctrico).

Precisamente con el objeto de disponer de una magnitud que solo dependa de las características del campo y no dependa del testigo es por lo que se define la intensidad de campo, y se define como fuerza por unidad de agente sensible al campo. La intensidad del campo gravitatorio, llamada también aceleración de la gravedad sería:

$$\vec{g} = \frac{\vec{F}}{m} = -G\frac{M}{r^2}\vec{u}_r$$

Como puede verse el valor de la intensidad de campo gravitatorio en un punto, o gravedad, solamente depende de la masa *M* que crea el campo y de *r*, es decir de la posición del punto.

Por eso, todas las masas caerán con la misma aceleración, porque ésta no depende de sus masas, solamente de la constante de gravitación, de la masa de la tierra y de la distancia entre los centros de las masas (si hablamos de la superficie de la tierra, esta distancia sería aproximadamente el radio de la tierra)



El vector intensidad de campo gravitatorio en un punto P (llamado aceleración de la gravedad), apunta siempre desde el punto hacia la masa que crea el campo y tiene la misma dirección y además el mismo sentido de la fuerza en ese punto (que llamamos peso).

Al tener todas las masas la misma aceleración se moverán con la misma velocidad, ya que $\vec{v} = \int \vec{a}\,dt$

E5B.S2009

a) Se lanza hacia arriba un objeto desde la superficie terrestre con una velocidad inicial de 10^3 m.s^{-1}. Comente los cambios energéticos que tienen lugar durante el ascenso del objeto y calcule la altura máxima que alcanza considerando despreciable el rozamiento.
b) una vez alcanzada dicha altura ¿Qué velocidad se debe imprimir al objeto para que escape del campo gravitatorio terrestre?
R_T=6400Km ; g=10m.s^{-2}

a) Simplemente, aplicamos la conservación de la energía mecánica entre la superficie de la tierra y el punto P donde llega con energía cinética cero:

$$Ec_{tierra} + Ep_{tierra} = Ec_P + Ep_P$$

$$\frac{1}{2}mv^2 + \left(-G\frac{M_T\cdot m}{R_T}\right) = \cancel{\frac{1}{2}mv_P^2} + \left(-G\frac{M_T\cdot m}{r_P}\right)$$

simplificando:

$$\frac{1}{2}v^2 + \left(-G\frac{M_T}{R_T}\right) = \left(-G\frac{M_T}{r_P}\right) \quad \text{de donde} \quad r_p = \frac{2GM_TR_T}{2GM_T - v^2R_T}$$

Sustituyendo obtenemos el valor de la distancia al punto P. El problema, en este caso, está en que en lugar de darnos los valores de G, M_T y R_T, como es habitual, nos dan simplemente que g=10m/s^2 y R_T=6400Km. En estos casos calculamos la pieza GM_T :

$$g = G\frac{M_T}{R_T^2} \quad \text{resulta que}$$

$$GM_T = g\cdot R_T^2 = 10\cdot(6400000)^2 = 4{,}096\cdot 10^{14}\, N\cdot m^2/Kg$$

Y ahora sí, sustituyendo:

$$r_p = \frac{2GM_T R_T}{2GM_T - v^2 R_T} = \frac{2\cdot 4{,}096\cdot 10^{14}\cdot 6400000}{2\cdot 4{,}096\cdot 10^{14} - (10^3)^2\cdot 6400000} = 6450394m$$

la altura medida desde la superficie de la tierra será $h = r_p - R_T = 50394m$

b) Teniendo en cuenta que la velocidad de escape es la que debemos imprimir para mandar al infinito al objeto, aplicando la conservación de energía entre el punto P y el infinito:

$$Ec_P + Ep_P = Ec_\infty + Ep_\infty$$

$$\frac{1}{2}mv_{escap}^2 + \left(-G\frac{M_T\cdot m}{r_P}\right) = 0$$

de donde:

$$v_{escape} = \sqrt{\frac{2GM_T}{r_P}} = \sqrt{\frac{2\cdot 4{,}096\cdot 10^{14}}{6450394}} = 11269m/s$$

E6A.S2009

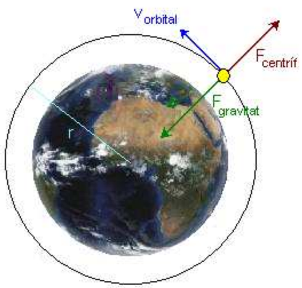
El telescopio espacial Hubble se encuentra orbitando en torno a la tierra a una altura de 600 Km.

a) Determine razonadamente su velocidad orbital y el tiempo que tarda en completar una órbita.

b) Si la masa del Hubble es de 11000 Kg, calcule la fuerza con que la tierra lo atrae y compárela con el peso que tendría en la superficie terrestre.

G=6,67$\cdot$10^{-11} N m^2 kg^{-2} ; M_T=6$\cdot$10^{24} Kg ; R_T=6400 Km

a) Teniendo en cuenta que, desde el punto de vista de un observador no inercial, la fuerza centrífuga debe compensarse con la fuerza gravitatoria, podemos poner que:



$$F_{grav} = F_c$$

$$G\frac{M\cdot m}{r^2} = m\frac{v^2}{r}$$

$$v_{orbital} = \sqrt{\frac{GM}{r}} = \sqrt{\frac{6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 6\cdot 10^{24}}{(6400.000+600.000)}}$$

$$v_{orbital} = 7561{,}18m/s$$

Teniendo en cuenta que la órbita la recorre con velocidad constante en módulo, y que una vuelta corresponde a la longitud de la circunferencia de la órbita:

$$v = \frac{2\pi r}{T} \quad \Rightarrow \quad T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi(6400.000+600.000)}{7561{,}18} = 5816{,}85seg = 1{,}62horas$$

b) La fuerza con que la tierra atrae al satélite, de acuerdo con la ley de Newton es:

$$F = G\frac{M\cdot m}{r^2} = 6{,}67\cdot 10^{-11}\frac{6\cdot 10^{24}\cdot 11000}{r^2}$$

la única diferencia entre el valor de la fuera cuando está orbitando y cuando esté sobre la superficie de la tierra está en la distancia que separa las masas. Obviamente el peso sobre la superficie será mayor que tiene cuando está orbitando porque en el primer caso $r = R_{tierra}$ y en el segundo caso $r = R_{tierra} + h$. Sustituyendo obtendrías los valores de 107475,6N y de 89840,8N respectivamente.

E6B.S2009

a) Enuncie las leyes de Kepler.

b) El radio orbital de un planeta es N veces mayor que el de la tierra. Razone cual es la relación entre sus periodos.

a) Teoría

b) La tercera ley de Kepler dice que los cuadrados de los periodos de revolución de los planetas son proporcionales a los cubos de la distancia media de los planetas al sol: $T^2 = kR^3$

$$\left.\begin{array}{l} T^2 = kR^3 \\ T'^2 = kR'^3 \end{array}\right\} \quad \frac{T^2}{T'^2} = \frac{R^3}{R'^3} = \frac{R^3}{(NR)^3} = \frac{1}{N^3} \quad \Rightarrow \quad T' = T\sqrt{N^3}$$

El periodo del planeta aumentaría en $\sqrt{N^3}$

E1A.S2008

Los satélites meteorológicos son un medio para obtener información sobre el estado del tiempo atmosférico. Uno de estos satélites, de 250 kg, gira alrededor de la Tierra a una altura de 1000 km en una órbita circular.

a) Calcule la energía mecánica del satélite.

b) Si disminuyera el radio de la órbita, ¿aumentaría la energía potencial del satélite? Justifique la respuesta.

G = 6,67$\cdot$10^{-11} N m^2 kg^{-2} ; R_T = 6400 km ; M_T = 6,0$\cdot$10^{24} kg

a) La energía mecánica del satélite en su órbita es la suma de la cinética y potencial. Para calcular la velocidad del satélite en la órbita tendremos en cuenta que, para un observador no inercial, la fuerza gravitatoria se compensa con la centrífuga, así que:

$$Fgrav = Fc \quad \Rightarrow \quad G\frac{M\cdot m}{r^2} = m\frac{v^2}{r} \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{GM}{r}}$$

Por otro lado, la energía mecánica es: $E = Ec + Ep$

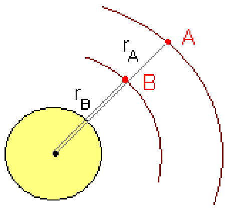
$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \left(-G\frac{M\cdot m}{r}\right) = \frac{1}{2}m\left(\sqrt{\frac{GM}{r}}\right)^2 + \left(-G\frac{M\cdot m}{r}\right) = -\frac{1}{2}G\frac{M\cdot m}{r}$$

$$E = -\frac{1}{2}G\frac{M\cdot m}{r} = -\frac{1}{2}6{,}67\cdot10^{-11}\frac{6{,}0\cdot10^{24}\cdot250}{6400000+1000000} = -6{,}76\cdot10^{9}\,J$$

b) La Ep disminuye al disminuir el radio de la órbita. Podemos razonar de varias formas:

b1. De la propia expresión de $Ep = -G\frac{M\cdot m}{r}$ se deduce que al disminuir *r* la Ep aumenta en valor absoluto, pero como siempre es negativa realmente se hace más pequeña.

b2. Al disminuir al radio de la órbita, la velocidad del satélite debe aumentar, ya que $v = \sqrt{GM/r}$ y por tanto aumentará su energía cinética, con lo que para que se conserve la energía mecánica es preciso que disminuya su energía potencial.



b3. Otra forma sería calcular la variación de Ep que tendrá lugar al ir desde la órbita A hasta la órbita B, más pequeña:

$$Ec_A + Ep_A = Ec_B + Ep_B$$

$$\frac{1}{2}mv_A^2 + Ep_A = \frac{1}{2}mv_B^2 + Ep_B$$

$$\frac{1}{2}m\left(\sqrt{\frac{GM}{r_A}}\right)^2 + Ep_A = \frac{1}{2}m\left(\sqrt{\frac{GM}{r_B}}\right)^2 + Ep_B$$

de donde:

$$Ep_B - Ep_A = \Delta Ep = \frac{GMm}{2}\left(\frac{r_B - r_A}{r_A\cdot r_B}\right) \quad \text{como } r_B < r_A \text{ entonces } \Delta Ep = -$$

Como puede verse, la energía potencial en B es menor que la que tenía en A, por eso al restar sale negativo.

b4. Por definición, el trabajo que hace la fuerza conservativa peso parar llevar una masa desde un punto A hasta otro B es igual a "menos" la diferencia de energía potencial entre esos puntos. El signo menos indica que la fuerza mueve la masa, de forma espontánea, hacia donde la energía potencial es menor, lo que quiere decir que al acercarse a la superficie de la Tierra la Ep disminuye.

E3A.S2008

Un satélite del sistema de posicionamiento GPS, de 1200 kg, se encuentra en una órbita circular de radio 3 R_T.

a) Calcule la variación que ha experimentado el peso del satélite respecto del que tenía en la superficie terrestre.

b) Determine la velocidad orbital del satélite y razone si la órbita descrita es geoestacionaria.

$G = 6{,}67\cdot10^{-11}$ N m^2 kg^{-2} ; R_T = 6400 km ; $M_T = 6{,}0\cdot10^{24}$ kg

a) La diferencia de peso del que tiene en la superficie de la tierra respecto al peso en la órbita de radio 3R es:

$$P_{tierra} - P_{orbita} = G\frac{Mm}{R^2} - G\frac{Mm}{(3R)^2} = GMm\frac{8}{9R^2} = \frac{8}{9}P_{tierra} = 10453\ N$$

Donde se ha tenido en cuenta que $P_{tierra} = G\frac{Mm}{R^2} = 11760\,N$

b) Desde el punto de vista de un observador no inercial para que el satélite esté en órbita es necesario que la fuerza de atracción gravitatoria se compense con la centrífuga, así que:

$$Fgrav = Fc \quad \Rightarrow \quad G\frac{M\cdot m}{r^2} = m\frac{v^2}{r}$$

de donde:

$$v_{orbital} = \sqrt{\frac{GM}{r}} = \sqrt{\frac{GM}{3R}} = \sqrt{\frac{6{,}67\cdot10^{-11}\cdot6{,}0\cdot10^{24}}{3\cdot6400000}} = 4565{,}49\,m/s$$

La velocidad angular del satélite sería:

$$v = \omega\cdot r \quad \Rightarrow \quad \omega_{satelite} = \frac{v}{r} = \frac{4565{,}49}{3\cdot6400000} = 2{,}4\cdot10^{-4}\,rad/s$$

La velocidad angular de la tierra es

$$\omega_{tierra} = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{1día} = \frac{2\pi}{24\cdot3600} = 7{,}27\cdot10^{-5}\,rad/s$$

Como vemos no coinciden, el satélite gira más deprisa que la tierra y por tanto no es geoestacionario.

E4A.S2008

a) Explique qué se entiende por velocidad orbital de un satélite y deduzca razonadamente su expresión para un satélite artificial que describe una órbita circular alrededor de la Tierra.

b) ¿Se pueden determinar las masas de la Tierra y del satélite conociendo los datos de la órbita descrita por el satélite? Razone la respuesta.

a) Teoría
b) Para que un satélite esté en órbita es preciso que:

$$Fgrav = Fc \quad \Rightarrow \quad G\frac{M\cdot m}{r^2} = m\frac{v^2}{r} \quad \Rightarrow \quad G\frac{M}{r} = v^2$$

La masa de la tierra sí que podríamos calcularla, pero no podemos calcular la masa del satélite auque conozcamos todos los parámetros de la órbita, ya que la velocidad y el radio de la órbita son independientes de la masa del satélite. La masa de la tierra en función del radio y periodo de la órbita sería:

$$M = \frac{v^2 r}{G} = \frac{(\omega r)^2 r}{G} = \frac{4\pi^2 r^3}{T^2 G}$$

E4A.S2008
a) Analice las características de la interacción gravitatoria entre dos masas puntuales.
b) Razone por qué la energía potencial gravitatoria de un cuerpo aumenta cuando se aleja de la Tierra.

a) Teoría
b) b1. La energía potencial gravitatoria de una masa *m* en un punto P, que dista *r* del centro de la tierra, suponiendo cero a la Ep en el infinito, viene dada por

$$Ep_P = -G\frac{M\cdot m}{r}$$

como puede verse en la expresión, a medida que aumenta *r* el cociente disminuye, pero la Ep aumenta, ya que es negativa. La energía potencial en un punto siempre es negativa y tiene su "máximo valor negativo" en la superficie terrestre y va aumentando al alejarnos hasta llegar a cero en el infinito
b2. A la misma conclusión llegaríamos si tenemos en cuenta que por definición el trabajo que realiza el campo gravitatorio para llevar una masa *m* desde el punto A hasta el B, es igual a menos la variación de energía potencial entre esos puntos, decir que:

$$W_{\underset{F.Gravitat}{A\to B}} = -\Delta Ep = Ep_A - Ep_B = \int_A^B \vec{F}_{grav} \bullet d\vec{r} = \int_A^B -G\frac{M\cdot m}{r^2}\vec{u}_r \bullet d\vec{r} = \int_A^B -G\frac{M\cdot m}{r^2}\cdot dr$$

$$Ep_A - Ep_B = -G\cdot M\cdot m\left[-\frac{1}{r}\right]_A^B = \left(-G\frac{M\cdot m}{r_A}\right) - \left(-G\frac{M\cdot m}{r_B}\right)$$

es evidente que si el punto B está más alejado que el A, entonces $Ep_A - Ep_B < 0$ y que por tanto la Ep_B es mayor que Ep_A

E6A.S2008
Un satélite artificial de 1000 kg describe una órbita geoestacionaria con una velocidad de $3{,}1\cdot 10^3$ m s^{-1}.

a) Explique qué significa órbita geoestacionaria y determine el radio de la órbita indicada.
b) Determine el peso del satélite en dicha órbita.
$G = 6{,}67\cdot 10^{-11}$ N m^2 kg^{-2} ; $R_T = 6400$ km ; $M_T = 6{,}0\cdot 10^{24}$ kg

a) Una órbita geoestacionaria es aquella en la que el satélite gira en el plano del ecuador con una velocidad angular igual a la de la tierra (o lo que es igual, con el mismo periodo de revolución = 1día), y por tanto el satélite está en todo momento encima del mismo sitio.

Podemos calcular el radio de la órbita estacionaria:
a1) de la forma general, teniendo en cuenta que para un observador no inercial, la fuerza de atracción gravitatoria debe compensarse por la centrífuga y teniendo en cuenta que $v = \omega\cdot r$ y que $\omega = 2\pi / T$

$$\underline{G\frac{M\cdot \cancel{m}}{r^{\cancel{2}}}} = \cancel{m}\frac{v^2}{\cancel{r}} = \omega^2 r^2 = \underline{\frac{4\pi^2}{T^2}\ r^2}$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{GM\cdot T^2}{4\pi^2}} = \sqrt[3]{\frac{6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 6{,}0\cdot 10^{24}\cdot (24*3600)^2}{4\pi^2}} = 42297Km$$

a2) No obstante, de acuerdo a los datos del problema, es decir, utilizando la velocidad orbital:

$$F_{grav} = Fc \quad \to \quad G\frac{M\cdot m}{r^2} = m\frac{v^2}{r} \quad \to \quad r = \frac{GM}{v^2_{orbital}} = \frac{6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 6{,}0\cdot 10^{24}}{(3{,}1\cdot 10^3)^2} = 41644Km$$

b) El peso del satélite será:

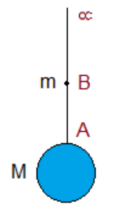
$$Peso \equiv F_{grav} = G\frac{M\cdot m}{r^2} = 6{,}67\cdot 10^{-11}\frac{6{,}0\cdot 10^{24}\cdot 1000}{(41644000)^2} = 230{,}8New$$

Obviamente, mucho menor que los 9800New que pesaría en la superficie de la tierra.

E1A.S2010
a) Explique qué se entiende por velocidad de escape y deduzca razonadamente su expresión.
b) Razone qué energía habría que comunicar a un objeto de masa m, situado a una altura h sobre la superficie de la Tierra, para que se alejara indefinidamente de ella.

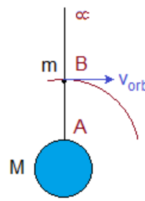
a) Teoría
b) Si queremos que el cuerpo escape completamente debemos comunicarle una energía cinética de manera que no se detenga hasta llegar al infinito, de manera que allí tanto su energía cinética como la potencial será nulas, es decir la energía mecánica será cero.
Podemos considerar dos casos:

Que el objeto haya subido hasta una altura h y esté allí parado. ¿Qué energía adicional hemos de comunicarle para que se escape?	Que el objeto esté orbitando a una altura h. ¿Qué energía adicional hemos de comunicarle para que se escape?

<table>
<tr>
<td>


$$\Delta Ec + \Delta Ep = W_{F.NO.Cons}$$

$$W_{F.NO.Cons} = \cancel{Ec_\infty} - \cancel{Ec_B} + \cancel{Ep_\infty}$$

$$W_{F.NO.Cons} = +G\frac{Mm}{r_B}$$
</td>
<td>


$$\Delta Ec + \Delta Ep = W_{F.NO.Cons}$$

$$W_{F.NO.Cons} = \cancel{Ec_\infty} - Ec_B + \cancel{Ep_\infty} -$$

$$W_{F.NO.Cons} = -\frac{1}{2}mv_B^2 + G\frac{Mm}{r_B}$$

$$W_{F.NO.Cons} = -\frac{1}{2}m\left(\sqrt{\frac{GM}{r_B}}\right)^2 + G\frac{Mm}{r_B} = +\frac{1}{2}G\frac{Mm}{r_B}$$
</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">Si ahora quisiéramos saber qué velocidad habríamos de comunicarle, en cada caso, para que el objeto escape solo tendríamos que tener en cuenta que el trabajo que debemos hacer ($W_{F.NO.Conserv}$) se lo comunicamos en forma de energía cinética y solo tendíamos que igualarlo:</td>
</tr>
<tr>
<td>$\frac{1}{2}mv_o^2 = +G\frac{Mm}{r_B} \quad \rightarrow \quad v_o = \sqrt{\frac{2GM}{r_B}}$</td>
<td>$\frac{1}{2}mv_o^2 = +\frac{1}{2}G\frac{Mm}{r_B} \quad \rightarrow \quad v_o = \sqrt{\frac{GM}{r_B}}$</td>
</tr>
</table>

E2A.S2010

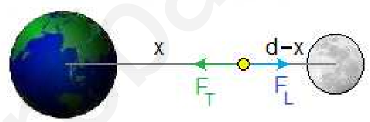
La masa de la Tierra es 81 veces la de la Luna y la distancia entre sus centros es $3{,}84 \cdot 10^5$ km.

a) Calcule en qué punto, entre la Tierra y la Luna se encontraría en equilibrio un meteorito de 200 kg.

b) ¿Cuál sería la energía potencial del meteorito en ese punto?

$G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N m^2 kg^{-2}, $M_L = 7{,}35 \cdot 10^{22}$ kg

a) Para que masa m esté en equilibrio es preciso que la fuerza con que la atrae la Tierra y la fuerza con que la atrae la Luna den resultante nula: Tengan la misma dirección y módulo y sentidos opuestos. Eso solo ocurre en un punto de la recta que une sus centros:



a) $$G\frac{85M_L \cdot m}{x^2} = G\frac{M_L \cdot m}{(d-x)^2} \quad \rightarrow$$

$$\frac{85}{x^2} = \frac{1}{(d-x)^2} \quad \rightarrow$$

$$\frac{\sqrt{85}}{x} = \frac{1}{(d-x)}$$

Sustituyendo $d = 3{,}84 \cdot 10^8$m resulta que $x = 3{,}46 \cdot 10^8$ m del centro de la tierra

b) Aplicando el principio de superposición, la Ep en ese punto será la suma de la que tiene debido a cada masa por separado:

$$Ep = -G\frac{M_T \cdot m}{x} - G\frac{M_L \cdot m}{d-x} = -GM_L m\left(\frac{81}{x} + \frac{1}{d-x}\right) = -2{,}55 \cdot 10^8 \text{ Julios}$$

E3A.S2010

a) Indique las características de la interacción gravitatoria entre dos masas puntuales.

b) Explique en qué punto, entre dos masas puntuales, puede encontrarse en equilibrio una tercera masa puntual y cuál sería su energía potencial.

Teoría. (E2A.S2010)

E2B.S2010

a) Enuncie las leyes de Kepler.

b) Demuestre la tercera ley de Kepler a partir de la ley de gravitación universal de Newton para un órbita circular.

$$G\frac{M \cdot m}{r^2} = m\frac{v^2}{r} \quad \rightarrow \quad G\frac{M}{r^2} = v^2 = (\omega r)^2 = \frac{4\pi^2}{T^2}r^2 \quad \rightarrow \quad T^2 = \frac{4\pi^2}{GM}r^3 \quad \rightarrow \quad T^2 = k\,r^3$$

E3B.S2010

Un satélite de 200 kg describe una órbita circular alrededor de la Tierra con un periodo de dos horas.

a) Calcule razonadamente el radio de su órbita.

b) ¿Qué trabajo tendríamos que realizar para llevar el satélite hasta una órbita de radio doble.

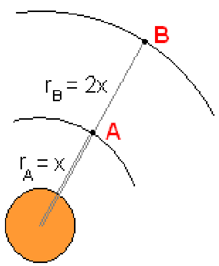
$G = 6{,}67\cdot10^{-11}$ N m^2 kg^{-2} ; $M_T = 6\cdot10^{24}$ kg

$$G\frac{M\cdot m}{r^2}=m\frac{v^2}{r} \quad\rightarrow\quad G\frac{M}{r^2}=v^2=(\omega r)^2=\frac{4\pi^2}{T^2}r^2 \quad\rightarrow\quad r=\sqrt[3]{\frac{GM\cdot T^2}{4\pi^2}} = 8{,}07\cdot10^6\text{m}$$

b) Aplicar la conservación de la energía entre los puntos A y B:

$$\Delta Ec+\Delta Ep=W_{\substack{A\to B\\ F.NoConservat}} \quad \text{o bien que} \quad Ec_A+Ep_A+W_{\substack{A\to B\\ F.NoConservat}}=Ec_B+Ep_B$$

$$W_{\substack{A\to B\\ F.NoConservat}}=Ec_B+Ep_B-Ec_A-Ep_A=E_B-E_A$$



Como es natural, el trabajo que hemos de hacer es igual a la energía que tiene en la nueva órbita, E_B, menos la energía que ya tenía en la órbita anterior, E_A. Teniendo en cuenta que la energía mecánica de una masa que está orbitando con un radio r es la suma de la cinética (debida a su velocidad orbital) más la potencial y es igual a $E=-\frac{1}{2}G\frac{Mm}{r}$ tenemos que:

$$W_{\substack{A\to B\\ F.NoConservat}}=\left(-G\frac{Mm}{2r_B}\right)-\left(-G\frac{Mm}{2r_A}\right)=\left(-G\frac{Mm}{2\cdot2x}\right)-\left(-G\frac{Mm}{2\cdot x}\right)=+G\frac{Mm}{4x}=+2{,}48\cdot10^9\,\text{J}$$

El trabajo resulta positivo, porque realmente tenemos que hacer trabajo para separar el satélite y llevarlo a un punto más alegado.

E5A.S2010

a) Explique qué se entiende por velocidad orbital y deduzca su expresión para un satélite que describe una órbita circular alrededor de la Tierra.

b) Razone cómo variaría la energía mecánica del satélite si se duplicara su masa.

a) Teoría

$$\text{b)}\ E=Ec+Ep=\frac{1}{2}mv^2+\left(-G\frac{M\cdot m}{r}\right)=\frac{1}{2}m\left(\sqrt{\frac{GM}{r}}\right)^2+\left(-G\frac{M\cdot m}{r}\right)=-\frac{1}{2}G\frac{M\cdot m}{r}$$

Vemos que la energía mecánica del satélite es negativa y proporcional a la masa *m* del satélite. Si se duplicara la masa del satélite, la energía mecánica se hará el doble negativa y por tanto realmente disminuye a la mitad (sería como pasar de –8 a –16) .

E4A.S2010

Un satélite de $3\cdot10^3$ kg gira alrededor de la Tierra en una órbita circular de $5\cdot10^4$ km de radio.

a) Determine razonadamente su velocidad orbital.

b) Suponiendo que la velocidad del satélite se anulara repentinamente y empezara a caer sobre la Tierra, ¿con qué velocidad llegaría a la superficie terrestre? Considere despreciable el rozamiento del aire.

$G = 6{,}67\cdot10^{-11}$ N m^2 kg^{-2} ; $M_T = 6\cdot10^{24}$ kg ; $R_T = 6370$ km

$$\text{a)}\quad G\frac{M\cdot m}{r^2}=m\frac{v^2}{r} \quad\rightarrow\quad v_{orbital}=\sqrt{\frac{GM}{r}}=\sqrt{\frac{6{,}67\cdot10^{-11}\cdot6\cdot10^{24}}{5\cdot10^7}}=2829\,\text{m/s}$$

b) Aplicando el principio de conservación de la energía entre el punto A (a una distancia $5\cdot10^7$m) y el punto B (en la superficie de la tierra, a una distancia igual al radio de la tierra)

$$\frac{1}{2}\cancel{mv_A^2}+Ep_A=\frac{1}{2}mv_B^2+Ep_B$$

$$\frac{1}{2}\cancel{mv_A^2}-\frac{GMm}{r_A}=\frac{1}{2}mv_B^{\,2}-\frac{GMm}{r_B}$$

de donde:

$$v_B=\sqrt{2GM\left(\frac{r_A-r_B}{r_Ar_B}\right)}=\sqrt{2\cdot6{,}67\cdot10^{-11}\cdot6\cdot10^{24}\left(\frac{5\cdot10^7-6{,}37\cdot10^6}{5\cdot10^7*6{,}37\cdot10^6}\right)}=10471\,m/s$$

Fíjate en la expresión que hemos obtenido. En el caso particular de que cayera desde un punto próximo a la superficie podríamos aproximar que $r_A\approx r_B=R_T$ y si llamamos $h=r_A-r_B$ y tenemos en cuenta que $g=GM/R_T{}^2$ nos quedaría una expresión particular como la que debe sonarte: $v=\sqrt{2gh}$

E6B.S2010

a) La energía potencial gravitatoria de un cuerpo de masa m situado a una altura h puede escribirse como Ep = m g h. Comente el significado y los límites de validez de dicha expresión.

b) Un cuerpo de masa m se eleva desde el suelo hasta una altura h de dos formas diferentes: directamente y mediante un plano inclinado. Razone que el trabajo de la fuerza peso es igual en ambos casos.

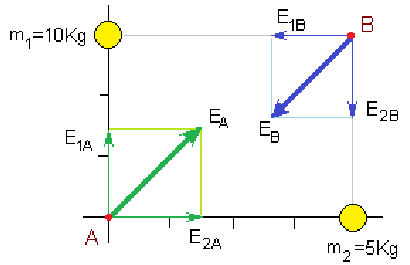
a) Teoría. b) Teoría. (porque la fuerza peso es conservativa y, en consecuencia, el trabajo para llevar una masa de un punto A hasta otro B es independiente del camino seguido.)

E5B.S2010

Dos masas puntuales m = 10 kg y m' = 5 kg están situadas en los puntos (0,3) m y (4,0) m, respectivamente.

a) Dibuje el campo gravitatorio producido por cada una de las masas en el punto A (0,0) m y en el punto B (4,3) m y calcule el campo gravitatorio total en ambos puntos.

b) Determine el trabajo necesario para desplazar una partícula de 0,5 kg desde el punto B hasta el A. Discuta el signo de este trabajo y razone si su valor depende de la trayectoria seguida.
$G = 6{,}67\cdot10^{-11}$ N m^2 kg^{-2}



a) $\vec{E}_A = \vec{E}_{2A} + \vec{E}_{1A} = G\dfrac{5}{4^2}\vec{i} + G\dfrac{10}{3^2}\vec{j} = 2{,}08\cdot10^{-11}\vec{i} + 7{,}41\cdot10^{-11}\vec{j}$ (N/m)

$\vec{E}_B = \vec{E}_{1B} + \vec{E}_{2B} = -G\dfrac{10}{4^2}\vec{i} - G\dfrac{5}{3^2}\vec{j} = -4{,}17\cdot10^{-11}\vec{i} + -3{,}71\cdot10^{-11}\vec{j}$ (N/m)

b) El trabajo que tenemos que realizar para llevar un cuerpo de un punto A hasta otro B es igual al incremento de energía potencial, es decir $W_{A\to B,nosotros} = \Delta Ep = Ep_B - Ep_A$

La energía potencial en los puntos A y B, de acuerdo con el principio de superposición, es la suma de la que cada masa hace por separado, así que:

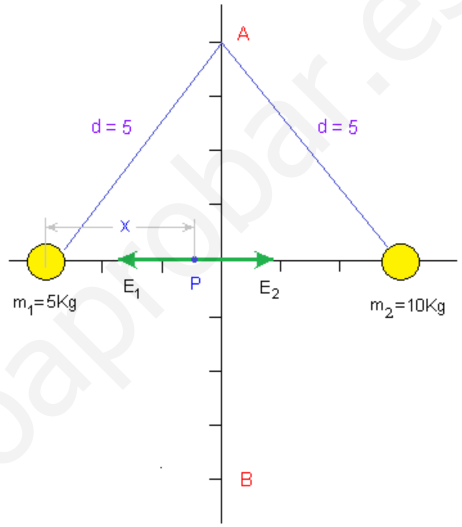
$$Ep_A = -G\frac{m_1\cdot m}{r_{1A}} - G\frac{m_2\cdot m}{r_{2A}} = -G\left(\frac{10\cdot0{,}5}{3} + \frac{5\cdot0{,}5}{4}\right) = -1{,}53\cdot10^{-10}\,J$$

$$Ep_B = -G\frac{m_1\cdot m}{r_{1B}} - G\frac{m_2\cdot m}{r_{2B}} = -G\left(\frac{10\cdot0{,}5}{4} + \frac{5\cdot0{,}5}{3}\right) = -1{,}39\cdot10^{-10}\,J$$

$$W_{A\to B,nosotros} = Ep_B - Ep_A = +1{,}4\cdot10^{-11}\,J$$

La energía potencial en los puntos A y B son negativas, lo que quiere decir que la masa m está ligada al campo gravitatorio en esos puntos. Que el trabajo que tenemos que realizar para llevar la masa m=0,5Kg desde el punto A(0,0) al B(4,3) sea positivo indica que realmente debemos realizar trabajo para llevarla. (ello es lógico ya que la Ep en el punto B es mayor que la que tenía en el punto A y la situación sería como subir una piedra a un tejado)

E6A.S2010
Dos masas puntuales $m_1 = 5$ kg y $m_2 = 10$ kg se encuentran situadas en los puntos (−3, 0) m y (3, 0) m, respectivamente.
a)Determine el punto en el que el campo gravitatorio es cero.
b)Compruebe que el trabajo necesario para trasladar una masa m desde el punto A (0, 4) m al punto B (0, −4) m es nulo y explique ese resultado.



a) $G\dfrac{m_1}{x} = G\dfrac{m_2}{(6-x)^2} \quad\to\quad \dfrac{5}{x} = \dfrac{10}{(6-x)^2}$

x = 2,5 de m_1 → punto P(–0´5,0)

b) $W_{A\to B,nosotros} = \Delta Ep = Ep_B - Ep_A$

$$\left.\begin{aligned} Ep_A &= -G\frac{m_1\cdot m}{r_{1A}} - G\frac{m_2\cdot m}{r_{2A}} = -\frac{G\cdot m(m_1+m_2)}{d} \\ Ep_B &= -G\frac{m_1\cdot m}{r_{1B}} - G\frac{m_2\cdot m}{r_{2B}} = -\frac{G\cdot m(m_1+m_2)}{d} \end{aligned}\right\}$$

$W_{A\to B,nosotros} = Ep_B - Ep_A = 0$

El trabajo es nulo porque la masa *m* se mueve simétricamente, primero acercándose hacia las masas, donde el trabajo que hacemos sería negativo hasta llegar al eje X, y luego la alegamos (ahora sí que hacemos trabajo y sería positivo) hasta colocarla en el punto simétrico donde, por tanto, la energía potencial es la misma a la inicial.

E3B.S2006
Razone si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:
a) Según la ley de la gravitación la fuerza que ejerce la Tierra sobre un cuerpo es directamente proporcional a la masa de éste. Sin embargo, dos cuerpos de diferente masa que se sueltan desde la misma altura llegan al suelo simultáneamente.
b) El trabajo realizado por una fuerza conservativa en el desplazamiento de una partícula entre dos puntos es menor si la trayectoria seguida es el segmento que une dichos puntos.

a) La magnitud que provoca cambios en la velocidad es la aceleración o intensidad de campo, y ésta (por definición) no depende de la masa del testigo.
b) Falso. El peso es una fuerza conservativa y por tanto el trabajo para ir de un punto a otro no depende del camino seguido, solamente depende de la posición de los puntos.

E4B.S2006
Conteste razonadamente a las siguientes preguntas:

a) Si se redujera el radio de la órbita lunar en torno a la Tierra, ¿aumentaría su velocidad orbital?
b) ¿Dónde es mayor la velocidad de escape, en la Tierra o en la Luna?

a) Verdad, ya que $v_{orbital} = \sqrt{\frac{GM_T}{r}}$

b) La velocidad de escape viene dada por $v_{escape} = \sqrt{\frac{2GM_T}{R_T}}$ o bien $\sqrt{\frac{2GM_L}{R_L}}$ y puesto que la masa de la luna es menor, pero también el radio de la luna es menor, así expresada la velocidad de escape nos resulta imposible compararla para la tierra y la luna. Sin embargo si en ambas expresiones multiplicamos y dividimos por el valor del radio podremos expresarlas en función de la gravedad y el radio:

$$v_{escape} = \sqrt{\frac{2GM \cdot R}{R \cdot R}} = \sqrt{\frac{2GM \cdot R}{R \cdot R}} = \sqrt{2\ g \cdot R}$$

ahora si resulta fácil comprender que la velocidad de escape desde la tierra es mucho mayor que desde la luna, ya que tanto la gravedad como el radio de la tierra son mayores que los de la luna.

E1B.S2001
Un satélite artificial de 500 kg gira alrededor de la Luna en una órbita circular situada a 120 km sobre la superficie lunar y tarda 2 horas en dar una vuelta completa.
a) Con los datos del problema, ¿se podría calcular la masa de la Luna? Explique cómo lo haría.
b) Determine la energía potencial del satélite cuando se encuentra en la órbita citada.
$G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ N\ m^2\ kg^{-2}$; $R_L = 1740$ km

a) $$G\frac{M \cdot \cancel{m}}{r^{\cancel{2}}} = \cancel{m}\frac{v^2}{\cancel{r}} = \omega^2 r^2 = \frac{4\pi^2}{T^2} r^2$$

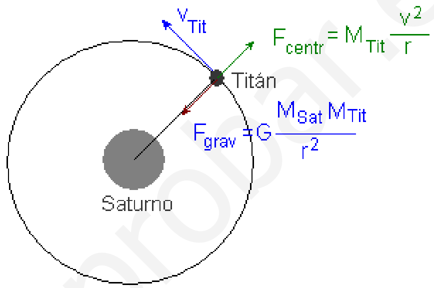
$$M_L = \frac{4\pi^2 r^3}{G T^2} = \frac{4\pi^2 (1860000)^3}{6{,}67 \cdot 10^{-11} (2 \cdot 3600)^2} = 7{,}35 \cdot 10^{22}\ Kg$$

b) $$Ep = -G\frac{M_L \cdot m}{r} = -6{,}67 \cdot 10^{-11} \frac{7{,}35 \cdot 10^{22} \cdot 500}{1860000} = -1{,}32 \cdot 10^9\ \text{Julios}$$

E5B.S2005
3. La misión Cassini a Saturno-Titán comenzó en 1997 con el lanzamiento de la nave desde Cabo Cañaveral y culminó el pasado 14 de enero de 2005, al posarse con éxito la cápsula Huygens sobre la superficie de Titán, el mayor satélite de Saturno, más grande que nuestra Luna e incluso más que el planeta Mercurio.

a) Admitiendo que Titán se mueve alrededor de Saturno describiendo una órbita circular de $1{,}2 \cdot 10^9$ m de radio, calcule su velocidad y periodo orbital.
b) ¿Cuál es la relación entre el peso de un objeto en la superficie de Titán y en la superficie de la Tierra?
$G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ N\ m^2\ kg^{-2}$; $M_{Saturno} = 5{,}7 \cdot 10^{26}$ kg ; $M_{Titán} = 1{,}3 \cdot 10^{23}$ kg ;
$R_{Titán} = 2{,}6 \cdot 10^6$ m ; $g = 10\ m\ s^{-2}$

a) Desde un SRNI centrado en el satélite: Fgrav=Fcentr



$$G\frac{M_{Sat}\cancel{M_{Tit}}}{r^{\cancel{2}}} = \cancel{M_{Tit}}\frac{v^2}{\cancel{r}} = \omega^2 r^2 = \frac{4\pi^2}{T^2} r^2$$

$$v_{orbital} = \sqrt{\frac{GM_{Sat}}{r}} = \sqrt{\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}7 \cdot 10^{26}}{1{,}2 \cdot 10^9}} = 5628{,}72\ m/s$$

$$T = \sqrt{\frac{4\pi^2 r^3}{GM_{Sat}}} = \sqrt{\frac{4\pi^2 (1{,}2 \cdot 10^9)^3}{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}7 \cdot 10^{26}}} = 1{,}34 \cdot 10^6\ s = 372{,}1h$$

b) El peso de un cuerpo de masa m es la fuerza con que una masa atrae a la otra:

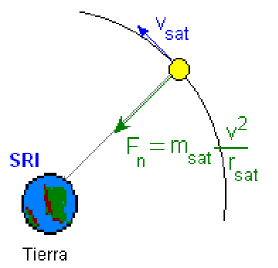
$$P_{Titán} = G\frac{M_{Titán}\, m}{R^2_{Titán}} = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \frac{1{,}3 \cdot 10^{23}\, m}{(2{,}6 \cdot 10^6)^2} = 1{,}28 m$$

$$P_{Tierra} = G\frac{M_{Tierra}\, m}{R^2_{Tierra}} = g_{Tierra}\, m = 10m$$

Dividiendo miembro a miembro obtenemos que $P_{Titán} = P_{Tierra} \cdot 0{,}128$

Un satélite orbita a 6.400 Km del centro de la Tierra y su aceleración vale 9,8 m/s2.
a) Determinar la velocidad orbital de la Luna
b) La aceleración con que orbita la Luna
Datos: Distancia de la Luna a la Tierra 380.000 Km.

Desde el punto de vista de un observador inercial situado en el centro de la tierra (SRI), éste diría que si el satélite (o la Luna) gira (aunque lo hagan con velocidad constante en módulo) deben tener aceleración puesto que el vector velocidad cambia continuamente de dirección. La aceleración que provoca los cambios en dirección de la velocidad es la aceleración normal o centrípeta: Para éste satélite vale $a_{n,Satélite} = 9{,}8\ m/s^2$



La aceleración normal multiplicada por la masa del satélite es la fuerza normal o centrípeta, que en este ejemplo concreto tiene como origen la fuerza de atracción gravitatoria de Newton, por tanto en este caso la aceleración normal coincide con la intensidad de campo o gravedad ($a_{n,Satélite} \equiv g$)

$$F_{normal,sat} \equiv F_{gravit,sat} \quad \Rightarrow \quad m_{sat}\frac{v_{sat}^2}{r_{sat}} = G\frac{M_T m_{sat}}{r_{sat}^2}$$

(En el caso de un cuerpo que gira atado a una cuerda el origen de la fuerza normal sería la tensión de la cuerda. En el caso de un electrón que gira, según el modelo de Rutherford-Bohr , el origen de la fuerza normal sería la atracción de Coulomb. En el caso de un coche que toma una curva la fuerza normal tendría su origen en la fuerza de rozamiento. En el caso de una partícula cargada que se mueve en el seno de un campo magnético (siempre que no lo haga en la misma dirección del campo) la fuerza normal tendría su origen en la fuerza de Lorentz.)

a) Haciendo el mismo razonamiento para el movimiento de la Luna, desde el punto de vista de un observador inercial situado en el centro de la tierra, podemos poner que:

$$F_{normal,Luna} \equiv F_{gravit,Luna} \quad \Rightarrow \quad m_{Luna}\frac{v_{Luna}^2}{r_{Luna}} = G\frac{M_T m_{Luna}}{r_{Luna}^2} \quad \Rightarrow \quad v_{Luna} = \sqrt{\frac{G\ M_T}{r_{Luna}}}$$

El problema ahora es que no conocemos la constante de gravitación (G) ni conocemos la masa de la Tierra, pero para eso podemos utilizar los datos que nos dan para el satélite, del que sabemos que su aceleración normal vale 9,8 m/s^2.

$a_n \equiv g$

$$m_{sat}\frac{v_{sat}^2}{r_{sat}} = G\frac{M_T m_{sat}}{r_{sat}^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{v_{sat}^2}{r_{sat}} = G\frac{M_T}{r_{sat}^2} = 9{,}8 \quad \Rightarrow \quad G\ M_T = 9{,}8 \cdot r_{sat}^2 = 4{,}01 \cdot 10^{14}\ N\,m^2/Kg$$

y ahora que conocemos el valor de $G \cdot M_T$ podemos calcular la velocidad de la Luna:

$$v_{Luna} = \sqrt{\frac{G\ M_T}{r_{Luna}}} = \sqrt{\frac{4{,}01 \cdot 10^{14}}{3{,}8 \cdot 10^8}} = 1027{,}26\ m/s$$

b) La aceleración normal con que orbita la Luna (gravedad de la luna respecto de la tierra) es:

$$a_{n,Luna} = \frac{v_{Luna}^2}{r_{Luna}} = G\frac{M_T}{r_{Luna}^2} = \frac{4{,}01 \cdot 10^{14}}{(3{,}8 \cdot 10^8)^2} = 2{,}77 \cdot 10^{-3}\ m/s^2$$

EJERCICIOS SEMIRESUELTOS Y CON SOLUCIONES

E4A.S2004

Razone la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones:

a) El peso de un cuerpo en la superficie de un planeta cuya masa fuera la mitad que la de la Tierra sería la mitad de su peso en la superficie de la Tierra.

b) El estado de "ingravidez" de los astronautas en el interior de las naves espaciales orbitando alrededor de la Tierra se debe a que la fuerza que ejerce la Tierra sobre ellos es nula.

Sol. a) $P_{PL}=GM_{PL} \cdot m/R^2_{PL} = GM_T \cdot m/R^2_{PL}$; $P_T=GM_T \cdot m/R^2_T$. Dividiendo miembro a miembro: $P_{PL}=½P_T(R^2_T/R^2_{PL}) \rightarrow$ Falso. Sería verdad en el caso de que $R_T=R_{PL}$.

b) Falso. La ingravidez es solo aparente, porque la gravedad existe. Lo que ocurre es que el satélite se mueve con una aceleración exactamente igual a la de la gravedad: Para un observador inercial $g \equiv a_{normal} = v^2/r$ y para un observador no inercial $g = a_{centrífuga} = v^2/r$

Por eso cuando un astronauta suelta un objeto permanece a la misma distancia del astronauta, dando la impresión de que no se mueve. Es exactamente el mismo caso que si viajamos en un ascensor y se parte la cuerda.

E6B.S2001

Dos satélites idénticos están en órbita alrededor de la Tierra, siendo sus órbitas de distinto radio.

a) ¿Cuál de los dos se moverá a mayor velocidad angular? Relación entre sus velocidades angulares.

b) ¿Cuál de los dos tendrá mayor energía mecánica? Relación entre la energía mecánica. Razone las respuestas.

a) $G\frac{M \cdot m}{r^2} = m\frac{v^2}{r} = \omega^2 r^2 \quad \Rightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{GM}{r^3}} \quad \Rightarrow$ Mayor velocidad el de menor radio orbital.

$$\omega_2 = \omega_1\sqrt{\frac{r_1^3}{r_2^3}}$$

b) $E = \frac{1}{2}mv^2 + \left(-G\frac{M \cdot m}{r}\right) = \frac{1}{2}m\left(\sqrt{\frac{GM}{r}}\right)^2 + \left(-G\frac{M \cdot m}{r}\right) = -\frac{1}{2}G\frac{M \cdot m}{r}$

$\Rightarrow$ Como la energía mecánica es negativa, tiene mayor Em el de menor radio.

La relación "en valor absoluto" es $E_2 = E_1\frac{r_1}{r_2}$

EJERCICIOS PROPUESTOS EN SELECTIVIDAD CADA CURSO

CAMPO GRAVITATORIO. CURSO 2010/2011

E1A.S2011

a) Relación entre campo y potencial gravitatorios.

b) Dibuje en un esquema las líneas del campo gravitatorio creado por una masa puntual M. Una masa m, situada en un punto A, se traslada hasta otro punto B, más próximo a M. Razone si aumenta o disminuye su energía potencial.

b) Como la energía potencial que tiene una masa m, a una distancia r, de otra masa M viene dada por Ep=−GMm/r, resulta evidente que al acercarse aumenta la Ep en valor absoluto, pero como tiene signo negativo, realmente al disminuir r disminuye la Ep.
Por otro lado, al definir la diferencia de energía potencial entre dos puntos como $W_{A\to B,F.Conservativa} = -\Delta Ep = Ep_A - Ep_B$ el signo menos indica que cualquier cuerpo sometido a la acción de una fuerza conservativa se mueve espontáneamente desde los puntos de mayor energía potencial a los puntos con menor energía potencial, que es justamente lo que le ocurriría a la masa m, que se movería espontáneamente desde A hasta B igual que una piedra cae hacia la tierra.
Además, como las fuerzas gravitatorias son conservativas, un cuerpo sometido a ellas conserva su energía mecánica. Una masa m al acercarse espontáneamente desde A hasta B bajo la acción de una fuerza (conservativa) tendrá un movimiento acelerado → aumentará su velocidad → aumentará su energía cinética (es lo que ocurre a una piedra cuando cae) la conservación de la energía mecánica (ΔEc↑+ ΔEp↓ = 0) exige que disminuya la energía potencial.

E1B.S2011

Un cuerpo de 50 kg se eleva hasta una altura de 500 km sobre la superficie terrestre.

a) Calcule el peso del cuerpo en ese punto y compárelo con su peso en la superficie terrestre.

b) Analice desde un punto de vista energético la caída del cuerpo desde dicha altura hasta la superficie terrestre y calcule con qué velocidad llegaría al suelo.

R_T = 6370 km ; g = 9,8 m s^{-2}

a) $G M_T / R_T^2 = 9{,}8 \;\Rightarrow\; GM_T = 3{,}98\cdot 10^{14}\,Nm^2/Kg$

Psuperf = 50·9,8 = 490 N; $P_{500Km} = G\frac{Mm}{(R+h)^2} = 421{,}6$ N (disminuye con la distancia)

b) $Ep_A + Ec_A = Ep_B + Ec_B \;\Rightarrow\; -G\frac{Mm}{R+h} = -G\frac{Mm}{R} + \frac{1}{2}m v_B{}^2 \;\Rightarrow\; v_B = 3015$ m/s

E2A.S2011

Un satélite artificial de 1000 kg describe una órbita geoestacionaria.

a) Explique qué significa órbita geoestacionaria y calcule el radio de la órbita indicada.

b) Determine el peso del satélite en dicha órbita.

G = 6,67·10 $^{-11}$ N m^2 kg^{-2} ; M_T = 6,0 ·10^{24} kg ; R_T = 6400 km

a) $G\frac{M\cdot\cancel{m}}{r^{\cancel{2}}} = \cancel{m}\frac{v^2}{\cancel{r}} = (\omega r)^2 = \frac{4\pi^2}{T^2}r^2 \;\Rightarrow$

$$r = \sqrt[3]{\frac{GM\cdot T^2}{4\pi^2}} = \sqrt[3]{\frac{6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot 6\cdot 10^{24}\cdot (24*3600)^2}{4\pi^2}} = 42297\text{Km}$$

b) $P_{órbita} = G\frac{Mm}{(R+h)^2} = 168{,}7$ N

E3A.S2011

a) Escriba la ley de gravitación universal y explique las características de la interacción gravitatoria.

b) Según la ley de gravitación, la fuerza que la Tierra ejerce sobre un cuerpo es proporcional a la masa de éste. Razone por qué no caen con mayor velocidad los cuerpos con mayor masa.

b) Porque la aceleración con la que caen no depende de la masa del objeto.
Precisamente por ese motivo se define la intensidad de campo (gravedad) como fuerza por unidad de masa ($\vec{g} = \vec{F}/m$), para que solamente dependa de las características del campo (masa que lo crea y posición en el campo)
La velocidad que adquieren los cuerpos al caer, de acuerdo con el principio de conservación de la energía mecánica, se debe a la disminución de energía potencial.

E3B.S2011

Un satélite de 200 kg describe una órbita circular alrededor de la Tierra y su energía cinética es de 5,3·10^9 J.

a) Deduzca la expresión del radio de la órbita y calcule su valor y el de la energía mecánica del satélite.

b) Determine la velocidad de escape del satélite desde su posición orbital.

G = 6,7·10^{-11} N m^2 kg^{-2} ; M_T = 6·10^{24} kg

a) $G\frac{M\cdot m}{r^2} = m\frac{v_{orb}^2}{r} \;\to\; r = GM/v_{orb}^2$. (como Ec=1/2 mv^2) r = GMm/2Ec = 7,58·10^6 m

$$E = Ec + Ep = \frac{1}{2}mv_{orb}^2 + \left(-G\frac{Mm}{r}\right) = \frac{1}{2}G\frac{Mm}{r} + \left(-G\frac{Mm}{r}\right) = -\frac{1}{2}G\frac{Mm}{r} = -Ec = -5{,}3\cdot 10^9 \text{ J}$$

b) $E = \frac{1}{2}mv_{escape}^2 + \left(-G\frac{Mm}{r}\right) = \frac{1}{2}mv_{\infty}^2 + \left(-G\frac{Mm}{\infty}\right) = 0 \;\to\; v_{escape} = \sqrt{\frac{2GM}{r}} = 10295{,}63$ m/s

E4B.S2011

a) Energía potencial gravitatoria terrestre.

b) Dos satélites idénticos giran alrededor de la Tierra en órbitas circulares de distinto radio. ¿Cuál de los dos se moverá a mayor velocidad? ¿Cuál de los dos tendrá mayor energía mecánica? Razone las respuestas.

b) $v_{orb} = \sqrt{GM/r} \;\Rightarrow$ El satélite que gira con menor radio tendrá mayor velocidad
$E = -GMm/r \;\Rightarrow$ El satélite que gira con menor radio tendrá menor energía mecánica.
(a menor r mayor valor absoluto de E, pero al ser negativa resulta que E es menor)

E5A.S2011

a) Velocidad orbital de un satélite.

b) Suponga que el radio de la Tierra se redujera a la mitad de su valor manteniéndose constante la masa terrestre. ¿Afectaría ese cambio al periodo de revolución de la Tierra alrededor del Sol? Razone la respuesta.

b) No cambiaría el periodo de revolución, ya que la distancia entre la Tierra y el Sol, que se mide de centro a centro, sería la misma, y de acuerdo con la 3ª leu de Kepler T^2=kr^3

E6A.S2011
Un satélite artificial de 400 kg describe una órbita circular a una altura h sobre la superficie terrestre. El valor de la gravedad a dicha altura es la tercera parte de su valor en la superficie de la Tierra.
a) Explique si hay que realizar trabajo para mantener el satélite en esa órbita y calcule el valor de h.
b) Determine el periodo de la órbita y la energía mecánica del satélite.
$g = 9{,}8\ m\ s^{-2}$; $R_T = 6{,}4\cdot 10^6$ m

a) No hay que realizar ningún trabajo porque, al tratarse de un campo de fuerzas centrales, la fuerza gravitatoria y el vector desplazamiento siempre forman 90º. Haz un dibujo para aclararlo.

$$g_{SupT} = G\frac{M}{R^2} = 9{,}8 \quad \rightarrow \text{ G M} = 4{,}01\cdot 10^{14}\ N\cdot m^2/Kg$$

$$g_h = G\frac{M}{r^2} = 9{,}8/3 \;\rightarrow\; r = \sqrt{\frac{3GM}{9{,}8}} = 1{,}11\cdot 10^7\ m \;\rightarrow h = 1{,}11\cdot 10^7 - R_T = 4{,}69\cdot 10^6\ m$$

b) Deduce la 3ª ley de Kepler $T^2 = \frac{4\pi^2}{GM} r^3 \;\rightarrow\; T = \sqrt{\frac{4\pi^2}{GM} r^3} = 11574{,}38$ seg

deduce que $E = Ec + Ep = -\frac{1}{2} G\frac{Mm}{r} = -7{,}24\cdot 10^9$ Julios

CAMPO GRAVITATORIO. CURSO 2011/2012

E1A.S2012
a) Explique las características de la interacción gravitatoria entre dos masas puntuales.
b) ¿Qué trabajo realiza la fuerza que actúa sobre una de las dos masas puntuales al describir media órbita circular de radio R alrededor de la otra? ¿Y si se desplazara desde esa distancia R hasta el infinito? Razone las respuestas

b) $W_{órbita} = 0$ porque $\vec{F}_{grav} \perp d\vec{r}$. También puede razonarse porque la órbita es parte de una superficie equipotencial $W_{A\rightarrow B,F.grav} = m(V_A - V_B) = 0$

$$W_{A\rightarrow\infty,Fgrav} = -\Delta Ep = Ep_A - Ep_\infty = Ep_A = -G\,M\,m/r_A$$

E1B.S2012
Se desea lanzar un satélite de 500 kg desde la superficie terrestre para que describa una órbita circular de radio 10 R_T.
a) ¿A qué velocidad debe lanzarse para que alcance dicha altura? Explique los cambios de energía que tienen lugar desde su lanzamiento hasta ese momento.
b) ¿Cómo cambiaría la energía mecánica del satélite en órbita si el radio orbital fuera el doble?
$G = 6{,}67\cdot 10^{-11}\ N\ m^2\ kg^{-2}$; $M_T = 6\cdot 10^{24}$ kg ; $R_T = 6370$ km.
a) Una vez comunicada la velocidad necesaria, ya se conserva la energía mecánica:

$$Ec_A + Ep_A = Ec_B + Ep_B \;\Rightarrow\; \tfrac{1}{2} m v_A^2 - G\frac{Mm}{R} = -G\frac{Mm}{10R} \;\Rightarrow\; v_A = 10634\ m/s$$

La velocidad calculada es la necesaria para que alcance la altura y anda más. Si no se hace nada más el satélite volvería a caer. Para que orbite, una vez que está a esa altura habrá que comunicarle una velocidad tangencial igual a la orbital $v_{orb} = \sqrt{GM/10R}$.
Si la pregunta hubiera sido ¿A qué velocidad debe lanzarse para que orbite? el razonamiento habría sido parecido, solo que en este caso en el punto B debería llegar con una energía cinética igual a la que corresponde a la velocidad orbital:

$$Ec_A + Ep_A = Ec_B + Ep_B \;\Rightarrow\; \tfrac{1}{2} m v_A^2 - G\frac{Mm}{R} = \tfrac{1}{2} m\left(\sqrt{\frac{GM}{10R}}\right)^2 - G\frac{Mm}{10R}$$

b) $E_r = -G\frac{Mm}{2r}$; $E_{2r} = -G\frac{Mm}{2\cdot 2r}$ $\Rightarrow$ Al aumentar al doble el radio de la órbita la energía mecánica se hace el doble (en valor absoluto la mitad)

E2A.S2012
Un meteorito de 400 kg que se dirige en caída libre hacia la Tierra, tiene una velocidad de 20 m s^{-1} a una altura h = 500 km sobre la superficie terrestre. Determine razonadamente:
a) El peso del meteorito a dicha altura.
b) La velocidad con la que impactará sobre la superficie terrestre despreciando la fricción con la atmósfera.
$G = 6{,}67\cdot 10^{-11}\ N\ m^2\ kg^{-2}$; $M_T = 6\cdot 10^{24}$ kg; $R_T = 6370$ km.

a $P_{500Km} = G\frac{Mm}{(R+h)^2} = 3391{,}7$ N

b) $Ep_A + Ec_A = Ep_B + Ec_B \;\Rightarrow\; -G\frac{Mm}{R+h} + \frac{1}{2} m v_A^{\ 2} = -G\frac{Mm}{R} + \frac{1}{2} m v_B^{\ 2} \;\Rightarrow\; v_B = 3024$ m/s

E2B.S2012
a) Energía potencial gravitatoria de una masa puntual en presencia de otra.
b) Deduzca la velocidad de escape de un cuerpo desde la superficie de un planeta esférico de masa M y radio R.
Teoría

E3B.S2012
Se lanza un cohete de 600 kg desde el nivel del mar hasta una altura de 1200 km sobre la superficie de la Tierra. Calcule:
a) Cuánto ha aumentado la energía potencial gravitatoria del cohete.
b) Qué energía adicional habría que suministrar al cohete para que escapara a la acción del campo gravitatorio terrestre desde esa altura.
$G = 6{,}67\cdot 10^{-11}\ N\ m^2\ kg^{-2}$; $M_T = 6\cdot 10^{24}$ kg ; $R_T = 6370$ km

a) $\Delta Ep = \left(-G\frac{Mm}{R+h}\right) - \left(-G\frac{Mm}{R}\right) = (-3{,}17\cdot 10^{10}) - (-3{,}77\cdot 10^{10}) = 5{,}98\cdot 10^9$ J

b) Cuando está "parado" a 1200Km, tiene una energía = $\cancel{E}c + Ep = -G\frac{Mm}{R+h} = -3{,}17\cdot 10^{10}$ J
La energía para mandarlo al infinito (para que llegue con Ec=0 y donde la Ep=0) es $+3{,}17\cdot 10^{10}$ J

E4B.S2012
a) Enuncie las leyes de Kepler.
b) Razone, a partir de la segunda ley de Kepler y con la ayuda de un esquema, cómo cambia la velocidad de un planeta al describir su órbita elíptica en torno al Sol.

b) deduce que $\frac{dA}{dt}=\frac{1}{2}|\vec{r}\wedge\vec{v}|$=cte. $\Rightarrow$ cuanto mayor es el módulo del radio vector, menor será el módulo de la velocidad, es decir en el perihelio (punto más cercano al Sol) la velocidad del planeta será mayor que en el afelio (punto más alejado).

E5A.S2012
a) Explique las características del campo gravitatorio terrestre.
b) Dos satélites idénticos están en órbita circular alrededor de la Tierra, siendo r_1 y r_2 los respectivos radios de sus órbitas ($r_1 > r_2$). ¿Cuál de los dos satélites tiene mayor velocidad? ¿Cuál de los dos tiene mayor energía mecánica? Razone las respuestas.
Igual al E4B.S2011 y Similar al E6B.S2013

E6A.S2012
Una pequeña esfera de 25 kg está situada en el punto (0, 0) m y otra de 15 kg en el punto (3, 0) m.
a) Razone en qué punto (o puntos) del plano XY es nulo el campo gravitatorio resultante.
b) Calcule el trabajo efectuado al trasladar la esfera de 15 kg hasta el punto (4,0) m y discuta el resultado obtenido.
$G = 6{,}67\cdot10^{-11}$ N m^2 kg^{-2}
a) g=0 en el punto (1´7,0)

b) $W_{\underset{Nos}{A\to B}} = +\Delta Ep = Ep_B - Ep_A = \left(-G\frac{25\cdot15}{4}\right)-\left(-G\frac{25\cdot15}{3}\right) = +2{,}08\cdot10^{-9}$ J

El signo positivo indica que realmente debemos hacer trabajo para llevar a la masa de A a B. El trabajo que hemos realizado se queda acumulado en forma de energía potencial.

E6B.S2012
a) Explique el movimiento de un satélite en órbita circular en torno a la Tierra y deduzca la expresión de la velocidad orbital.
b) Indique el significado de velocidad de escape y razone cómo cambia la velocidad de escape de un cuerpo si varía su altura sobre la superficie terrestre de 2 R_T a 3 R_T.

b) $\frac{v_{escap,2R}}{v_{escap,3R}} = \sqrt{2GM/2R}/\sqrt{2GM/3R} = \sqrt{3/2}$

CAMPO GRAVITATORIO. CURSO 2012/2013

E1A.S2013
1. a) Describa las características de la interacción gravitatoria entre dos masas puntuales.
b) Razone en qué punto, situado entre dos masas puntuales m_1 y m_2 (m_1=m_2), sería nula la fuerza sobre una tercera masa puntual m_3 y cuál sería la energía potencial de esta última masa en esa posición.
b) si m_1=m_2, aplicando el principio de superposición, g=0 en el centro de la recta que une las masas.

$Ep_{centro} = \left(-G\frac{m\,m_3}{d/2}\right)+\left(-G\frac{m\,m_3}{d/2}\right) = -4G\frac{m\,m_3}{d}$ donde "d" es la distancia entre las masas m_1 y m_2

E2A.S2013
3. Dos masas puntuales de 20 kg y 30 kg se encuentran separadas una distancia de 1 m.
a) Determine el campo gravitatorio en el punto medio del segmento que las une.
b) Calcule el trabajo necesario para desplazar una masa de 2 kg desde el punto medio del segmento que las une hasta un punto situado a 1 m de ambas masas. Comente el signo de este trabajo.
$G = 6{,}67\cdot10^{-11}$ N m^2 kg^{-2}
a) Aplicando el Principio de Superposición: g=2,67$\cdot10^{-9}$m/s^2 en la dirección de la recta que une las masas y sentido hacia la masa de 30Kg.
b) Ep_A=(−G·20/0,5)+(−G·30/0,5)=−6,67$\cdot10^{-9}$J;
Ep_B=(−G·20/1)+(−G·30/1)=−3,34$\cdot10^{-9}$J

$W_{\underset{F.Conserv}{A\to B}} = -\Delta Ep = Ep_A - Ep_B = -3{,}34\cdot10^{-9}$J

$W_{\underset{Nosotros}{A\to B}} = -W_{\underset{F.Conserv}{A\to B}}$ =+3,34$\cdot10^{-9}$J (realmente debemos hacer trabajo para llevar la masa de A a B)

E3A.S2013
1. a) Explique qué es el peso de un objeto.
b) Razone qué relación existe entre el peso de un satélite que se encuentra en una órbita de radio r en torno a la Tierra y el que tendría en la superficie terrestre.

a) Las masas se atraen con una fuerza que viene dada por la Ley de gravitación de Newton. Cuando una de las masas es la Tierra, a esa fuerza le llamamos peso. Por tanto, el peso de un objeto es la fuerza con que el campo gravitatorio creado por la masa de la Tierra atrae a la masa m del objeto.

$$\vec{F}_{grav,M-m} \equiv \vec{P} = G\frac{M\,m}{r^2}(-\vec{u}_r) = m\vec{g}$$

como vemos el peso no es una constante, ya que depende de la gravedad, que es función de la distancia entre las masas.

b)
$$\left.\begin{aligned} P_s &= G\frac{M\,m}{r^2} \\ P_T &= G\frac{M\,m}{R^2}\end{aligned}\right\} \quad \frac{P_s}{P_T}=\frac{R^2}{r^2} \quad \rightarrow \quad P_s = P_T\frac{R^2}{r^2}$$

Puesto que el radio de la Tierra es una constante (supuesta esférica) y el peso en la superficie también puede considerarse contante (aunque realmente depende de la latitud debido al efecto de rotación de la Tierra sobre sí misma), podemos decir que el peso, al igual que la aceleración de la gravedad, disminuye con el cuadrado de la distancia: Ps = k/r^2.

E3B.S2013
3. El planeta Júpiter tiene varios satélites. El más próximo es Io, que gira en una órbita de radio 421600 km con un periodo de 1,53$\cdot10^5$ s, y el siguiente satélite es Europa, que gira a 670000 km del centro de Júpiter.
a) Calcule la masa de Júpiter y el periodo de rotación de Europa explicando el razonamiento seguido para ello.
b) Determine la velocidad de escape de Júpiter.
$G = 6{,}67\cdot10^{-11}$ N m^2 kg^{-2} ; R_J = 71500 km

a) $G\frac{M_J \cdot \cancel{m_{Io}}}{r^{\cancel{2}}} = \cancel{m}_{Io}\frac{v^2}{\cancel{r}} = (\omega r)^2 = \frac{4\pi^2}{T_{Io}^2}r^2 \Rightarrow M_J = \frac{4\pi^2 r_{Io}^3}{G T_{Io}^2} = 1{,}89 \cdot 10^{27}$Kg

De la 3ª ley de Kepler $T^2 = kr^3 \Rightarrow \frac{r_{Io}^3}{T_{Io}^2} = \frac{r_{Eu}^3}{T_{Eu}^2} \Rightarrow T_{Eu} = 3{,}06 \cdot 10^5$s

b) Deduce: $v = \sqrt{2 G M_J / r} = 59413{,}5$ m/s

E4A.S2013

3. Un satélite artificial de 1200 kg se eleva a una distancia de 500 km de la superficie de la Tierra y se le da un impulso mediante cohetes propulsores para que describa una órbita circular alrededor de la Tierra.

a) Determine la velocidad orbital y el periodo de revolución del satélite.

b) Calcule el trabajo realizado para llevarlo desde la superficie de la Tierra hasta esa altura y la energía mecánica del satélite en órbita. Comente el signo de ambos resultados.

$R_T = 6370$ km ; $g = 9{,}8$ m s^{-2}

a) $G M_T / R_T^2 = 9{,}8 \Rightarrow GM_T = 3{,}98 \cdot 10^{14}$ Nm²/Kg

$v = \sqrt{GM_T / r} = 7611$ m/s

$T = 2\pi r/v = 5671$ s

b) $W_{\substack{A\to B\\ Nos}} = \Delta Ep = Ep_B - Ep_A = \left(-G\frac{Mm}{R+h}\right) - \left(-G\frac{Mm}{R}\right) = 4{,}55 \cdot 10^6$ J

$E_{\substack{satélite\\ órbita}} = Ep + Ec = -G\frac{Mm}{r} + \frac{1}{2}m v_{orb}^2 = -G\frac{Mm}{r} + \frac{1}{2}m\left(\sqrt{\frac{GM}{r}}\right)^2 = -G\frac{Mm}{2r} = -$
$3{,}48 \cdot 10^{10}$ J

E4B.S2013

1. a) Escriba la ley de gravitación universal y explique las características de la interacción gravitatoria entre dos masas puntuales.

b) Razone por qué la energía potencial gravitatoria de un cuerpo aumenta cuando se aleja de la Tierra.

a) Enuncia la Ley de Gravitación de Newton. Indica lo que representa cada una de las magnitudes que aparecen, en especial porqué aparece un signo menos en la expresión y qué significado tiene.

Características: (1) Son fuerzas centrales y por tanto (2) conservativas. Explica qué conlleva ser una fuerza central y qué conlleva ser conservativa.

b) La energía potencial de una masa m en un punto A de un campo creado por otra masa M viene dada por $Ep_A = -\frac{G \cdot m \cdot m'}{r_A}$ donde r_A es la distancia entre las masas. Al aumentar la distancia entre las masas la energía potencial disminuye en valor absoluto, pero realmente aumenta por ser negativa. Aumenta hasta legar a su valor máximo igual a cero cuando $r_A = \infty$.

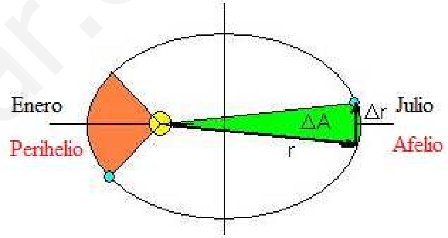
E5A.S2013

1. a) Enuncie las leyes de Kepler.

b) La Tierra está más cerca del Sol en el invierno boreal (en el hemisferio norte) que en el verano. Tanto enero como julio tienen 31 días. ¿En cuál de esos meses recorre la Tierra mayor distancia en su trayectoria? Justifique la respuesta.

a) Teoría

b) De acuerdo con la 2º ley de Kepler, al tener la misma duración los meses de de enero y julio, en ambos el vector de posición de la Tierra respecto al Sol debe barrer la misma área. Puesto que en enero el módulo del vector de posición es menor (al encontrarse la Tierra en el perihelio y estar más cerca del sol) en ese mes la distancia recorrida debe ser mayor. Viendo la figura se comprende mejor.



E5B.S2013

3. Los satélites Meteosat, desarrollados por la Agencia Espacial Europea (ESA), están colocados en una órbita geoestacionaria.

a) Determine razonadamente la distancia entre el satélite y la Tierra.

b) Si la masa del satélite es 2000 kg, determine su energía mecánica en la órbita. Razone si hay que aportar energía para mantenerlo en órbita.

$G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N m² kg^{-2} ; RT = 6370 km ; MT = $6 \cdot 10^{24}$ kg

a) Un satélite gira en una órbita geoestacionaria cuando giran con la misma velocidad angular que la tierra, es decir el mismo periodo, y dicha órbita está en el plano del ecuador.

Para un observador en un SRNI la fuerza de atracción gravitatoria sobre el satélite debe compensarse con la fuerza centrífuga, y teniendo en cuenta que $v = \omega \cdot r$ y que $\omega = 2\pi / T$ podemos poner:

$$G\frac{M \cdot m}{r^2} = \cancel{m}\frac{v^2}{\cancel{r}} = (\omega r)^2 = \frac{4\pi^2}{T^2}r^2$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{GM \cdot T^2}{4\pi^2}} = \sqrt[3]{\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 6 \cdot 10^{24} \cdot (24 * 3600)^2}{4\pi^2}} = 42297\text{Km}$$

La altura sobre la superficie terrestre será $h = 42297 - R_T = 35927$Km

b) $E = Ec + Ep = \frac{1}{2}mv^2 + \left(-G\frac{M \cdot m}{r}\right) = \frac{1}{2}m\left(\sqrt{\frac{GM}{r}}\right)^2 + \left(-G\frac{M \cdot m}{r}\right) = -\frac{1}{2}G\frac{M \cdot m}{r}$

$$E = -\frac{1}{2}G\frac{M\cdot m}{r} = -\frac{1}{2}6{,}67\cdot 10^{-11}\frac{6\cdot 10^{24}\cdot 2000}{42297000} = -9{,}46\cdot 10^{9}\ \mathrm{J}$$

- Mientras el satélite permanezca en esa órbita no consume energía, porque se desplaza por una superficie equipotencial. Recuerda que:

  $$W_{A\to B,campo} = m\,(V_A - V_B) \qquad \text{Si } V_A=V_B \Rightarrow W=0$$

  además en el caso del campo gravitatorio resulta obvio, ya que la fuerza gravitatoria y el vector desplazamiento por una superficie equipotencial (que son esferas concéntricas) forman ángulo de 90º y su coseno es 0

- El signo menos de la energía total del satélite indica que se trata de un sistema ligado a la tierra, es decir que por sí mismo nunca se podría escapar de la atracción terrestre. Para escapar debería tener energía positiva o como mínimo nula.

E6B.S2013

a) Explique qué es la velocidad orbital y deduzca su expresión para un satélite que describa una órbita circular en torno a la Tierra.
b) Dos satélites A y B de distintas masas ($m_A > m_B$) describen órbitas circulares de idéntico radio alrededor de la Tierra. Razone la relación que guardan sus respectivas velocidades y sus energías potenciales

a) Teoría. $v_{orbital} = \sqrt{\frac{GM}{r}}$

b) La velocidad orbital es independiente de la masa del satélite, por tanto será la misma para los satélites de masa m_A y m_B.
Respecto a la energía potencial de los satélites tenemos:

$Ep_{mA} = -G\frac{M\cdot m_A}{r}$ $Ep_{mB} = -G\frac{M\cdot m_B}{r}$	Al ser $m_A > m_B$ tenemos que $Ep_{mA} < Ep_{mB}$ (Ten en cuenta que Ep es negativa)	Dividiendo miembro a miembro obtenemos la relación "en valor absoluto": $Ep_{mA} = Ep_{mB}(m_A/m_B)$ Realmente aumentaría en ese valor, pero en negativo, por eso disminuye.

CAMPO GRAVITATORIO. CURSO 2013/2014

E1B.S2014

a) Explique qué es la velocidad orbital de un satélite y deduzca su expresión.
b) Indique qué es un satélite geoestacionario. ¿Con qué período de revolución y a qué altura debe orbitar en torno a la Tierra?
Teoría

E2B.S2014

Considere dos masas puntuales de 5 y 10 Kg situadas en los puntos (0,4) y (0,−5) m respectivamente.

a) Aplique el principio de superposición y determine en qué punto el campo resultante es cero.
b) Calcule el trabajo que se realiza al desplazar una masa de 2 Kg desde el origen hasta el punto (3,4) m.
$G = 6{,}67\cdot 10^{-11}\ \mathrm{N\,m^2\,kg^{-2}}$

a) a 3,73m de la masa de 5Kg → punto (0,0´27)
b) $Ep_{A(0,0)}=(-G\cdot 10/4)+(-G\cdot 20/5)=-4{,}34\cdot 10^{-10}$J;
$Ep_{B(3,4)}=(-G\cdot 10/3)+(-G\cdot 20/9{,}49)=-3{,}63\cdot 10^{-10}$J

$$W_{\substack{A\to B\\ F.Conserv}} = -\Delta Ep = Ep_A - Ep_B = -4{,}34\cdot 10^{-10}+3{,}63\cdot 10^{-10}=-7{,}06\cdot 10^{-11}\mathrm{J}$$

$W_{\substack{A\to B\\ Nosotros}} = -W_{\substack{A\to B\\ F.Conserv}} = +7{,}06\cdot 10^{-11}$J (realmente debemos hacer trabajo para llevar la masa de A a B)

E3A.S2014 JUNIO

a) Explique las características del campo gravitatorio de una masa puntual.
b) Dos partículas de masas m y 2m están separadas una cierta distancia. Explique qué fuerza actúa sobre cada una de ellas y cuál es la aceleración de dichas partículas.

b) $F=G\cdot 2m^2/r^2$, La fuerza que actúa sobre cada masa es idéntica en módulo y dirección, aunque de sentido opuesto, dado que son fuerzas de acción y reacción (3ª ley de Newton).
La aceleración de la masa m, (aplicando la segunda ley F=m·a) $G\cdot 2m^2/r^2=m\cdot a_m \Rightarrow a_m= G\cdot 2m/r^2$
Haciendo igual $a_{2m}= G\cdot m/r^2 \Rightarrow$ la masa doble se acelera la mitad. Por ese motivo "parece" que solamente la Tierra ejerce fuerza sobre nosotros y nosotros no la ejercemos sobre ella, cuando realmente las dos fuerzas son iguales, porque son fuerzas de acción y reacción. Lo que ocurre es que al ser la masa de la Tierra muy grande comparada con la nuestra la aceleración que experimenta es prácticamente nula.

E3B.S2014 JUNIO

Dos masas puntuales de 5 y 10 kg, respectivamente, están situadas en los puntos (0,0) y (1,0) m, respectivamente.
a) Determine el punto entre las dos masas donde el campo gravitatorio es cero.
b) Calcule el potencial gravitatorio en los puntos A (−2,0) m y B (3,0) m y el trabajo realizado al trasladar desde A hasta B una masa de 1,5 kg. Comente el significado del signo del trabajo.
$G = 6{,}67\cdot 10^{-11}\ \mathrm{N\,m^2\,kg^{-2}}$

a) Similar al E6A.S2010. Sol. x=0,41m de la masa de 5 Kg
b) De acuerdo con el principio de superposición, el potencial en el punto A es la suma del potencial debido a cada una de las masas. (Y lo mismo para el potencial del punto B)

$$\left.\begin{aligned} V_A &= -G\frac{m_1}{r_{1A}} - G\frac{m_2}{r_{2A}} = -G\frac{5}{2} - G\frac{10}{3} = -G\frac{35}{6} \\ V_B &= -G\frac{m_1}{r_{1B}} - G\frac{m_2}{r_{2B}} = -G\frac{5}{3} - G\frac{10}{2} = -G\frac{40}{6} \end{aligned}\right\}$$

$$W_{A\to B,nosotros} = m\Delta V = m(V_B - V_A) = 1{,}5(-G\frac{40}{6} - -G\frac{35}{6}) = -1{,}5\cdot G\frac{5}{6} = -8{,}34\cdot 10^{-11}\mathrm{J}$$

Que nuestro trabajo sea negativo indica que la masa se mueve espontáneamente desde el punto A hasta el B. Lógico, ya cualquier partícula se mueve espontáneamente hacia

donde disminuya su energía potencial y las masas, como siempre son positivas y V=Ep/m, se mueven siempre hacia potenciales decrecientes, como pasa en este caso, ya que $V_A > V_B$.
(ten en cuenta se trata de valores negativos: V_A=–3,89.10^{-10} J/Kg > V_B=–4,45.10^{-10} J/Kg)

E4A.S2014

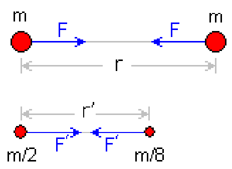
Durante la misión del Apolo 11 que viajó a la Luna en julio de 1969, el astronauta Michael Collins permaneció en el módulo de comando, orbitando en torno a la Luna a una altura de 112 km de su superficie y recorriendo cada órbita en 2 horas.
a) Determine razonadamente la masa de la Luna.
b) Mientras Collins orbitaba en torno a la Luna, Neil Armstrong descendió a su superficie. Sabiendo que la masa del traje espacial que vestía era de 91 kg, calcule razonadamente el peso del traje en la Luna (P_{Luna}) y en la Tierra (P_{Tierra}).
$G = 6,67 \cdot 10^{-11}$ N m^2 kg^{-2} ; R_{Luna} = 1740 km ; g_{Tierra} = 9,8 m s^{-2}

a) $G\frac{M\cdot \cancel{m}}{r^{\cancel{2}}} = \cancel{m}\frac{v^2}{\cancel{r}} = (\omega r)^2 = \frac{4\pi^2}{T^2}r^2 \quad \Rightarrow \quad M = \frac{4\pi^2 r^3}{G T^2}$ =7,25·10^{22}Kg

b) P_{Luna}=G·M_Lm/r_L^2=145,4Kg; P_{Tierra}=9,8·91=891,8Kg (más de 6 veces más)

E4B.S2014

a) Explique las características de la interacción gravitatoria entre dos masas puntuales.
b) Dos partículas puntuales de masa m están separadas una distancia r. Al cabo de un cierto tiempo la masa de la primera se ha reducido a la mitad y la de la segunda a la octava parte. Para que la fuerza de atracción entre ellas tenga igual valor que el inicial, ¿es necesario acercarlas o alejarlas? Razone la respuesta.



$F = G\frac{m\cdot m}{r^2}$

$F´= G\frac{m/2\cdot m/8}{r´^2} = G\frac{m\cdot m}{16r´^2}$ Si F=F´ $\Rightarrow$ $G\frac{m\cdot m}{r^2} = G\frac{m\cdot m}{16r´^2}$

$\Rightarrow$ r = 4r´
Para que se atraigan con la misma fuerza hay que disminuir la distancia a la cuarta parte (r´= r/4)

E5B.S2014

a) La Estación Espacial Internacional orbita en torno a la Tierra a una distancia de 415 km de su superficie. Calcule el valor del campo gravitatorio que experimenta un astronauta a bordo de la estación.
b) Calcule el periodo orbital de la Estación Espacial Internacional.
g = 9,8 m s^{-2} ; R_T = 6370 km

a) g_{sup}=G·M/R_T^2 $\Rightarrow$ G·M=9,8·6370000^2=3,98·10^{14}N·m^2/Kg
$g_{órbita}$=G·M/r^2=3,98·10^{14}/6785000^2=8,64m/s^2

b) $G\frac{M\cdot \cancel{m}}{r^{\cancel{2}}} = \cancel{m}\frac{v^2}{\cancel{r}} = (\omega r)^2 = \frac{4\pi^2}{T^2}r^2 \quad \Rightarrow$

$T = \sqrt{\frac{4\pi^2 r^3}{GM}} = \sqrt{\frac{4\pi^2(6785000)^3}{3{,}98\cdot 10^{14}}}$ =5568,68s

E6A.S2014

Dos masas puntuales de 2 kg están situadas en los puntos A (−5,0) m y B (5,0) m.
a) Calcule el valor del campo gravitatorio en el punto C (0,5) m.

b) Calcule el módulo de la fuerza gravitatoria que actúa sobre una masa puntual de 1 kg colocada en el punto C. Si se traslada esta masa desde el punto C hasta el origen de coordenadas, calcule la variación de su energía potencial.
$G = 6,67 \cdot 10^{-11}$ N m^2 kg^{-2}

a) g=3,77·10^{-12}m/s^2

b) por definición la fuerza por unidad de masa=g (F=mg=3,77·10^{-12}N)
$Ep_{C(0,5)}$=)=(−G·2/7,07)+(−G·2/7,07)=−3,77·10^{-11}J;
$Ep_{O(0,0)}$=(−G·2/5)+(−G·2/5)=−5,34·10^{-11}J
$\Delta Ep = Ep_O - Ep_C$ = −1,56·10^{-11}J (Por definición es igual al trabajo que hacemos nosotros para llevar la masa de 1Kg desde el punto C al O. El valor negativo indica que realmente no haríamos trabajo porque la masa se mueve espontáneamente del punto C al O.)

E1A.S2014

a) Enuncie la ley de gravitación universal y comente el significado físico de las magnitudes que intervienen en ella.
b) Suponga que el planeta Tierra duplicase su radio. ¿En qué factor debería variar su masa para que el campo gravitatorio en su superficie se mantuviera constante? Razone la respuesta.

b) $g = G\frac{M}{R^2}$; $g´= G\frac{M´}{(2R)^2}$; para que g=g´ $\Rightarrow$ M´=4M

CAMPO GRAVITATORIO. CURSO 2014/2015

E1A.S2015

a) Escriba la ley de Gravitación Universal y explique el significado de las magnitudes que intervienen en ella y las características de la interacción entre dos masas puntuales.
b) Una masa, m, describe una órbita circular de radio R alrededor de otra mayor, M, ¿qué trabajo realiza la fuerza que actúa sobre m? ¿Y si m se desplazara desde esa distancia, R, hasta infinito? Razone las respuestas.
b) Igual al E1A.S2012

E2A.S2015

Una nave espacial se encuentra en órbita terrestre circular a 5500 km de altitud.
a) Calcule la velocidad y periodo orbitales.
b) Razone cuál sería la nueva altitud de la nave en otra órbita circular en la que: i) su velocidad orbital fuera un 10% mayor; ii) su periodo orbital fuera un 10% menor.
g = 9,8 m s^{-2} ; R_T = 6370 km

a) $G M_T / R_T^2 = 9{,}8 \Rightarrow$ GM_T=3,98·10^{14}Nm^2/Kg
$v = \sqrt{GM_T/r}$ = 5790,5 m/s
T = 2πr/v = 12898 s

b) $v = \sqrt{GM/r}$; si v_B = 1,1·v_A $\Rightarrow$ $r_B = r_A/1{,}1^2$ = 0,83 r_A
T^2=k·r^3 ; si T_B = 0,9·T_A $\Rightarrow$ $r_B = r_A\cdot 0{,}9^{2/3}$ = 0,93 r_A

E2B.S2015

a) Explique los conceptos de campo y potencial gravitatorios y la relación entre ellos.
b) Dibuje en un esquema las líneas del campo gravitatorio creado por una masa puntual M. Otra masa puntual m se traslada desde un punto A hasta otro B, más alejado de M. Razone si aumenta o disminuye su energía potencial.

b) Explica que son las líneas de campo y dibújalas para una masa aislada.
La energía potencial una masa tiene en presencia de otra aumenta con la distancia entre ellas, ya que es "negativa" e inversa a la distancia.

E3B.S2015
La masa de Marte es $6{,}4\cdot10^{23}$ kg y su radio 3400 km.
a) Haciendo un balance energético, calcule la velocidad de escape desde la superficie de Marte.
b) Fobos, satélite de Marte, gira alrededor del planeta a una altura de 6000 km sobre su superficie. Calcule razonadamente la velocidad y el periodo orbital del satélite.
$G = 6{,}67\cdot10^{-11}$ N m^2 kg^{-2}
a) Deduce la expresión $v_{\substack{esc \\ desde\ sup\ erf}} = \sqrt{2GM_{Marte}/R_{Marte}} = 5011$ m/s
b) Deduce la velocidad orbital $v_{orb} = \sqrt{GM_{Marte}/r_{orb}} = 2131$ m/s; $T = 2\pi r / v_{0rb} = 27715$ s.

E4B.S2015
a) Explique las características del campo gravitatorio terrestre.
b) La energía potencial gravitatoria de un cuerpo de masa m, situado a una altura h sobre la superficie de la Tierra, se puede calcular con la fórmula Ep = mgh. Explique el significado y los límites de validez de dicha expresión. ¿Se puede calcular la energía potencial gravitatoria de un satélite utilizando la fórmula anterior? Razone la respuesta.
b) Ep=mhg $\Rightarrow$ Energía potencial de la masa "m" a debido al campo gravitatorio de la Tierra "g" a una altura "h" sobre la superficie "muy pequeña comparada con el radio de la Tierra". Deduce esta expresión calculando $Ep_h - E_{psup.Tierra} = (-GMm/(R+h)^2) - (-GMm/R^2) = mgh$. (Tendrás en cuenta que al ser h muy pequeña comparada con el radio de la Tierra $R^2 \approx (R+h)^2$)
Para alturas más grandes, <u>cuando ya no es posible la aproximación $R^2 \approx (R+h)^2$</u>, debemos utilizar la expresión general de la energía potencial que, referida al infinito, es $Ep=-GMm/r^2$, donde r es la distancia de la masa M, que crea el campo, a la posición que ocupa la masa m.

E5A.S2015
a) Enuncie las leyes de Kepler.
b) Dos satélites A y B se encuentran en órbitas circulares alrededor de la Tierra, estando A al doble de distancia que B del centro de la Tierra. ¿Qué relación guardan sus respectivos periodos orbitales?
b) $T^2 = k\cdot r^3 \Rightarrow T_A^2/T_B^2 = r_A^3/r_B^3 = (2r_A)^3/r_B^3 = 8 \Rightarrow T_A = \sqrt{8}\,T_B$

E5B.S2015
Un cuerpo de 200 kg situado a 5000 km de altura sobre la superficie terrestre cae a la Tierra.
a) Explique las transformaciones energéticas que tienen lugar suponiendo que el cuerpo partió del reposo y calcule con qué velocidad llega a la superficie.
b) ¿A qué altura debe estar el cuerpo para que su peso se reduzca a la tercera parte de su valor en la superficie terrestre?
$G = 6{,}67\cdot10^{-11}$ N m^2 kg^{-2}; $M_T = 6{,}0\cdot10^{24}$ kg ; $R_T = 6370$ km
a) $Ec_A + Ep_A = Ec_B + Ep_B \Rightarrow -G\dfrac{Mm}{R+h} = -G\dfrac{Mm}{R} + \tfrac{1}{2}mv_B^2 \Rightarrow v_B = 7433$ m/s

b) $P = GMm/R^2$; $P/3 = GMm/(R+h)^2 \Rightarrow h = R(\sqrt{3}-1) = 4663{,}16$ Km

E6A.S2015
Dos masas, $m_1 = 50$ kg y $m_2 = 100$ kg, están situadas en los puntos A(0,6) y B(8,0) m, respectivamente.
a) Dibuje en un esquema las fuerzas que actúan sobre una masa $m_3 = 20$ kg situada en el punto P(4,3) m y calcule la fuerza resultante que actúa sobre ella. ¿Cuál es el valor del campo gravitatorio en este punto?
b) Determine el trabajo que realiza la fuerza gravitatoria al trasladar la masa de 20 kg desde el punto (4,3) hasta el punto (0,0) m. Explique si ese valor del trabajo depende del camino seguido.
$G = 6{,}67\cdot10^{-11}$ N m^2 kg^{-2}
a) Primero, aplicando el principio de superposición, calcula el valor del campo en el punto P(4,3) y luego, a partir de él, calcula la fuerza sobre la masa m_3 colocada en dicho punto.
$g = 2G = 1{,}33\cdot10^{-10}$ N/Kg , en forma de vector
$\vec{g} = 1{,}33\cdot10^{-10}\cos 36{,}9\,\vec{i} - 1{,}33\cdot10^{-10}\,\mathrm{sen}\,36{,}9\,\vec{j}$
$F = mg = 2{,}66\cdot10^{-9}$ N; en forma vectorial
$\vec{F} = m\vec{g} = 2{,}66\cdot10^{-9}\cos 36{,}9\,\vec{i} - 2{,}66\cdot10^{-9}\,\mathrm{sen}\,36{,}9\,\vec{j}$
b) $Ep_{A,P(4,3)} = (-G\cdot 50/5) + (-G\cdot 100/5) = -2\cdot10^{-9}$J;
$Ep_{B,O(0,0)} = (-G\cdot 50/6) + (-G\cdot 100/8) = -1{,}39\cdot10^{-9}$J
$W_{\substack{A\to B \\ F.Conserv}} = -\Delta Ep = Ep_A - Ep_B = -2\cdot10^{-9} + 1{,}39\cdot10^{-9} = -6{,}11\cdot10^{-10}$J $\Rightarrow$ m_3 no se mueve espontáneamente
El trabajo realizado por la fuerza gravitatoria para llevar a m_3 desde un punto a otro es independiente del camino seguido porque se trata de una fuerza conservativa. Solamente depende de la posición de los puntos.

MOVIMIENTO ARMÓNICO SIMPLE

E4A.S2010

Un bloque de 0,12 kg, situado sobre una superficie horizontal lisa y unido al extremo de un resorte, oscila con una amplitud de 0,20 m.

a) Si la energía mecánica del bloque es de 6 J, determine razonadamente la constante elástica del resorte y el periodo de las oscilaciones.

b) Calcule los valores de la energía cinética y de la energía potencial cuando el bloque se encuentra a 0,10 m de la posición de equilibrio.

a) Puesto que la fuerza recuperadora es conservativa y como consecuencia se conserva la energía mecánica, y cuando la Ec=0 la energía mecánica será igual a la potencial máxima, podemos poner que:

$$E = Ec + Ep = Ep_{máx} = \frac{1}{2}KA^2 \quad \rightarrow \quad 6 = \frac{1}{2}K\cdot 0{,}2^2 \quad \rightarrow \quad K = 300\ N/m$$

Teniendo en cuenta que la fuerza recuperadora del resorte, responsable del MAS, obedece la ley de Hooke, y que la condición para que tenga lugar un MAS es que la aceleración se oponga a la deformación de la forma $a = -\omega^2 x$.

$$F = -K\,x = \underline{m\,a} = m\,(-\omega^2 x) = \underline{-m\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 x}$$

igualando y despejando T

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}} = 2\pi\sqrt{\frac{0{,}12}{300}} = 0{,}04\pi\ seg$$

b) Cuando el bloque está en la posición x=0,1m, su energía potencial será:

$$Ep = \frac{1}{2}Kx^2\Big|_{x=0,1} = \frac{1}{2}300\cdot 0{,}1^2 = 1{,}5\,J$$

Y teniendo en cuenta que:

$$E = Ec + Ep \quad \rightarrow \qquad Ec = E - Ep = 6 - 1{,}5 = 4{,}5\,J$$

Otra forma sería calculando directamente la energía cinética, para ello debemos obtener la velocidad en función de la posición de la forma:

$$v^2 = A^2\omega^2\cos^2\varphi \;=\; A^2\omega^2(1-\mathrm{sen}^2\varphi) = \omega^2(A^2 - A^2\mathrm{sen}^2\varphi) = \omega^2(A^2 - x^2)$$

$$Ec = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\cdot\omega^2(A^2 - x^2)\Big|_{x=0,1} = \frac{1}{2}0{,}12\left(\frac{2\pi}{0{,}04\pi}\right)^2(0{,}2^2 - 0{,}1^2) = 4{,}5\,J$$

E4B.S2009

Un cuerpo de 2 Kg se encuentra sobre una mesa plana y horizontal sujeto a un muelle, de constante elástica k=15 $N.m^{-1}$. Se desplaza el cuerpo 2 cm de la posición de equilibrio y se libera.

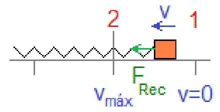
a) Explique cómo varían las energías cinética y potencial del cuerpo e indique a qué distancia de su posición de equilibrio ambas energías tienen igual valor.

b) Calcule la velocidad máxima que adquiere el cuerpo.

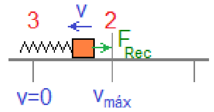
a) Para deformar un resorte, que sigue la ley de Hooke, hemos de aplicar una fuerza $\vec{F}_{nosotros} = kx\cdot\vec{i}$. De acuerdo con la definición de energía potencial, el trabajo que realizamos para deformarlo queda almacenado en forma de energía potencial. El trabajo para llevarlo desde la posición de equilibrio (x=0) hasta el punto x=A será: $W_{x=0\rightarrow x=A,nos} = \Delta Ep = \frac{1}{2}kA^2$

- Cuando el resorte está en el punto x=A (a donde lo hemos llevado) tiene una energía potencial igual al trabajo que hemos hecho para llevarlo $Ep_{x=A} = \frac{1}{2}kA^2$ y una $Ec_{x=A} = 0$ mientras lo mantenemos sujeto.
- Al soltarlo, la fuerza recuperadora elástica del resorte ($\vec{F}_{Recup} = -kx\vec{i}$ que como vemos "por el signo" siempre apunta hacia x=0) tiende a llevarlo a la posición de equilibrio. Su energía potencial ($Ep = \frac{1}{2}kx^2$) va disminuyendo hasta hacerse nula en x=0. Como se trata de un sistema conservativo debe cumplirse que ΔEc+ΔEp=0, por tanto, es evidente que su energía cinética irá aumentando hasta llegar a ser máxima en x=0.

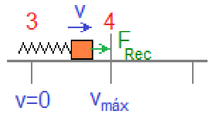
  Por otra parte es lógico que a medida que disminuye x aumente su velocidad, ya que durante todo este cuarto de periodo la fuerza recuperadora y la velocidad tienen la misma dirección y el mismo sentido.

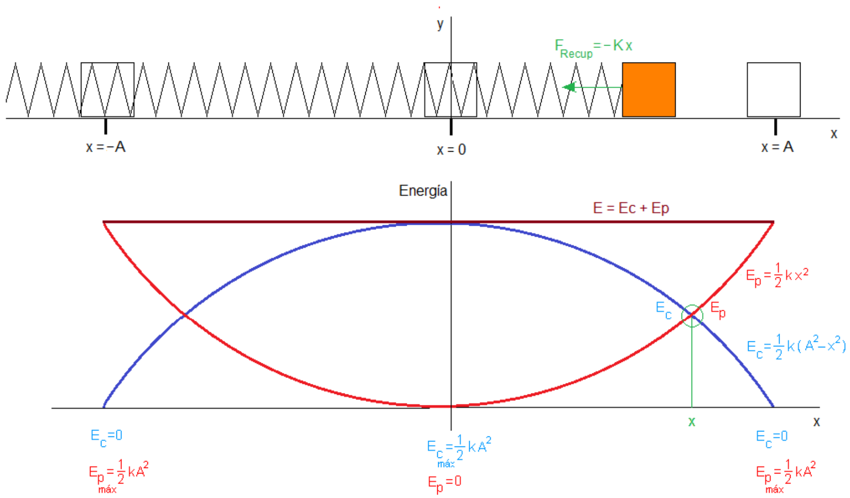


- Debido a la inercia rebasará la posición de equilibrio, pero inmediatamente la fuerza recuperadora cambiará de sentido (porque siempre apunta hacia x=0) así que empezará a perder velocidad (porque ahora la fuerza tiene sentido contario a la velocidad) y, consecuentemente, la energía cinética disminuirá hasta pararse en x=−A. La conservación de la energía mecánica exige que la disminución de energía cinética se compense con un incremento de energía potencial que volverá a ser máxima en x=−A.



- Una vez parado en x=−A, la fuerza recuperadora (responsable de haberlo frenado) como mantiene el sentido hacia la posición de equilibrio comienza a acelerarlo conforme disminuye su distancia a x=0, o lo que es igual: su energía potencial va disminuyendo a costa de aumentar la cinética ….





El punto donde ambas energías tienen el mismo valor es aquel en el que la energía potencial máxima vale la mitad, porque la otra mitad será cinética, por tanto:

$$\begin{aligned} &Ec + Ep = cte = Ep_{max} \\ &\text{Si} \quad Ec = Ep \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad Ep = \frac{Ep_{max}}{2} = \frac{\frac{1}{2}kA^2}{2} = \frac{1}{2}kx^2 \quad \text{de donde}$$

$$x = \frac{A}{\sqrt{2}} = \frac{0,02m}{\sqrt{2}} = 0,014m$$

Al mismo resultado llegaríamos igualando la energía potencial a la energía cinética:

$$Ep = \frac{1}{2}kx^2$$

$$Ec = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\cdot\omega^2(A^2 - x^2) = \frac{1}{2}k(A^2 - x^2)$$

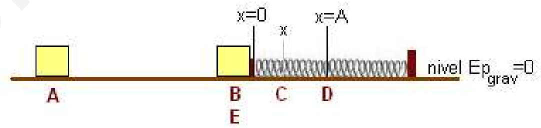
igualando $\frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}k(A^2 - x^2) \quad \rightarrow \quad x = \frac{A}{\sqrt{2}} = \frac{0,02m}{\sqrt{2}} = 0,014m$

b) La velocidad máxima es la que adquiere cuando pasa por la posición de equilibrio, donde la Ep se hace cero convirtiéndose en cinética. Aplicando la conservación de la energía mecánica, tenemos que: $Ec + Ep = cte = Ep_{max} = Ec_{max}$

$$\frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}mv^2_{máx} \quad \rightarrow \quad v_{máx} = \sqrt{\frac{kA^2}{m}} = \sqrt{\frac{15\cdot 0,02^2}{2}} = 0,055m/s$$

E5A.S2010
Un bloque de 8 kg desliza por una superficie horizontal sin rozamiento con una velocidad de 10 m s^{-1} e incide sobre el extremo libre de un resorte, de masa despreciable y constante elástica k = 400 N m^{-1}, colocado horizontalmente.
a) Analice las transformaciones de energía que tienen lugar desde un instante anterior al contacto del bloque con el resorte hasta que éste, tras comprimirse, recupera la longitud inicial.
b) Calcule la compresión máxima del resorte. ¿Qué efecto tendría la existencia de rozamiento entre el bloque y la superficie?

a) Si no hay rozamiento se conservará la energía a lo largo de todo el proceso, puesto que la fuerza elástica es conservativa. Como el bloque se mueve sobre una mesa horizontal podemos tomar nivel cero de Ep gravitatoria en la superficie de la mesa, de esta forma la energía mecánica inicialmente es igual a la cinética que tenga.



- en el punto A, como hemos dicho, $E = Ec + \cancel{Ep_{grav}} = Ec_{máx} = \frac{1}{2}8\cdot 10^2 = 400J$
- en el punto B, como aun el muelle no se ha deformado toda la energía sigue siendo cinética
- en el punto C, aplicando la conservación de la energía tenemos
  $E = Ec + Ep_{grav} + Ep_{elástica}$ La energía mecánica permanece constante, e igual a 400J, pero la energía cinética irá disminuyendo a la vez que va aumentando la potencial elástica.
- en el punto D el bloque se detiene, haciéndose cero su Ec, y ahora toda la energía se habrá acumulado en el resorte en forma de energía potencial elástica.

$$E = \cancel{Ec} + \cancel{Ep_{grav}} + Ep_{elástica} = \frac{1}{2}K\cdot A^2$$

- La fuerza recuperadora del resorte, como se opone a la deformación (F=−Kx) hará que el resorte vuelva a la posición inicial y de esta forma la elongación del muelle irá disminuyendo y con ello la energía potencial elástica ($Ep_{elástica}$= ½Kx^2) , hasta llegar a la posición inicial (*x=0*) donde de nuevo toda la energía será cinética.
- Por la inercia, el bloque rebasará la posición de equilibrio y empezará a deformarse hasta llegar a la posición *x=−A*, donde nuevamente la energía cinética será nula habiéndose convertido en potencial elástica …

b) Como hemos razonado, y puesto que se conserva la energía, si hacemos un balance entre el punto A y el punto D de la figura, tenemos que:

$$\frac{1}{2}m\cdot v^2=\frac{1}{2}K\cdot A^2 \quad\rightarrow\quad \frac{1}{2}8\cdot 10^2=\frac{1}{2}400\cdot A^2 \quad\rightarrow\quad A=x_{máx}=\sqrt{2}m$$

Si hubiera rozamiento ya no se conservaría la energía mecánica. El bloque en cada vaivén iría perdiendo energía por el rozamiento $W_{Rozam}=-mg\mu\cdot s$ por tanto ejecutaría un movimiento oscilatorio cada vez con menor amplitud hasta pararse.
Al haber ahora una fuerza no conservativa la conservación de la energía sería $Ec_A+Ep_A+W_{A\rightarrow D\ F.NoConservat}=Ec_D+Ep_D$ y sustituyendo tendremos que:

$$\frac{1}{2}m\cdot v_o^2-mg\mu\cdot s=\frac{1}{2}K\cdot A^2$$

Como vemos, en cada vaivén (con forme aumenta el espacio recorrido s) la amplitud se hace menor.

E5B.S2009
Un bloque de 1Kg apoyado sobre una mesa horizontal y unido a un resorte, realiza un movimiento armónico simple de 0,1m de amplitud. En el instante inicial su energía cinética es máxima y su valor es 0,5J.
a) Calcule la constante elástica del resorte y el periodo del movimiento.
b) Escriba la ecuación del movimiento del bloque, razonando cómo obtiene el valor de cada una de las variables que intervienen en ella.

a) Como el resorte es un sistema conservativo, la energía cinética máxima que tiene en la posición de equilibrio debe ser igual a la potencial máxima que tiene en el punto de máxima deformación:

$$Ec_{max}=Ep_{máx}=\tfrac{1}{2}kA^2$$

de donde:

$$0,5=\frac{1}{2}k\cdot 0,1^2 \quad\Rightarrow\quad k=100\,N/m$$

Teniendo en cuenta que

$$k=m\omega^2=m\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \quad\Rightarrow\quad T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}=2\pi\sqrt{\frac{1}{100}}=\frac{2\pi}{10}=0,628seg$$

b) La ecuación del MAS correspondiente al resorte es:

$$x=A\,sen(\omega\cdot t+\varphi_o)=0,1sen(10t+0)$$

donde hemos tenido en cuenta que en el momento inicial x=0 porque es el punto donde la energía cinética es máxima y que a x=0 le corresponde φ_o=0
E3B.S2008
a) Describa el movimiento armónico simple y comente sus características cinemáticas y dinámicas.
b) Una masa oscila verticalmente suspendida de un muelle. Describa los tipos de energía que intervienen y sus respectivas transformaciones.

Teoría. La ecuación de una masa que ejecuta un MAS verticalmente debería escribirse como $y=A\,sen(\omega\cdot t+\varphi_o)$

E6A.S2008
Un bloque de 0,5 kg se encuentra sobre una superficie horizontal sin rozamiento, sujeto al extremo de un resorte de constante elástica k = 200 N m^{-1}. Se tira del bloque hasta alargar el resorte 10 cm y se suelta.
a) Escriba la ecuación de movimiento del bloque y calcule su energía mecánica.
b) Explique cualitativamente las transformaciones energéticas durante el movimiento del bloque si existiera rozamiento con la superficie.

a) Una vez que soltemos el resorte ejecutará un MAS de ecuación $x=A\,sem(\omega t+\varphi_o)$
Conocemos la amplitud, pero para escribir la ecuación necesitamos calcular el valor de la frecuencia angular (ω) y la fase inicial (φ_o).

Teniendo en cuenta ahora que la fuerza recuperadora del resorte, responsable del MAS, obedece la ley de Hooke, y que la condición para que tenga lugar un MAS es que la aceleración se oponga a la deformación de la forma $a=-\omega^2 x$.

$$F=-K\,\underline{x}=\underline{m}\,a=m\,(\underline{-\omega^2 x})$$

de donde $\omega=\sqrt{K/m}=\sqrt{200/0,5}=20\,rad/seg$

Así que la ecuación del MAS será $x=0,1sem(20t+\varphi_o)$. Para calcular la fase inicial no hay más que tener en cuenta que inicialmente, es decir para *t=0*, el resorte está en la posición *x=−0,1*m, ya que lo hemos estirado (suponemos hacia la izquierda), por tanto:

para t=0 $\rightarrow\quad -0,1=0,1sem(20\cdot 0+\varphi_o)\quad\rightarrow\quad \varphi_o=arcsen(-1)=-1,57\ rad=-\pi/2$ rad

la ecuación completa del MAS será: $x=0,1sem(20t-\frac{\pi}{2})$ (x en m, t en seg)

La energía mecánica, es la suma de la cinética y de la potencial elástica, e igual a la máxima de cualquiera de ellas, por ejemplo:

$$E=Ec+Ep=Ep_{máx}=\frac{1}{2}KA^2=\frac{1}{2}200\cdot 0,1^2=1J$$

b) igual a E5A.S2010 y E4B.S2009

E6A.S2007
Un cuerpo realiza un movimiento vibratorio armónico simple.
a) Escriba la ecuación de movimiento si la aceleración máxima es $5\pi^2$ $cm.s^{-2}$, el periodo de las oscilaciones 2 s y la elongación del cuerpo al iniciarse el movimiento 2,5 cm.

b) Represente gráficamente la elongación y la velocidad en función del tiempo y comente la gráfica.

a) Teniendo en cuenta que la aceleración se obtiene derivando dos veces la elongación, legaremos a que $a = -A\omega^2 \mathrm{sen}(\omega t + \varphi_0)$ La aceleración máxima es $a_{máx} = A\omega^2$. Conociendo la aceleración máxima y el periodo podemos poner:

$$\left.\begin{array}{l} a_{máx} = A\omega^2 \\ \omega = 2\pi/T \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} 5\pi^2 = A\omega^2 \\ \omega = 2\pi/2 \end{array}\right\} \quad \text{de donde} \quad \omega = \pi \text{ rad/s} \;\; \text{y} \;\; A = 5 \text{ cm}$$

La ecuación del MAS es $x = A\,\mathrm{sem}(\omega t + \varphi_o) = 5\mathrm{sen}(\pi t + \varphi_o)$. Como para *t=0, x=2,5* cm

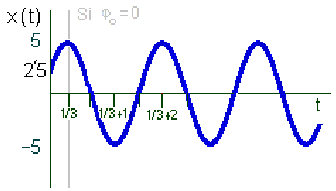
para t=0 $\rightarrow$ $2{,}5 = 5\,sen(\varphi_o)$ $\rightarrow$ φ_o = arcsen(0,5) = 0,52 rad = π/6 rad

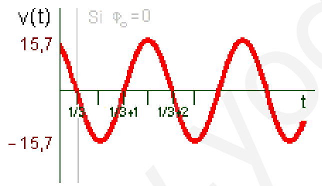
la ecuación completa del MAS será: $x = 5\mathrm{sen}(\pi t + \frac{\pi}{6})$ (x en cm, t en seg)

b) La velocidad se obtiene derivando la elongación: $v = \dfrac{dx}{dt} = 5\pi \cdot \cos(\pi t + \frac{\pi}{6})$

Normalmente damos valores al tiempo de cuarto en cuarto de periodo, es decir cada 0,5seg, pero al haber una fase inicial, primero debemos calcular el primer valor del tiempo que hace que el argumento sea π/2. Para eso: (πt+π/6)=π/2 $\rightarrow$ t=1/3 seg.

t(seg)	0	1/3	1/3+0,5	1/3+1	1/3+1,5	1/3+2	1/3+2,5
$x = 5\,sen(\pi t + \frac{\pi}{6})$	2,50	5,00	0,00	-5,00	0,00	5,00	0,00
$v = 5\pi \cdot cos(\pi t + \frac{\pi}{6})$	13,60	0,00	-15,71	0,00	15,71	0,00	-15,71





Las gráficas de la elongación y de la velocidad están desfasadas un cuarto de periodo, al igual que la aceleración está desfasada otro cuarto. Por tanto cuando la elongación toma los valores máximos, la velocidad toma los valores nulos.

ONDAS

E1B.S2010

En una cuerda tensa se genera una onda viajera de 10 cm de amplitud mediante un oscilador de 20 Hz. La onda se propaga a 2 m s^{-1}.

a) Escriba la ecuación de la onda suponiendo que se propaga de derecha a izquierda y que en el instante inicial la elongación del foco es nula.

b) Determine la velocidad de una partícula de la cuerda situada a 1 m del foco emisor en el instante 3 s.

a) Como la frecuencia de la onda es la misma que la del oscilador y conocemos su velocidad podemos calcular su longitud de onda:

$$v = \lambda \cdot \nu \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{v}{\nu} = \frac{2}{20} = 0{,}1\text{m}$$

el resto de los parámetros de la onda son también muy fáciles de obtener:

$$y_{max} = 0{,}1 \; metros$$
$$T = \frac{1}{\nu} = \frac{1}{20} = 0{,}05 \; seg$$

La ecuación de una onda armónica que se propaga hacia la izquierda es:

$$y = y_{max}\mathrm{sen}2\pi\left(\frac{x}{\lambda} + \frac{t}{T} + \varphi_o\right)$$

Efectivamente esa es la ecuación de una onda que se propaga hacia la izquierda, puesto que a medida que aumenta *t* disminuye *x* (porque va hacia la izquierda) y para que la fase se mantenga constante el término *(x+vt)* debe estar sumando. Sustituyendo:

$$y = 0{,}1\mathrm{sen}2\pi\left(\frac{x}{0{,}1} + \frac{t}{0{,}05} + \varphi_o\right)$$

Solamente nos queda calcular la fase inicial φ_o, para eso de los datos se deduce que en el momento *t=0* el foco, *x=0* $\Rightarrow$ tienen elongación nula, *y=0*. Por tanto:

$$0 = 0{,}1\mathrm{sen}2\pi\left(\frac{0}{0{,}1} + \frac{0}{0{,}05} + \varphi_o\right) \quad \Rightarrow \quad \mathrm{sen}2\pi\varphi_o = 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi_o = 0 \text{ rad}$$

b) La velocidad de las partículas de la cuerda en función del tiempo (ya sabemos que las ondas son doblemente periódicas) se obtiene derivando la ecuación de la elongación respecto al tiempo:

$$v = \frac{dy}{dt} = 0{,}1\frac{2\pi}{0{,}05}\cos 2\pi\left(\frac{x}{0{,}1} + \frac{t}{0{,}05}\right) = 4\pi\cos 2\pi\left(\frac{x}{0{,}1} + \frac{t}{0{,}05}\right)$$

y un punto situado a una distancia *x=1 m* en el momento *t=3 seg*, tendrá una velocidad

$$v\Big|_{x=1,t=3} = 4\pi\cos 2\pi\left(\frac{1}{0,1}+\frac{3}{0,05}\right) = 4\pi\,m/s$$

Que resulta ser igual a la velocidad máxima. (es posible que tu calculadora no sea capaz de resolver ese coseno, pero debes darte cuenta que se trata de $\cos 2\pi\cdot 70$ así que como se trata de un número entero de veces 2π pues su coseno vale 1)

E3A.S2002

La perturbación, Ψ, asociada a una nota musical tiene por ecuación:

$\Psi(x,t) = 5,5\cdot 10^{-3}\,\mathrm{sen}\,(2764,6\,t - 8,159\,x)$ (S I)

a) Explique las características de la onda y determine su frecuencia, longitud de onda, período y velocidad de propagación.

b) Razona la relación que guarda la velocidad con que vibran de dos puntos que distan del foco 40,475m y 38,550m.

a) Se trata de una onda armónica puesto que es una función seno. Además, si se trata de una onda de sonido debe ser una onda longitudinal.
Viaja hacia la derecha porque para mantener la fase al aumentar t debe aumentar x.
Comparando la ecuación de esta onda con la ecuación general, podemos deducir:

$y_{máx}=5,5\cdot 10^{-3}m$

$T = 2,27.10^{-3}seg$ y la frecuencia que es su inversa: $\nu = \frac{1}{T} = 440Hz$

$\lambda = 0,77m$ y el número de ondas: $\tilde{\nu} = \frac{1}{\lambda} = 1,30m^{-1}$

$v = \frac{\lambda}{T} = \lambda\nu = 339,21m/s$

b) Las ondas (al ser funciones seno o coseno) son doblemente periódicas respecto a las dos variables de que dependen: el tiempo y la posición. En el caso concreto de la posición el seno tomará los mismos valores (y por tanto la ecuación de la onda será la misma) para valores de x que disten un múltiplo entero de λ, o bién vibrarán en oposición de fase si distan media λ o múltiplos impares.
La distancia entre los dos puntos alcanzados por la onda es 40,475 – 38,550 = 1,925m
Esa distancia corresponde a dos λ y media, por tanto esos dos puntos ejecutan MAS en oposición de fase, es decir, que cuando uno alcance sus valores cinemáticos máximos el otro tendrá los mínimos.

E1A.S2009

La ecuación de una onda que se propaga por una cuerda tensa es:

$y(x,t) = 0,03\,\mathrm{sen}\,(2t-3x)$ (S.I.)

a) Explique de qué tipo de onda se trata, en qué sentido se propaga y calcule el valor de la elongación en x=0,1m para t=0,2s.

b) Determine la velocidad máxima de las partículas de la cuerda y la velocidad de propagación de la onda.

a) Se trata de una onda armónica porque las dos variables de las que depende, el tiempo y la posición, son argumento de una función seno. Además, puesto que la vibración de los puntos tiene lugar sobre el eje Y y los puntos están sobre el eje X, indicando que esa es la dirección en que se mueve, se trata de una onda transversal.

La onda se propaga hacia la derecha porque para que se mantenga el argumento de la función seno constante, como puede verse, al aumentar el valor de *t* debe aumentar el valor de *x* con valores positivos, es decir hacia la derecha.

El valor de la elongación del punto que dista del foco *x=0,1m* en el momento *t=0,2s* es:

$$y = 0,03\mathrm{sen}(2t-3x) = 0,03\mathrm{sen}(2\cdot 0,2 - 3\cdot 0,1) = 0,003m$$

b) Escribiendo la ecuación de la onda como la ecuación general y comparando tenemos:

$$y = y_{max}\mathrm{sen}2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}\right)$$

$$y = 0,03\mathrm{sen}2\pi\left(\frac{t}{\pi}-\frac{x}{0,66\pi}\right)$$

$y_{max} = 0,03m$

$T = \pi\,seg$

$\lambda = 0,66\pi\,m$

La velocidad de propagación de la onda: $v = \frac{\lambda}{T} = \frac{0,66\pi}{\pi} = 0,66\,m/s$

La velocidad con que vibran los puntos de la cuerda se obtiene derivando la ecuación de la elongación respecto al tiempo, así que:

$$v = \frac{dy}{dt} = 0,03\cdot 2\,\cos(2t-3x)$$

y la velocidad máxima con que vibran los puntos, como puede verse, corresponderá a 0,06 m/s

E3B.S2009
Una onda armónica se propaga de derecha a izquierda por una cuerda con una velocidad de 8 m/s. Su periodo es de 0,5 s y su amplitud es de 0,3 m.
a) Escriba la ecuación de la onda, razonando cómo obtiene el valor de cada una de las variables que intervienen en ella.
b) Calcule la velocidad de una partícula de la cuerda situada en x=2m, en el instante t=1s

a) Si la onda armónica se propaga hacia la izquierda y para que se mantenga el argumento de la función seno constante, al aumentar el valor de *t* debe disminuir el valor de *x*, por tanto:

$$y = y_{max}\,\mathrm{sen}2\pi\left(\frac{x}{\lambda}+\frac{t}{T}\right)$$

- La amplitud es la máxima desviación de la posición de equilibrio que experimentan los puntos del medo cuando vibran, que como sabemos ejecutan un MAS, y por tanto $y_{max}=0{,}3m$
- El periodo, que coincide con el periodo del MAS, es el tiempo que tarda la onda en recorrer una longitud de onda, es decir el tiempo que tarda en pasar una longitud de onda por delante de un observador estacionario, por tanto la velocidad, longitud de onda y periodo están relacionados:

$$v=\frac{\lambda}{T} \qquad \Rightarrow \qquad \lambda = v\cdot T = 8\cdot 0{,}5 = 4m$$

- Supondremos que la fase inicial es cero, al no saber donde está el foco en el momento *t=0*.
- Las dos variables de las que depende una onda son: x es la distancia al foco de los puntos del medio y t es el valor del tiempo

La ecuación de la onda que se propaga hacia la izquierda es:

$$y = 0{,}3\mathrm{sen}2\pi\left(\frac{x}{4}+\frac{t}{0{,}5}\right) \quad \text{(S.I.)}$$

b) La velocidad con que vibran los puntos de la cuerda, que ejecutan un MAS es:

$$v=\frac{dy}{dt}=0{,}3\frac{2\pi}{0{,}5}\cos 2\pi\left(\frac{x}{4}+\frac{t}{0{,}5}\right)=3{,}77\cos 2\pi\left(\frac{x}{4}+\frac{t}{0{,}5}\right)$$

y particularizando para un punto de la cuerda que diste *x=2m* del foco en el instante *t=1s*, tenemos:

$$v\Big|_{x=2,t=1}=0{,}3\frac{2\pi}{0{,}5}\cos 2\pi\left(\frac{2}{4}+\frac{1}{0{,}5}\right)=-3{,}77m/s$$

La velocidad del punto *x=2m* en el instante *t=1s*, coincide con máximo negativo que puede tener.

- Si la fase inicial es cero entonces en el momento *t=0* el foco (x=0) está en la posición de equilibrio, es decir *y=0*. Al cabo de *t=1s* también tendrá una elongación *y=0* y el mismo valor para todas las variables cinemáticas, después de haber ejecutado dos movimientos completos, puesto que 1seg es el doble del periodo, que vale 0,5s.

- Si la elongación del foco en el momento *t=1* vale *y=0*, su velocidad será máxima y lo mismo para todos aquellos puntos que en ese momento disten un múltiplo entero de la longitud de onda (4, 8, 12 ..). Por el contrario todos los puntos que disten media longitud de onda del foco (2, 6, 10, ...) la velocidad será mínima.

- Por tanto era de esperar que un punto situado a *x=2m* del foco en el el momento *t=1s* posea una velocidad mínima (o máxima negativa), tal como se ha obtenido matemáticamente.

E4B.S2008
La ecuación de una onda que se propaga por una cuerda es:

$$y(x,t)=0{,}02\mathrm{sen}\pi(100t-40x) \quad \text{(S.I.)}$$

a) Razone si es transversal o longitudinal y calcule la amplitud, la longitud de onda y el periodo.
b) Calcule la velocidad de propagación de la onda. ¿Es ésa la velocidad con la que se mueven los puntos de la cuerda? ¿Qué implicaría que el signo negativo del paréntesis fuera positivo? Razone las respuestas.

a) La ecuación de la onda indica la forma en que cada uno de los puntos del medio vibran en función del tiempo, y tanto si vibran en la dirección de propagación (onda longitudinal) o perpendicularmente a la dirección de propagación (onda transversal) responden a una misma ecuación, salvo por las letras que utilicemos.
Si nos fijamos en las letras utilizadas, podemos ver que los puntos del medio los hemos definido con la variable (x) lo que quiere decir que están sobre el eje X, mientras que el desplazamiento de esos puntos de la posición de equilibrio se mide con (y), es decir, vibran en el eje Y. En consecuencia la ecuación $y=0{,}02\mathrm{sen}\pi(100t-40x)$ corresponde a una onda transversal. Los parámetros de la onda, comparándola con la ecuación general:

$$y(x,t)=0{,}02\mathrm{sen}2\pi(50t-20x)$$
$$y(x,t)=y_m\mathrm{sen}2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}\right)$$

$y_m=0{,}02m$
$\lambda=1/20=0{,}05m$
$T=1/50=0{,}02seg \quad \Rightarrow \quad \nu=\frac{1}{T}=50Hz$

b) la velocidad de propagación de la onda es una constante que viene dada por:

$$v=\frac{\lambda}{T}=\frac{0{,}05}{0{,}02}=2{,}5\,m/s$$

no tiene nada que ver con la velocidad con que vibran los puntos que lo hacen con una velocidad que varía con el tiempo y viene dada por:

$$v=\frac{dy}{dt}=0{,}02\cdot 100\pi\cos\pi(100t-40x)$$

La ecuación de la onda propuesta es una onda que viaja hacia la derecha, ya que al aumentar el tiempo aumenta *x* (por ir hacia la derecha) y para que se mantenga la fase habría que restar como así aparece.

Sin embargo, si se cambiara el signo: $y(x,t)=0{,}02\text{sen}\pi(100t+40x)$ esta sería la ecuación de una onda que viaja hacia la izquierda, ya que al aumentar el tiempo disminuiría x (por ir hacia la izquierda), por tanto para mantener la fase habría que sumar.

E3B.S2010

La ecuación de una onda es:

$$y(x,t)=10\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right)\text{sen}(100\pi t)\quad \text{(S.I.)}$$

a) Explique de qué tipo de onda se trata y describa sus características.
b) Determine la amplitud y la velocidad de propagación de las ondas cuya superposición daría lugar a dicha onda. ¿Qué distancia hay entre tres nodos consecutivos?

a) Se trata de una onda estacionaria, puesto que solo depende del tiempo, y la amplitud de cada uno de los puntos no es constante (*10sen2πx/λ*), sino que depende de la posición de los puntos, habiendo unos para los que el argumento del seno hace que sea nulo y no vibran nunca (nodos) y otros para los que el argumento hace que valga 1 y vibran con una amplitud máxima igual a 10 m.

Comparando esa ecuación con la ecuación general de una onda estacionaria tenemos que:

$$\left.\begin{array}{l} y=10\text{sen}\,2\pi\frac{x}{4}\,\text{sen}\,2\pi\frac{t}{0{,}02} \\ \\ y=2y_m\text{sen}\,2\pi\frac{x}{\lambda}\cos 2\pi\frac{t}{T}\end{array}\right\}\quad \begin{array}{l}\text{Amplitud de la OE}\quad A=10\text{sen}\,2\pi\frac{x}{4}\\ \text{Amplitud ondas de la generan } y_m=5\text{ m}\\ \lambda=4\text{ m};\ T=0{,}02\text{ seg}\end{array}$$

Aunque en la ecuación de la onda problema la función del tiempo es de tipo seno, es equivalente a la ecuación con la que la hemos comparado, donde la función del tiempo es de tipo coseno, ya que $\text{sen}\alpha=\cos(\alpha-\frac{\pi}{2})=\cos(\frac{\pi}{2}-\alpha)$ y $\cos\alpha=\text{sen}(\alpha+\frac{\pi}{2})=\text{sen}(\frac{\pi}{2}-\alpha)$ .Por tanto siempre podemos escribir la misma función armónica, aunque desfasada *π/2*, y

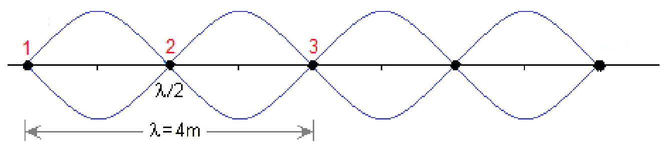
consecuentemente obtendríamos los mismos resultados para todos los parámetros. En este caso:

$$y=2y_m\text{sen}2\pi\frac{x}{\lambda}\text{sen}\left(2\pi\frac{t}{T}+\frac{\pi}{2}\right)$$

b) La velocidad de propagación de la ondas que al interferir generan la OE es:

$$v=\frac{\lambda}{T}=\frac{4m}{0{,}02s}=200\,m/s$$

Los nodos son los puntos que no vibran porque su elongación siempre es nula, por tanto serán aquellos puntos para los que *sen(πx/2)* = 0. Los ángulos que hacen que un seno sea nulo son aquellos en los que el argumento sea 0; π; 2 π; 3 π; …
Es decir, aquellos para los que *x* = 0; 2; 4; 6; … o en general se cumpla que *x* sea un número impar de media longitud de onda. De acuerdo con esto al distancia entre tres nodos consecutivos sería 2(λ/2) = 4 cm, (una longitud de onda) como se aprecia en la figura:



Las ondas armónicas que por superposición dan lugar a esta OE son las siguientes:

$$y_1=5\text{sen}(\frac{2\pi x}{4}+\frac{2\pi t}{0{,}02}-\frac{\pi}{2})\qquad \text{Avanza hacia la izquierda.}$$

$$y_2=5\text{sen}(\frac{2\pi x}{4}-\frac{2\pi t}{0{,}02}+\frac{\pi}{2})\qquad \text{Avanza hacia la derecha (Desfase}$$

π)
Efectivamente, si sumamos, teniendo en cuenta que

$$\text{sen}A+\text{sen}B=2\cdot\text{sen}\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$$

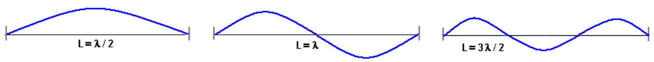
obtendremos la ecuación de arriba. Hemos tenido que dividir el desfase entre las ondas (que siempre que una se refleja es de π rad) para al final obtener dos funciones seno.

E3A.S2009

a) Razone qué características deben tener las ondas, que se propagan por una cuerda tensa con sus extremos fijos, para que su superposición origine una onda estacionaria.
b) Explique qué valores de la longitud de onda pueden darse si la longitud de la cuerda es L

a) Para que se genere una OE en una cuerda (independientemente de que sus extremos estén fijos o no) es preciso: (1) que por la cuerda viajen dos ondas iguales en sentidos

opuestos (la que va y la que se refleja). (2) que la frecuencia de las ondas sea igual a la frecuencia fundamental de vibración de la cuerda o múltiplo de ella.
Además, si la cuerda tiene los dos extremos fijos, ambos extremos deben ser necesariamente nodos y para ello es necesario (3) que la longitud de la cuerda sea múltiplo entero de $\lambda/2$, es decir que $L = n\dfrac{\lambda}{2}$. Para valores enteros de n obtendremos:



b) Del razonamiento anterior se deduce que $\lambda = \dfrac{2L}{n}$. La primera onda, que se obtiene para n=1, tiene una λ=2L se llama primer armónico o fundamental y a los siguientes, para n=2, segundo armónico (λ=L), para n=3, tercer armónico (λ=1,5L), etc.

E6B.S2009
Por una cuerda tensa se propaga la onda:

$$y(x,t) = 8\cdot 10^{-2}\cos(0{,}5x)\,\mathrm{sen}(50t) \quad \text{(S.I.)}$$

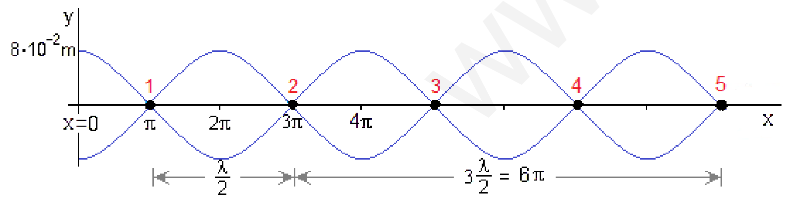
a) Indique las características de la onda y calcule la distancia entre el 2º y el 5º nodo
b) Explique las características delas ondas cuya superposición daría lugar a esa onda, escriba sus ecuaciones y calcule su velocidad de propagación.

a) Comparando la ecuación de la onda con la ecuación general de una onda estacionaria:

$$y = 8\cdot 10^{-2}\cos 0{,}5x \cdot \mathrm{sen}\,50t$$
$$y = 2y_m \mathrm{sen}\,2\pi\frac{x}{\lambda}\cos 2\pi\frac{t}{T}$$

Amplitud de la OE: $A = 8\cdot 10^{-2}\cos 0{,}5x$ (es distinta para cada punto x)
$y_{\text{máx.OE}} = 8\cdot 10^{-2}$ m
Amplitud de las ondas que generan la OE: $y_{max} = 4\cdot 10^{-2}$ metros
$T = 0{,}04\pi$ *seg* y la frecuencia que es su inversa: $\nu = \dfrac{1}{T} = \dfrac{25}{\pi}$ Hz
$\lambda = 4\pi$ metros

La distancia entre dos nodos (o antinodos) consecutivos es $\lambda/2 = 2\pi$ *m* y la distancia entre el 2 y el 5 nodo, como puede verse en la figura es 3 veces $\lambda/2$, por tanto 6π metros.



Observa el dibujo de la onda estacionaria. La amplitud máxima es $8\cdot 10^{-2}$ m. En el punto x=0 hay un vientre ya $A|_{x=0} = 8\cdot 10^{-2}\cos 0{,}5x = 8\cdot 10^{-2}\,\mathrm{m}$. El primer nodo está en el punto x=π, ya que
$A|_{x=\pi} = 8\cdot 10^{-2}\cos 0{,}5x = 0$

b) Las ecuaciones de las ondas que por superposición dan lugar a esta onda estacionaria deben ser dos ondas iguales, de amplitud 4.10^{-2} m y de la misma longitud de onda y periodo, solo que deben viajar en sentidos opuestos. Además, esta onda se ha obtenido superponiendo dos ondas armónicas desfasada π radianes respecto de las que nosotros hemos considerado en la teoría, por tanto:

$$y_1 = 0{,}02\mathrm{sen}2\pi\left(\frac{x}{4\pi} - \frac{t}{0{,}04\pi}\right) \qquad \text{Avanza hacia la derecha}$$
$$y_2 = 0{,}02\mathrm{sen}2\pi\left(\frac{x}{4\pi} + \frac{t}{0{,}04\pi} + 0{,}5\right) \qquad \text{Avanza hacia la izquierda}$$

desfasada π

la velocidad de propagación de las ondas que generan esta onda estacionaria es:

$$v = \frac{\lambda}{T} = \frac{4\pi}{0{,}04\pi} = 100\,\mathrm{m/s}$$

E1B.S2008
En una cuerda tensa de 16 m de longitud, con sus extremos fijos, se ha generado una onda de ecuación:

$$y(x,t) = 0{,}02\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{4}x\right)\cos(8\pi t) \quad \text{(S.I.)}$$

a) Explique de qué tipo de onda se trata y cómo podría producirse. Calcule su longitud de onda y su frecuencia.
b) Calcule la velocidad en función del tiempo de los puntos de la cuerda que se encuentran a 4 m y 6 m, respectivamente, de uno de los extremos y comente los resultados.

a) Evidentemente si la cuerda está sujeta por ambos extremos la onda que tendrá lugar será estacionaria puesto que al llegar a los extremos se reflejará, de manera que tendremos una onda que va y otra que vuelve iguales y el resultado de su suma es una onda estacionaria:

$$y_1 = y_m\mathrm{sen}2\pi\left(\frac{x}{\lambda} + \frac{t}{T}\right) \qquad \text{Avanza hacia la izquierda}$$
$$y_2 = y_m\mathrm{sen}2\pi\left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T}\right) \qquad \text{Avanza hacia la derecha}$$

La superposición $y = y_1 + y_2$ y recordando que $\mathrm{sen}A + \mathrm{sen}B = 2\cdot\mathrm{sen}\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2}$

$$y = 2y_m \operatorname{sen} 2\pi \frac{x}{\lambda} \cos 2\pi \frac{t}{T} \quad \text{Ec. onda estacionaria}$$

comparando la ecuación general de una onda estacionaria con la ecuación concreta:

$$y(x,t) = 0{,}02 \operatorname{sen} 2\pi\left(\frac{x}{8}\right)\cos 2\pi\left(\frac{t}{0{,}25}\right)$$

$\lambda = 8m$ (Como la cuerda tiene sus dos extremos fijos, por tanto son nodos, la longitud de la cuerda debe ser un múltiplo entero de media λ, es decir L=nλ/2. En este caso n=4 y se trata del cuarto amónico.)

$T = 0{,}25seg \quad \Rightarrow \quad \nu = \frac{1}{T} = 4\text{Hz}$

b) Una cosa es la velocidad de la onda, que es una constante ($v = \lambda/T = 8/0{,}25 = 32\text{m/s}$) y otra cosa es la velocidad con que vibran los puntos del medio, que como sabemos ejecutan un MAS y por tanto sus valores cinemáticos varían con el tiempo ente un valor máximo y uno mínimo. La velocidad de un punto se obtiene derivando la ecuación de su elongación, así que:

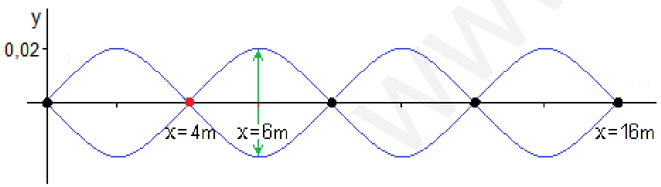
$$v = \frac{dy}{dt} = -0{,}02 \cdot 8\pi \cdot \operatorname{sen} 2\pi\left(\frac{x}{8}\right)\operatorname{sen} 2\pi\left(\frac{t}{0{,}25}\right)$$

La velocidad en función del tiempo de los puntos *x=4* y *x=6* son, sin más que sustituir:

$$v\big|_{x=4} = -0{,}02 \cdot 8\pi \cdot \operatorname{sen} 2\pi\left(\frac{4}{8}\right)\operatorname{sen} 2\pi\left(\frac{t}{0{,}25}\right) = -0{,}02 \cdot 8\pi \cdot \operatorname{sen}\pi \cdot \operatorname{sen} 2\pi\left(\frac{t}{0{,}25}\right) = 0$$

$$v\big|_{x=6} = -0{,}02 \cdot 8\pi \cdot \operatorname{sen} 2\pi\left(\frac{6}{8}\right)\operatorname{sen} 2\pi\left(\frac{t}{0{,}25}\right) = -0{,}02 \cdot 8\pi \cdot \operatorname{sen}\frac{3\pi}{2}\operatorname{sen} 2\pi\left(\frac{t}{0{,}25}\right) = 0{,}16\pi \cdot \operatorname{sen} 2\pi\left(\frac{t}{0{,}25}\right)$$

Como puede verse, el punto que dista *x=4* tiene una velocidad nula en todo momento porque se trata de un nodo y no vibra (*senπ=0*), mientras que el punto que dista *x=6* puede llegar a tener una velocidad máxima igual a la mayor posible (porque *sen3π/2=–1*). Este resultado era de esperar, ya que como la longitud de onda es $\lambda = 8m$, el punto que dista *x=4* está a λ/2 y es un nodo, mientras que el que dista *x=6* está a 3λ/4 y es un vientre o antinodo.



E5B.S2008

En una cuerda tensa, sujeta por sus extremos, se tiene una onda de ecuación:

$$y(x,t) = 0{,}02 \operatorname{sen}(4\pi x)\cos(200\pi t) \quad \text{(S.I.)}$$

a) Indique el tipo de onda de que se trata. Explique las características de las ondas que dan lugar a la indicada y escriba sus respectivas ecuaciones.

b) Calcule razonadamente la longitud mínima de la cuerda que puede contener esa onda. ¿Podría existir esa onda en una cuerda más larga? Razone la respuesta.

a)

$$y = 2y_m \operatorname{sen} 2\pi \frac{x}{\lambda} \cos 2\pi \frac{t}{T} \quad \text{Ec. onda estacionaria}$$

comparando la ecuación general de una onda estacionaria con la ecuación concreta:

$$y(x,t) = 0{,}02 \operatorname{sen} 2\pi\left(\frac{x}{0{,}5}\right)\cos 2\pi\left(\frac{t}{0{,}01}\right)$$

$\lambda = 0{,}5\text{m}$

$T = 0{,}01\text{seg} \quad \Rightarrow \quad \nu = \frac{1}{T} = 100\text{Hz}$

Y la amplitud de las ondas que generan esta onda estacionaria es $y_m = 0{,}02/2 = 0{,}01$ m. Por tanto, las ecuaciones de las ondas armónicas que por superposición generan la onda estacionaria serían:

$$y_1 = 0{,}01 \operatorname{sen} 2\pi\left(\frac{x}{0{,}5} + \frac{t}{0{,}01}\right) \quad \text{Avanza hacia la izquierda}$$

$$y_2 = 0{,}01 \operatorname{sen} 2\pi\left(\frac{x}{0{,}5} - \frac{t}{0{,}01}\right) \quad \text{Avanza hacia la derecha}$$

b) Al estar sujeta la cuerda por los extremos, en ambos debe haber un nodo, de manera que la longitud de la cuerda para que se propague una onda debe ser un múltiplo entero de λ/2, es decir que la longitud de la cuerda debe ser L=nλ/2, donde n= 1, 2, 3,...
La longitud mínima de la cuerda es aquella para la que n=1, es decir L = 0,25m y corresponde a su frecuencia fundamental o primer armónico.

Sí podría existir esa onda en una cuerda más larga, pero siempre su longitud cumpla con la relación L=nλ/2, es decir en cuerdas de longitud 0,5λ (long.mínima), λ, 1,5λ, 2λ,...

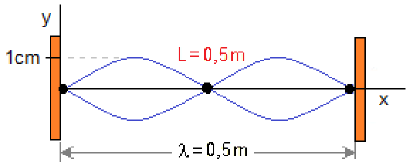
E2A.S2014

Se hace vibrar una cuerda de 0,5m , de longitud, sujeta por los dos extremos, observando que presenta 3 nodos. La amplitud en los vientres es de 1 cm y la velocidad de propagación de las ondas por la cuerda es de 100 $m.s^{-1}$.

a) Escriba la ecuación de la onda, suponiendo que la cuerda se encuentra en el eje X y la deformación de la misma es en el eje Y.

b) Determine la frecuencia fundamental de vibración.

a) Si la cuerda está sujeta por los dos extremos (nodos) y la onda contiene 3 nodos → la longitud de onda debe coincidir con la longitud de la cuerda → λ=L=0,5 m.



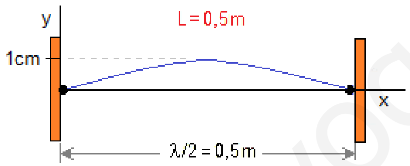
$v_{onda}=\lambda/T \rightarrow$ T=0,005 s;

$$y = 2y_m \operatorname{sen} 2\pi \frac{x}{\lambda} \cos 2\pi \frac{t}{T} = 0{,}01 \operatorname{sen} 2\pi \frac{x}{0{,}5} \cos 2\pi \frac{t}{0{,}005}$$

Ten en cuenta que la amplitud de un vientre es $2y_{máx}$ = 1cm = 0,01m. En efecto, ya que la amplitud de la onda estacionaria es $A = 2y_m \operatorname{sen} 2\pi \frac{x}{\lambda}$. Distinta para cada punto. Los puntos que vibran con amplitud máxima (vientres) son aquellos para los que ese seno vale 1 (x=λ/4 y x=3λ/4) por tanto $A_{máx}=2y_{máx}$.)

No te confundas con $y_{máx}$ que representa la amplitud de las ondas que por superposición generan la onda estacionaria.

b) La frecuencia fundamental (del primer armónico) es la menor frecuencia natural a la que puede oscilar la cuerda, y por tanto le corresponde la mayor longitud de onda → λ_1=1m. A la misma conclusión se llega teniendo en cuenta que la longitud de onda y la longitud de la cuerda sujeta por ambos extremos guardan la relación λ=2L/n, donde n=1,2,3,…. Para el primer armónico n=1 → λ_1=1m



$v_{onda}=\lambda \cdot \nu \quad \rightarrow \quad \nu_1$ =100Hz

EJERCICIOS SEMIRESUELTOS Y CON SOLUCIONES

E6B.S2014

a) Escriba la ecuación de una onda armónica que se propaga a lo largo del eje X e indique el significado de las magnitudes que aparecen en ella.

b) Escriba la ecuación de otra onda que se propague en sentido opuesto y que tenga doble amplitud y frecuencia mitad que la anterior. Razone si las velocidades de propagación de ambas ondas es la misma.

b) La velocidad de propagación de la nueva onda es la mitad, ya que $v_{onda}=\lambda \cdot \nu$
Sin embargo la velocidad máxima con la que vibran los puntos del medio en cada caso es la misma, ya que $v_{máx,puntos}=y_{máx} \cdot \omega= y_{máx} \cdot 2\pi\nu$

E4A.S2014

La ecuación de una onda que se propaga en una cuerda es:

$$y(x,t) = 0{,}04 \operatorname{sen}\left(6t - 2x + \frac{\pi}{6}\right) \quad \text{S.I.}$$

a) Explique las características de la onda y determine su amplitud, longitud de onda, período y frecuencia.

b) Calcule la velocidad de propagación de la onda y la velocidad de un punto de la cuerda situado en x = 3 m en el instante t = 1 s.

a) Onda transversal que se mueve hacia la izquierda. $y_{máx}$=0,04 m; $\lambda=\pi$ m; T=π/3 seg; $\nu=3/\pi$ Hz.; $\varphi_o=\pi/6$

b) $v_{onda}=\lambda \cdot \nu$=3 m/s ; $v_{puntos}=dy/dt=0{,}24\cos(6t-2x+\pi/6)=|_{t=1,x=3}=0{,}208$ m/s

E5B.S2014

En una cuerda tensa, sujeta por sus extremos, se ha generado una onda de ecuación:

$$y(x,t) = 0{,}02 \operatorname{sen}(\pi x) \cos(8\pi t) \text{ S.I.}$$

a) Indique de qué tipo de onda se trata y explique sus características.

b) Determine la distancia entre dos puntos consecutivos de amplitud cero.

a) Onda estacionaria de amplitud A=0,02·senπx; λ=2 m; T=0,25 seg; ν=4 Hz

b) Dos puntos de amplitud cero son dos nodos. La distancia entre nodos consecutivos = λ/2 =1 m.

E4B.S2009

a) Explique qué magnitudes describen las periodicidades espacial y temporal de una onda e indique si están relacionadas entre sí.

b) Razona qué tipo de movimiento efectúan los puntos de una cuerda por la que se propaga una onda armónica.

Teoría

E4B.S2010

a) Explique qué son ondas longitudinales y transversales.

b) ¿Qué diferencias señalaría entre las características de las ondas luminosas y sonoras?

Teoría

E4A.S2004
Una partícula de 50 g vibra a lo largo del eje X, alejándose como máximo 10 cm a un lado y a otro de la posición de equilibrio (x = 0). El estudio de su movimiento ha revelado que existe una relación sencilla entre la aceleración y la posición que ocupa en cada instante: $a = -16\,\pi^2 x$.
a) Escriba las expresiones de la posición y de la velocidad de la partícula en función del tiempo, sabiendo que este último se comenzó a medir cuando la partícula pasaba por la posición x = 10 cm.
b) Calcule las energías cinética y potencial de la partícula cuando se encuentra a 5 cm de la posición de equilibrio.
Sol. a) $a = -16\,\pi^2 x = -\omega^2 x$;
$x = A\,\mathrm{sen}(\omega t+\varphi_o) = 0{,}1\ \mathrm{sen}(4\pi t+\varphi_o)$; $x|_{t=0} = 0{,}1 = 0{,}1\,\mathrm{sen}(\varphi_o) \rightarrow \varphi_o = \pi/2$
$x = 0{,}1\ \mathrm{sen}(4\pi t + \pi/2)$;
$v = dx/dt = 0{,}4\pi\cos(4\pi t + \pi/2)$
b) $Ep = \frac{1}{2}Kx^2 = \frac{1}{2}\cdot m\omega^2\cdot x^2 = \frac{1}{2}\cdot 0{,}050\cdot 16\pi^2\cdot 0{,}05^2 = 0{,}00987$ J
$Ec = \frac{1}{2}\cdot m\omega^2(A^2 - x^2) = 0{,}02961$ J

E5A.S2008
a) Explique los fenómenos de reflexión y refracción de una onda en la superficie que separa dos medios.
b) Razone qué magnitudes de una onda cambian cuando pasa de un medio a otro.
Teoría

E2A.S2008
a) Explique qué son ondas estacionarias y describa sus características.
b) En una cuerda se ha generado una onda estacionaria. Explique por qué no se propaga energía a través de la cuerda.
Teoría

E2B.S2010
La ecuación de una onda armónica es: $y(x,t) = A\ \mathrm{sen}\,(bt - cx)$
a) Indique las características de dicha onda y lo que representa cada uno de los parámetros A, b y c.
b) ¿Cómo cambiarían las características de la onda si el signo negativo fuera positivo?
Teoría

E6A.S2010
a) Escriba la ecuación de una onda estacionaria en una cuerda con sus dos extremos fijos, y explique el significado físico de cada una de los parámetros que aparecen en ella.
b) Explique qué puntos de la cuerda del apartado anterior permanecen en reposo. ¿Qué puntos oscilan con amplitud máxima?
Teoría

E4B.S2014
a) Escriba la ecuación de una onda estacionaria y comente sus características.
b) Explique las diferencias entre una onda estacionaria y una onda viajera.
Teoría

EJERCICIOS PROPUESTOS EN SELECTIVIDAD CADA CURSO

MAS. CURSO 2010/2011

E1B.S2011
Un cuerpo de 0,1 kg, unido al extremo de un resorte de constante elástica 10 N m^{-1}, se desliza sobre una superficie horizontal lisa y su energía mecánica es de 1,2 J.
a) Determine la amplitud y el periodo de oscilación.
b) Escriba la ecuación de movimiento, sabiendo que en el instante t = 0 el cuerpo tiene aceleración máxima, y calcule la velocidad del cuerpo en el instante t = 5 s

E2A.S2011
Una partícula de 3 kg describe un movimiento armónico simple a lo largo del eje X entre los puntos x = −2 m y x = 2 m y tarda 0,5 segundos en recorrer la distancia entre ambos puntos.
a) Escriba la ecuación del movimiento sabiendo que en t = 0 la partícula se encuentra en x = 0.
b) Escriba las expresiones de la energía cinética y de la energía potencial de la partícula en función del tiempo y haga una representación gráfica de dichas energías para el intervalo de tiempo de una oscilación completa.

E3A.S2011
a) Escriba la ecuación de un movimiento armónico simple y explique el significado de cada una de las variables que aparecen en ella.
b) ¿Cómo cambiarían las variables de dicha ecuación si el periodo del movimiento fuera doble? ¿Y si la energía mecánica fuera doble?

E4B.S2011
a) Movimiento armónico simple; características cinemáticas y dinámicas.
b) Un bloque unido a un resorte efectúa un movimiento armónico simple sobre una superficie horizontal. Razone cómo cambiarían las características del movimiento al depositar sobre el bloque otro de igual masa.

E6A.S2011 J
a) Movimiento armónico simple; características cinemáticas y dinámicas.
b) Razone si es verdadera o falsa la siguiente afirmación: En un movimiento armónico simple la amplitud y la frecuencia aumentan si aumenta la energía mecánica

a) Teoría
b) Teniendo en cuenta que la energía mecánica es igual a la potencial máxima o también a la cinética máxima: $E = Ec_{máx} = Ep_{máx} = \frac{1}{2}KA^2 \Rightarrow$ La energía mecánica solamente depende de la constante elástica y de la amplitud:

- Si aumenta la energía mecánica aumenta la amplitud ya que $E=f(A^2)$
- Para un sistema dado, la frecuencia de oscilación es independiente de la energía que tenga, por eso precisamente se llama frecuencia de oscilación natural. Para cambiar la frecuencia de oscilación debemos cambiar de sistema (bien cambiando de resorte por otro de distinta K o bien manteniendo el resorte pero cambiando la masa oscilante) ya que $K = m\omega^2 = m\,4\pi^2\nu^2$

MAS. CURSO 2011/2012

E2A.S2012
2. a) Escriba la ecuación de un movimiento armónico simple y explique cómo varían con el tiempo la velocidad y la aceleración de la partícula.
b) Comente la siguiente afirmación: "si la aceleración de una partícula es proporcional a su desplazamiento respecto de un punto y de sentido opuesto, su movimiento es armónico simple".

E4B.S2012 (Resuelto en teoría MAS)
2. a) Energía mecánica de un oscilador armónico simple. Utilice una representación gráfica para explicar la variación de las energías cinética, potencial y mecánica en función de la posición.
b) Dos partículas de masas m_1 y m_2 ($m_2 > m_1$), unidas a resortes de la misma constante k, describen movimientos armónicos simples de igual amplitud. ¿Cuál de las dos partículas tiene mayor energía cinética al pasar por su posición de equilibrio? ¿Cuál de las dos pasa por esa posición a mayor velocidad? Razone las respuestas.

MAS. CURSO 2012/2013

E6A.S2013
2. a) Explique el significado de las magnitudes que aparecen en la ecuación de un movimiento armónico simple e indique cuáles son sus respectivas unidades en el Sistema Internacional.
b) Demuestre que en un oscilador armónico simple la aceleración es proporcional al desplazamiento de la posición de equilibrio pero de sentido contrario.
Sol: Teoría

E2B.S2013
2. a) Una partícula describe un movimiento armónico simple a lo largo del eje X. Escriba la ecuación que expresa la posición de la partícula en función del tiempo e indique el significado de las magnitudes que aparecen en ella.
b) Explique cómo varían las energías cinética y potencial de la partícula a lo largo de una oscilación completa.
Sol: Teoría

E5A.S2013
4. Un cuerpo de 0,1 kg se mueve de acuerdo con la ecuación:

$$x(t) = 0{,}12 \text{ sen } (2\pi\, t + \pi/ 3) \quad \text{(S.I.)}$$

a) Explique qué tipo de movimiento realiza y determine el periodo y la energía mecánica.
b) Calcule la aceleración y la energía cinética del cuerpo en el instante t = 3 s.

E4A.S2013
4. Un cuerpo de 80 g, unido al extremo de un resorte horizontal, describe un movimiento armónico simple de amplitud 5 cm.
a) Escriba la ecuación de movimiento del cuerpo sabiendo que su energía cinética máxima es de $2{,}5\cdot10^{-3}$ J y que en el instante t = 0 el cuerpo pasa por su posición de equilibrio.

b) Represente gráficamente la energía cinética del cuerpo en función de la posición e indique el valor de la energía mecánica del cuerpo.

MAS. CURSO 2013/2014

E1A.S2014 (Insertado en teoría MAS)

1. a) Describa el movimiento armónico simple y comente sus características dinámicas.
b) Un oscilador armónico simple está formado por un muelle de masa despreciable y una partícula de masa, m, unida a uno de sus extremos. Se construye un segundo oscilador con un muelle idéntico al del primero y una partícula de masa diferente, m'. ¿Qué relación debe existir entre m' y m para que la frecuencia del segundo oscilador sea el doble que la del primero?

E3B.S2014

La energía mecánica de una partícula que realiza un movimiento armónico simple a lo largo del eje X y en torno al origen vale $3 \cdot 10^{-5}$ J y la fuerza máxima que actúa sobre ella es de $1{,}5 \cdot 10^{-3}$ N.
a) Obtenga la amplitud del movimiento.
b) Si el periodo de la oscilación es de 2 s y en el instante inicial la partícula se encuentra en la posición $x_0 = 2$ cm, escriba la ecuación de movimiento.

a) $E = \frac{1}{2}kA^2$ y $F_{máx} = kA$ de donde: $E = \frac{1}{2}(kA)A = \frac{1}{2}F_{máx}A$ => $A = 2E/F_{máx} = 0{,}04$ m = 4 cm

b) $x = A\,\text{sen}(\omega t + \varphi_o) = 4\,\text{sen}(\frac{2\pi}{2}t + \varphi_o)$ (x en cm y t en seg.)

Como para t=0 la partícula está en x=2cm, tenemos que $2 = 4\,\text{sen}(\varphi_o) \rightarrow \varphi_o = 0{,}523 = \pi/6\,\text{rad}$

$x = 4\,\text{sen}(\pi t + \pi/6)$ (x en cm y t en seg.)

E6A.S2014

Sobre una superficie horizontal hay un muelle de constante elástica desconocida, comprimido 4 cm, junto a un bloque de 100 g. Al soltarse el muelle impulsa al bloque, que choca contra otro muelle de constante elástica 16 N m^{-1} y lo comprime 10 cm. Suponga que las masas de los muelles son despreciables y que no hay pérdidas de energía por rozamiento.
a) Determine la constante elástica del primer muelle.
b) Si tras el choque con el segundo muelle el bloque se queda unido a su extremo y efectúa oscilaciones, determine la frecuencia de oscilación.

E5A.S2014

a) Describa el movimiento armónico simple y comente sus características cinemáticas.
b) Una partícula de masa m está unida a un extremo de un resorte y realiza un movimiento armónico simple sobre una superficie horizontal. Determine la expresión de la energía mecánica de la partícula en función de la constante elástica de resorte, k, y de la amplitud de la oscilación, A.

MAS. CURSO 2014/2015

E2B.S2015

a) Explique qué es un movimiento armónico simple y cuáles son sus características cinemáticas.
b) Comente la siguiente frase: "Si se aumenta la energía mecánica de una partícula que describe un movimiento armónico simple, la amplitud y la frecuencia del movimiento también aumentan".

E3A.S2015

a) Defina movimiento armónico simple y explique sus características cinemáticas.

b) Un cuerpo de masa m sujeto a un resorte de constante elástica k describe un movimiento armónico simple. Indique cómo variaría la frecuencia de oscilación si: i) la constante elástica se duplicara; ii) la masa del cuerpo se triplicara. Razone sus respuestas.

E4A.S2015

a) Explique las características cinemáticas del movimiento armónico simple.
b) Dos bloques, de masas M y m, están unidos al extremo libre de sendos resortes idénticos, fijos por el otro extremo a una pared, y descansan sobre una superficie horizontal sin rozamiento. Los bloques se separan de su posición de equilibrio una misma distancia A y se sueltan. Razone qué relación existe entre las energías potenciales cuando ambos bloques se encuentran a la misma distancia de sus puntos de equilibrio.

E5A.S2015

Un bloque de 2,5 kg está en reposo sobre una superficie horizontal sin rozamiento y unido al extremo de un muelle de masa despreciable y constante elástica k = 103 N m^{-1} que, por el otro extremo, está unido rígidamente a una pared. Se estira el muelle hasta una cierta longitud aplicando al bloque una fuerza constante F, siendo el trabajo que realiza esta fuerza de 5 J. En un instante dado, la fuerza deja de actuar sobre el bloque.
a) Razone que el bloque describirá un movimiento armónico simple, calcule su amplitud y frecuencia y escriba la ecuación de dicho movimiento.
b) Haga un análisis energético del problema y, a partir de él, calcule la fuerza F. Si hubiera un pequeño rozamiento entre el bloque y la superficie, de modo que la partícula oscilara, ¿se mantendría constante la amplitud de la oscilación? Razone la respuesta.

E6B.S2015

Una partícula de masa m sujeta a un muelle de constante k describe un movimiento armónico simple expresado por la ecuación:

$$x(t) = A\,\text{sen}(\omega t + \varphi)$$

a) Represente gráficamente la posición y la aceleración de la partícula en función del tiempo durante una oscilación. Explique ambas gráficas y la relación entre las dos magnitudes representadas.
b) Explique cómo varían la energía cinética y la energía potencial de la partícula durante una oscilación·

ONDAS. CURSO 2010/2011

E3B.S2011

Por una cuerda se propaga la onda de ecuación:

$$y(x, t) = 0{,}05\,\text{sen}\,2\pi(2t - 5x)\ \text{(S. I.)}$$

a) Indique de qué tipo de onda se trata y determine su longitud de onda, frecuencia, periodo y velocidad de propagación.
b) Represente gráficamente la posición de un punto de la cuerda situado en x = 0, en el intervalo de tiempo comprendido entre t = 0 y t =1s.

E4A.S2011

La ecuación de una onda en una cuerda es: $y(x,t) = 0{,}1 \cdot \mathrm{sen}\,\frac{\pi}{3} x \cos 2\pi t$ (SI)

a) Explique las características de la onda y calcule su periodo, longitud de onda y velocidad de propagación.
b) Explique qué tipo de movimiento realizan las partículas de la cuerda y determine la velocidad de una partícula situada en el punto x = 1,5 m, en el instante t = 0,25 s.

E5A.S2011
Una onda transversal se propaga por una cuerda en el sentido negativo del eje X con las siguientes características: A = 0,2 m, λ = 0,4 m, f = 10 Hz.
a) Escriba la ecuación de la onda sabiendo que la perturbación, y(x,t), toma su valor máximo en el punto x = 0, en el instante t = 0.
b) Explique qué tipo de movimiento realiza un punto de la cuerda situado en la posición x = 10 cm y calcule la velocidad de ese punto en el instante t = 2 s.

ONDAS. CURSO 2011/2012

E1B.S2012
4. Una onda transversal se propaga en el sentido negativo del eje X. Su longitud de onda es 3,75 m, su amplitud 2 m y su velocidad de propagación 3 m s^{-1}
a) Escriba la ecuación de la onda suponiendo que en el punto x = 0 la perturbación es nula en t = 0.
b) Determine la velocidad y la aceleración máximas de un punto del medio.

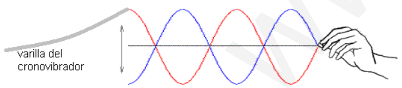
E2A.S2012
4. Una cuerda vibra de acuerdo con la ecuación:

$$y(x,t) = 5\cos\left(\frac{1}{3}\pi x\right)\cdot \mathrm{sen}(40t) \qquad \text{(S. I.)}$$

a) Indique qué tipo de onda es y cuáles son su amplitud y frecuencia. ¿Cuál es la velocidad de propagación de las ondas que por superposición dan lugar a la anterior?
b) Calcule la distancia entre dos nodos consecutivos y la velocidad de un punto de la cuerda situado en x =1,5 m, en el instante t = 2 s.

a) Se trata de una onda estacionaria, como por ejemplo la generada en una cuerda que tiene uno de sus extremos unido a la varilla de un cronovibrador y el otro extremo lo mantenemos sujeto. De esa forma tenemos dos ondas iguales viajando en sentidos opuestos: la onda que genera el cronovibrador y la que se refleja al llegar a la mano.
Comparándola con la ecuación general:

$$y(x,t) = 2y_{máx}\cos 2\pi\left(\frac{x}{\lambda}\right)\cdot \mathrm{sen}\,2\pi\left(\frac{t}{T}\right)$$



La amplitud es 5.cos(πx/3) que, como vemos, no es la misma para todos los puntos, sino que depende de la distancia al foco.
Como 40t = 2πt ν, la frecuencia es 20/π Hercios.
Como πx/3 = 2πx/λ, la longitud de onda de las ondas originales es 6 metros.

La velocidad de propagación de las ondas originales es v = λ·ν = 120/π m/s

b) La distancia entre dos nodos consecutivos es λ/2 = 3 m
La velocidad de un punto cualquiera se obtiene derivando la ecuación de la elongación:

$$v = \frac{dy}{dt} = 5\cos\left(\frac{\pi x}{3}\right) * 40 * \cos(40t) \qquad v\Big|_{\substack{x=1,5\\t=2}} = 5\cos\left(\frac{\pi\cdot 1{,}5}{3}\right) * 40 * \cos(40\cdot 2) = 0$$

E3B.S2012
4. En una cuerda tensa de 16 m de longitud con sus extremos fijos se ha generado una onda de ecuación:

$$y(x,t) = 0{,}02\,\mathrm{sen}(\pi x)\cdot\cos(8\pi t) \quad \text{(S. I.)}$$

a) Explique de qué tipo de onda se trata y cómo podría producirse. Calcule su longitud de onda y su frecuencia.
b) Calcule la velocidad en función del tiempo de los puntos de la cuerda que se encuentran a 4 m y 4,5 m, respectivamente, de uno de los extremos y comente los resultados.

a) Es una onda estacionaria porque su amplitud es diferente para cada punto, A=0,02·sen(πx), habiendo puntos para los que siempre es cero (nodos) y puntos para los que es máxima $A_{máx}$=0,02m (vientres).
Comparando esta ecuación con la ecuación general de una OE deducimos: λ=2m; T=0,25seg; ν=4Hz.
La OE se forma por superposición de dos ondas armónicas iguales que viajan en sentidos opuestos: y=0,01sen(πx+8πt) onda hacia la izq + y=0,01sen(πx–8πt) onda hacia la derecha.

b) El punto x=4 es un nodo, puesto que dista del foco un múltiplo entero de λ/2.
Los puntos x=4m y x=4,5m están separados entre sí un cuarto de la longitud de onda, por tanto si el primero es un nodo el segundo es un vientre y ese sí que estará vibrando, siendo su velocidad una función del tiempo.

$$v = \frac{dy}{dt} = -0{,}02\,\mathrm{sen}(\pi x)\cdot 8\pi\cdot\mathrm{sen}(8\pi t)$$

Como puede verse en la ecuación de la velocidad en función del tiempo, y ya apuntábamos antes, para x=4m → sen(4π)=0 → nodo → v=0, mientras que para x=4,5m → sen(4,5π)=1 → vientre → v=f(t)

$$v\Big|_{x=4,5} = -0{,}02\,\mathrm{sen}(4{,}5\pi)\cdot 8\pi\cdot\mathrm{sen}(8\pi t) = -0{,}5\,\mathrm{sen}(8\pi t)$$

E4A.S2012
4. La ecuación de una onda en la superficie de un lago es:

$$y(x,t) = 5\cdot 10^{-2}\cos(0{,}5\,t - 0{,}1\,x) \quad \text{(S. I.)}$$

a) Explique qué tipo de onda es y cuáles son sus características y determine su velocidad de propagación.
b) Analice qué tipo de movimiento realizan las moléculas de agua de la superficie del lago y determine su velocidad máxima.

E5A.S2012
3. Una onda en una cuerda viene descrita por:

$$y\,(x,\,t) = 0{,}5 \cos x \cdot \text{sen}\,(30\,t) \qquad \text{(S. I.)}$$

a) Explique qué tipo de movimiento describen los puntos de la cuerda y calcule la máxima velocidad del punto situado en x = 3,5 m.
b) Determine la velocidad de propagación y la amplitud de las ondas cuya superposición darían origen a la onda indicada.

E6A.S2012
1. a) Defina el concepto de onda e indique las características de las ondas longitudinales y transversales. Ponga un ejemplo de cada tipo.
b) ¿Qué es una onda polarizada? Comente la siguiente frase: “las ondas sonoras no se pueden polarizar”.

ONDAS. CURSO 2012/2013

E4B.S2013
2. a) Explique las diferencias entre una onda transversal y una longitudinal y ponga un ejemplo de cada una de ellas.
b) Una onda armónica en una cuerda puede describirse mediante la ecuación:

$$y(x,\,t) = A\ \text{sen}\,(\omega\,t - k\,x)$$

Indique el significado físico de las magnitudes que aparecen en esa ecuación, así como sus respectivas unidades en el Sistema Internacional.

E1B.S2013
La ecuación de una onda en una cuerda es:

$$y(x,t) = 0{,}02\ \text{sen}(8x - 96t) \qquad \text{(S.I.)}$$

a) Indique el significado físico de las magnitudes que aparecen en esa ecuación y calcule el periodo, la longitud de onda y la velocidad de propagación.
b) Determine la elongación y la velocidad de un punto de la cuerda situado en x = 0,5m, en el instante t = 2s.

E3B.S2013
4. Una onda armónica que se propaga por una cuerda en el sentido negativo del eje X tiene una longitud de onda de 25 cm. El foco emisor vibra con una frecuencia de 50 Hz y una amplitud de 5 cm.
a) Escriba la ecuación de la onda explicando el razonamiento seguido para ello.
b) Determine la velocidad y la aceleración máximas de un punto de la cuerda.

E3A.S2013
2. Explique las características de una onda estacionaria e indique cómo se produce.
b) Razone el tipo de movimiento de los puntos de una cuerda tensa en la que se ha generado una onda estacionaria.

E2A.S2013
4. La ecuación de una onda en una cuerda tensa es:

$$y(x,t) = 4{\cdot}10\text{-}3\ \text{sen}(8\pi x) \cdot \cos(30\pi t) \quad \text{(S.I.)}$$

a) Indique qué tipo de onda es y calcule su periodo, su longitud de onda y su velocidad de propagación.
b) Indique qué tipo de movimiento efectúan los puntos de la cuerda. Calcule la velocidad máxima del punto situado en x = 0,5 m y comente el resultado.

ONDAS. CURSO 2013/2014

E6B.S2014
a) Escriba la ecuación de una onda armónica que se propaga a lo largo del eje X e indique el significado de las magnitudes que aparecen en ella.
b) Escriba la ecuación de otra onda que se propague en sentido opuesto y que tenga doble amplitud y frecuencia mitad que la anterior. Razone si las velocidades de propagación de ambas ondas es la misma.

b) La velocidad de propagación de la nueva onda es la mitad, ya que $v_{onda}=\lambda\cdot\nu$
Sin embargo la velocidad máxima con la que vibran los puntos del medio en cada caso es la misma, ya que $v_{máx,puntos}=y_{máx}\cdot\omega= y_{máx}\cdot 2\pi\nu$

E4A.S2014
La ecuación de una onda que se propaga en una cuerda es:

$$y(x,t) = 0{,}04\ \text{sen}\,(6t - 2x + \frac{\pi}{6}) \quad \text{S.I.}$$

a) Explique las características de la onda y determine su amplitud, longitud de onda, período y frecuencia.
b) Calcule la velocidad de propagación de la onda y la velocidad de un punto de la cuerda situado en x = 3 m en el instante t = 1 s.

a) Onda transversal que se mueve hacia la izquierda. $y_{máx}$=0,04 m; $\lambda=\pi$ m; $T=\pi/3$ seg; $\nu=3/\pi$ Hz.; $\varphi_o=\pi/6$
b) $v_{onda}=\lambda\cdot\nu=3$ m/s ; $v_{puntos}=dy/dt=0{,}24\cos(6t–2x+\pi/6)=|_{t=1,x=3}=0{,}208$ m/s

E4B.S2014
a) Escriba la ecuación de una onda estacionaria y comente sus características.
b) Explique las diferencias entre una onda estacionaria y una onda viajera.

E5B.S2014
En una cuerda tensa, sujeta por sus extremos, se ha generado una onda de ecuación:

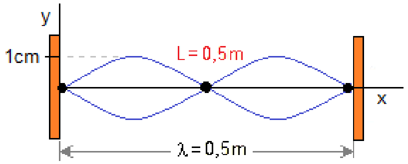
$$y(x,t) = 0{,}02\ \text{sen}\ (\pi x)\ \cos(8\pi t)\ \text{S.I}\cdot$$

a) Indique de qué tipo de onda se trata y explique sus características.
b) Determine la distancia entre dos puntos consecutivos de amplitud cero.

a) Onda estacionaria de amplitud A=0,02·senπx; λ=2 m; T=0,25 seg; ν=4 Hz
b) Dos puntos de amplitud cero son dos nodos. La distancia entre nodos consecutivos = $\lambda/2$ =1 m.

E2A.S2014
Se hace vibrar una cuerda de 0,5m , de longitud, sujeta por los dos extremos, observando que presenta 3 nodos. La amplitud en los vientres es de 1 cm y la velocidad de propagación de las ondas por la cuerda es de 100 m.s^{-1}.
a) Escriba la ecuación de la onda, suponiendo que la cuerda se encuentra en el eje X y la deformación de la misma es en el eje Y.
b) Determine la frecuencia fundamental de vibración.

a) Si la cuerda está sujeta por los dos extremos (nodos) y la onda contiene 3



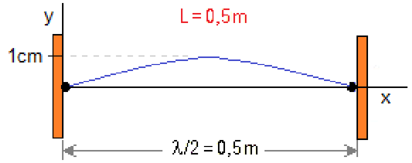
nodos → la longitud de onda debe coincidir con la longitud de la cuerda → λ=L=0,5 m.

$v_{onda}=\lambda/T$ → T=0,005 s;

$$y = 2y_m \operatorname{sen} 2\pi \frac{x}{\lambda} \cos 2\pi \frac{t}{T} = 0{,}01 \operatorname{sen} 2\pi \frac{x}{0{,}5} \cos 2\pi \frac{t}{0{,}005}$$

Ten en cuenta que la amplitud de un vientre es $2y_{máx}$ = 1cm = 0,01m. En efecto, ya que la amplitud de la onda estacionaria es $A = 2y_m \operatorname{sen} 2\pi \frac{x}{\lambda}$. Distinta para cada punto. Los puntos que vibran con amplitud máxima (vientres) son aquellos para los que ese seno vale 1 (x=λ/4 y x=3λ/4) por tanto $A_{máx}=2y_{máx}$.)
No te confundas con $y_{máx}$ que representa la amplitud de las ondas que por superposición generan la onda estacionaria.

b) La frecuencia fundamental (del primer armónico) es la menor frecuencia natural a la que puede oscilar la cuerda, y por tanto le corresponde la mayor longitud de onda → λ_1=1m. A la misma conclusión se llega teniendo en cuenta que la longitud de onda y la longitud de la cuerda sujeta por ambos extremos guardan la relación λ=2L/n, donde n=1,2,3,…. Para el primer armónico n=1 → λ_1=1m



$v_{onda}=\lambda \cdot \nu$ → ν_1 =100Hz

ONDAS. CURSO 2014/2015

E1B.S2015
El extremo de una cuerda realiza un movimiento armónico simple de ecuación:
y(t) = 4 sen (2πt) (S. I.).
La oscilación se propaga por la cuerda de derecha a izquierda con velocidad de 12 m s^{-1}.
a) Encuentre, razonadamente, la ecuación de la onda resultante e indique sus características.
b) Calcule la elongación de un punto de la cuerda que se encuentra a 6 m del extremo indicado, en el instante t = 3/4 s.

E2A.S2015
La ecuación de una onda que se propaga por una cuerda es:
y(x,t) = 0,3 cos(0,4πx − 40πt) S. I..
a) Indique los valores de las magnitudes características de la onda y su velocidad de propagación.
b) Calcule los valores máximos de la velocidad y de la aceleración en un punto de la cuerda y la diferencia de fase entre dos puntos separados 2,5 m.

E3B.S2015
Las ondas sísmicas S, que viajan a través de la Tierra generando oscilaciones durante los terremotos, producen gran parte de los daños sobre edificios y estructuras. Una onda armónica S, que se propaga por el interior de la corteza terrestre, obedece a la ecuación:
$y(x,t) = 0{,}6 \operatorname{sen} (3{,}125\cdot 10^{-7}\, x - 1{,}25\cdot 10^{-3}\, t)$ (S.I.).

a) Indique qué tipo de onda es y calcule su longitud de onda, frecuencia y velocidad de propagación.
b) Si se produce un seísmo a una distancia de 400 km de una ciudad, ¿cuánto tiempo transcurre hasta que se perciben los efectos del mismo en la población? ¿Con qué velocidad máxima oscilarán las partículas del medio?

LUZ / ÓPTICA

E1A.S2010

a) Explique los fenómenos de reflexión y refracción de la luz.
b) ¿Tienen igual frecuencia, longitud de onda y velocidad de propagación la luz incidente, reflejada y refractada? Razone las respuestas.

a) Teoría
b) Puesto que en el caso de la reflexión no se produce cambio de medio, obviamente la longitud de onda, frecuencia y velocidad de propagación serán iguales.

Sin embargo, como en el caso de la refracción el rayo de luz pasa a otro medio, con distinto índice de refracción, su velocidad será distinta, y como la frecuencia siempre permanece inalterable, al variar la velocidad deberá hacerlo también la longitud de onda.

A partir de la ley de Snell para la refracción:

$$\frac{\operatorname{sen} i}{\operatorname{sen} r} = \frac{v_1}{v_2} = n_{21} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$$

- Puede verse que, si la luz pasa a un medio de mayor índice de refracción, su velocidad debe disminuir: Si $n_2 > n_1 \Rightarrow v_2 < v_1$
- De la misma manera puede deducirse que, si la luz pasa a un medio de mayor índice de refracción, su longitud de onda también debe disminuir: Si $n_2 > n_1 \Rightarrow \lambda_2 < \lambda_1$

E1A.S2009

a) ¿Qué mide el índice de refracción de un medio? ¿Cómo cambian la frecuencia y la longitud de onda de un rayo láser al pasar del aire a una lámina de vidrio?
b) Explique la dispersión de la luz por un prisma

a) El índice de refracción de un medio mide la velocidad relativa de luz en el vacío respecto a la que tiene en el medio, por tanto $n_{medio} = c / v_{medio}$ y consecuentemente su valor siempre será mayor que 1.

La frecuencia de la luz permanece invariable al cambiar de medio, por tanto, si varía la velocidad debe variar también la longitud de onda:

$$n_{vidrio} = \frac{c}{v_{vidrio}} = \frac{\lambda_{aire}\nu}{\lambda_{vidrio}\nu} = \frac{\lambda_{aire}}{\lambda_{vidrio}}$$

como la velocidad de la luz en el aire (prácticamente igual al vacío) es mayor que en el vidrio, su índice de refracción es mayor que 1 (exactamente vale 1,5) y eso quiere decir que la longitud de onda en el aire es mayor que en el vidrio.

b) La dispersión de la luz (fenómeno que consiste en la descomposición de la luz blanca al atravesar un prisma) se explica precisamente porque la velocidad de todos los rayos es la misma en el vacío o en el aire, pero al llegar a otro medio cada rayo viaja a distinta velocidad y por tanto tiene distinto índice de refracción, y de acuerdo con la ley de snell de la refracción:

$$n_x = \frac{c}{v_x} = \frac{\operatorname{sen} i}{\operatorname{sen} r_x}$$

es evidente que si la velocidad el vidrio es distinta para cada onda, aunque todos los rayos entren con el mismo ángulo de incidencia, deben tener distintos ángulos de refracción y por eso se separan. (Dibuja un esquema y explícalo)

E3A.S2009 y E2B.S2010

Una antena emite una onda de radio de $6 \cdot 10^7$ Hz.
a) Explique las diferencias entre esa onda y una onda sonora de la misma longitud de onda y determine la frecuencia de esta última.
b) La onda de radio penetra en un medio su velocidad se reduce a 0,75c. Determine su frecuencia y su longitud de onda en ese medio.
$c=3 \cdot 10^8$ m/s ; $v_s=340$ m/s

a) La única semejanza es que casualmente tienen la misma longitud de onda, por lo demás todo son diferencias, ya que la onda de radio es una OEM y por lo tanto:

- Las OEM son ondas no mecánicas, es decir que no necesitan un medio material para propagarse) al contrario del sonido que sí necesita un medio y no puede propagarse en el vacío
- Las OEM son ondas transversales (están formadas por un campo eléctrico y otro magnético que se propagan perpendicularmente y en fase) mientras que las ondas del sonido son ondas longitudinales (formadas por una serie de comprensiones y enrarecimientos del medio en la dirección de propagación de la onda, por eso precisamente necesitan del medio para propagarse.)
- La velocidad de propagación de las OEM es una constante para el vacío o el aire, donde es prácticamente igual, mientras que la velocidad del sonido, por ser una onda longitudinal, depende mucho de la comprensibilidad del medio y en el caso de los gases depende mucho de la temperatura, ya que son ondas de presión.

Por lo demás, ambas son ondas y transportan energía sin masa, y su longitud de onda y su frecuencia están relacionadas por $v = \lambda \cdot \nu$

La longitud de onda de la onda de radio será:

$$c = \lambda \cdot \nu \qquad \Rightarrow \qquad \lambda = \frac{c}{\nu} = \frac{3 \cdot 10^8}{6 \cdot 10^7} = 5\,\mathrm{m}$$

La frecuencia de una onda sonora que tuviera la ese mismo valor de λ será:

$$v=\lambda\cdot\nu \qquad \Rightarrow \qquad \nu=\frac{v}{\lambda}=\frac{340}{5}=68\text{Hz}$$

que corresponde a un sonido grave y que está dentro del rango audible que va desde los 20Hz a los 20.000Hz

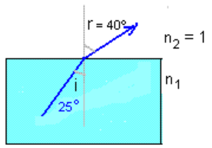
b) Al cambiar de medio la luz cambia de velocidad (que en este caso es *0,75c*), pero su frecuencia permanece inalterable, por tanto ello obliga a que también disminuya su longitud de onda, de manera que:

$$v_{medio}=\lambda_{medio}\cdot\nu \qquad \Rightarrow \qquad \lambda_{medio}=\frac{v_{medio}}{\nu}=\frac{0{,}75c}{\nu}=\frac{0{,}75\cdot 3\cdot 10^{8}}{6\cdot 10^{7}}=3{,}75\text{m}$$

E5A.S2009

Un láser de $55\cdot 10^{-8}$ m emerge desde el interior de un bloque de vidrio hacia el aire. El ángulo de incidencia es de 25º y el de refracción es de 40º.
a) Calcule el índice de refracción del vidrio y la longitud de onda del rayo láser en el aire.
b) Explique para qué valores del ángulo de incidencia el rayo no sale del vidrio.
$n_{aire}=1$

a) De acuerdo con la segunda ley de la refracción de snell:

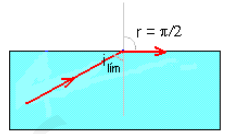


$$\frac{\text{sen}i}{\text{sen}r}=\frac{v_1}{v_2}=n_{21}=\frac{n_2}{n_1}=\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\text{sen}25}{\text{sen}40}=\frac{n_{aire}}{n_{vidrio}} \qquad \Rightarrow \qquad n_{vidrio}=1{,}52$$

por otro lado, de la relación anterior, si tenemos en cuenta que $v=\lambda\nu$ y que la frecuencia de la luz no varia al cambiar de medio:

$$\frac{\text{sen}i}{\text{sen}r}=\frac{v_1}{v_2}=n_{21}=\frac{n_2}{n_1}=\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\text{sen}25}{\text{sen}40}=\frac{\lambda_{vidrio}}{\lambda_{aire}} \qquad \Rightarrow \qquad \lambda_{aire}=8{,}36\cdot 10^{-7}\,\text{m}$$

b) El ángulo límite es aquel ángulo de incidencia para el cual el de refracción es de 90º, es decir que el rayo sale rasante, y para valores mayores el rayo no llega ni siquiera a salir porque se produce reflexión total.



$$\frac{\text{sen}i}{\text{sen}r}=\frac{v_1}{v_2}=\frac{n_2}{n_1} \quad \text{para } r=90º \quad \Rightarrow \quad \text{sen}i_{lim}=\frac{n_2}{n_1} \quad \Rightarrow \quad \text{sen}i_{lim}=\frac{n_2}{n_1}=\frac{n_{aire}}{n_{vidrio}}=\frac{1}{1{,}52}$$

$$i_{lim}=41{,}14º$$

E6A.S2009

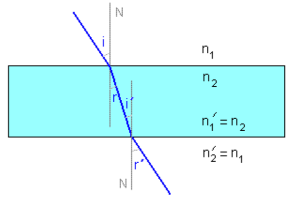
Un haz de luz roja penetra en una lámina de vidrio de 30 cm de espesor con un ángulo de incidencia de 30º.
a) Explique razonadamente si cambia el color de la luz al penetrar en el vidrio y determine el ángulo de refracción.
b) Determine el ángulo de emergencia (ángulo que forma el rayo que sale de la lámina con la normal) y el tiempo que tarda la luz en atravesar la lámina de vidrio.
$c=3\cdot 10^{8}$ m s^{-1} ; $n_{vidrio}=1{,}3$; $n_{aire}=1$

a) Cuando la luz cambia de medio su frecuencia permanece inalterable y por lo tanto no cambia de color. Lo que sí cambia es su velocidad y en consecuencia su longitud de onda. De a cuerdo con la ley de snell:

$$\frac{\text{sen}i}{\text{sen}r}=\frac{v_1}{v_2}=n_{21}=\frac{n_2}{n_1}=\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\text{sen}30}{\text{sen}r}=\frac{1{,}3}{1} \qquad \Rightarrow \qquad r=22{,}62º$$

como era de esperar el ángulo de refracción es menor que el de incidencia porque el índice de refracción de segundo medio (el vidrio) es mayor que el primero (aire).

b1) El ángulo con el que emerge del cristal de láminas plano−paralelas es el mismo que el de incidencia, aunque el rayo se desplazará:



Si escribimos la ley de snell para la primera y para la segunda refracción:

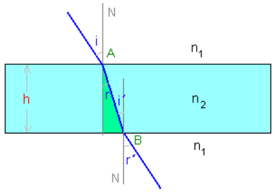
$$\frac{\text{sen}i}{\text{sen}r}=\frac{v_1}{v_2}=n_{21}=\frac{n_2}{n_1}=\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \quad \text{y para la segunda refracción} \quad \frac{\text{sen}i'}{\text{sen}r'}=\frac{n_2'}{n_1'}$$

Teniendo en cuenta que $n_1´=n_2$ y que $n_2´=n_1$, y que de la figura se deduce que los ángulos $\hat{r}$ y $\hat{i}´$ son iguales (por ser ángulos de lados paralelos), resulta que la ley de snell para la segunda refracción puede escribirse como:

$$\frac{\operatorname{sen} r}{\operatorname{sen} r´} = \frac{n_1}{n_2}$$

Si le damos la vuelta a la expresión y comparamos con la ley de snell para la primera refracción, se deduce que los ángulos $\hat{i}$ y $\hat{r}´$ también son iguales, es decir, que el rayo no varía en dirección, aunque como vemos sí que sufre un desplazamiento.

b2) Para calcular el tiempo que tarda la luz en atravesar la lámina primero hemos de calcular el espacio que el rayo recorre en el interior de la lámina. Suponiendo que el espesor de la lámina es *h*, el camino recorrido AB dentro de la misma se calcula fácilmente teniendo en cuenta (fíjate en el triángulo en verde)



$$\cos r = \frac{h}{AB} \quad \Rightarrow \quad AB = \frac{h}{\cos r} = \frac{0,3}{\cos 22,62} = 0,325\text{m}$$

Ahora debemos calcular la velocidad con que el rayo se propaga en el interior del cristal, que como dijimos es menor a la que tiene en el vacío. De acuerdo con la ley de la refracción de Snell:

$$\frac{\operatorname{sen} i}{\operatorname{sen} r} = \frac{v_1}{v_2} = n_{21} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \quad \Rightarrow \quad \frac{3\cdot 10^8}{v_2} = \frac{1,3}{1} \quad \Rightarrow \quad v_2 = 2,31\cdot 10^8\,\text{m/s}$$

Así que el, teniendo en cuenta que se propaga con velocidad constante, el tiempo que tardará en atravesarlo es:

$$s = v\,t \quad \Rightarrow \quad t = \frac{s}{v} = \frac{0,325}{2,31\cdot 10^8} = 1,41\cdot 10^{-9}\text{seg}$$

E4A.S2008

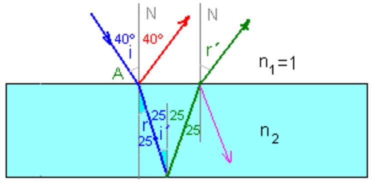
Un haz de luz láser cuya longitud de onda en el aire es $550\cdot 10^{-9}$ m incide en un bloque de vidrio.

a) Describa con ayuda de un esquema los fenómenos ópticos que se producen.

b) Si el ángulo de incidencia es de 40º y el de refracción 25º, calcule el índice de refracción del vidrio y la longitud de onda de la luz láser en el interior del bloque.

$n_{aire} = 1$.

a) Al llegar el rayo a la superficie del vidrio, una parte del mismo se refractará penetrando en el mismo (rayo en azul) y otra parte se reflejará (rayo en rojo). Que el ángulo de refracción sea menor que el de incidencia significa que el rayo se acerca a la normal y ello sugiere que el índice de refracción del vidrio es mayor que el del aire, como luego comprobaremos. Una vez que el rayo llegue a la pared inferior se reflejará y volverá a salir al aire (rayo en verde). Una parte del mismo al llegar a la superficie de separación se reflejará (rayo en rosa), etc



b) Aplicando la ley de snell para la refracción:

$$\frac{\operatorname{sen} i}{\operatorname{sen} r} = \frac{v_1}{v_2} = n_{21} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \quad \Rightarrow \quad \frac{\operatorname{sen} 40}{\operatorname{sen} 25} = \frac{n_2}{1} \quad \Rightarrow \quad n_2 = 1,52$$

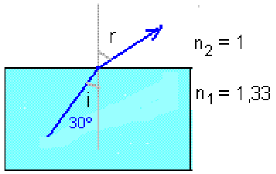
Al penetrar el rayo en el vidrio, como sabemos varía su velocidad, que se hace menor, precisamente por ese motivo el rayo cambia de dirección y se acerca a la normal. Y puesto que la frecuencia permanece siempre invariable, debe variar su longitud de onda, ya que $v = \lambda\nu$.

$$\frac{\operatorname{sen} i}{\operatorname{sen} r} = \frac{v_1}{v_2} = n_{21} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \quad \Rightarrow \quad \lambda_2 = \lambda_1 \frac{\operatorname{sen} r}{\operatorname{sen} i} = 550\cdot 10^{-9}\,\frac{\operatorname{sen} 25}{\operatorname{sen} 40} = 361\cdot 10^{-9}\,\text{m}$$

E1A.S2007

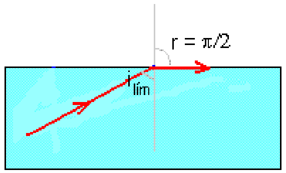
Un foco luminoso puntual está situado bajo la superficie de un estanque de agua.
a) Un rayo de luz pasa del agua al aire con un ángulo de incidencia de 30º. Dibuje en un esquema los rayos incidente y refractado y calcule el ángulo de refracción.
b) Explique qué es el ángulo límite y determine su valor para este caso.
$n_{aire} = 1$; $n_{agua} = 1{,}33$.

a) El rayo al pasar al aire, que tiene menor índice de refracción, debe separarse de la normal, así que:



$$\frac{\text{sen}\,i}{\text{sen}\,r} = \frac{n_2}{n_1} \Rightarrow \frac{\text{sen}30}{\text{sen}\,r} = \frac{1}{1{,}33} \Rightarrow$$
$$r = 41{,}68º$$

b) El ángulo límite es el ángulo de incidencia al que le corresponde un ángulo de refracción de 90º, por tanto:



$$\frac{\text{sen}\,i}{\text{sen}\,r} = \frac{n_2}{n_1} \Rightarrow \frac{\text{sen}\,i_{lím}}{\text{sen}90} = \frac{1}{1{,}33} \Rightarrow$$
$$i_{lím} = 48{,}75º$$

E2A.S2007

Razone las respuestas a las siguientes cuestiones:
a) Cuando un rayo pasa a un medio con mayor índice de refracción, ¿se acerca o se aleja de la normal?
b) ¿Qué es el ángulo límite? ¿Existe este ángulo en la situación anterior?

a) Teniendo en cuenta la ley de snell se deduce fácilmente que el ángulo de refracción es menor que el de incidencia, es decir, que el rayo se acerca a la normal:

$$\frac{\text{sen}\,i}{\text{sen}\,r} = \frac{n_2}{n_1} \Rightarrow \text{si} \;\; n_2 > n_1 \Rightarrow \text{sen}\,i > \text{sen}\,r \Rightarrow i > r$$

b) El ángulo límite es el ángulo de incidencia al que le corresponde un ángulo de refracción de 90º, por tanto, si el rayo pasa de un medio a otro con mayor índice de refracción nunca habrá ya que:

$$\frac{\text{sen}\,i}{\text{sen}\,r} = \frac{n_2}{n_1} \Rightarrow \text{si } r = 90º \text{ como } \text{sen}90 = 1 \Rightarrow \text{sen}\,i_{lím} = \frac{n_2}{n_1}$$

Como el seno de un ángulo nunca puede ser mayor que 1 $\Rightarrow$ n_2 debe ser menor que n_1 por tanto en este caso que nos ocupa nunca

E6A.S2008

a) Describa los fenómenos de reflexión y de refracción de la luz con la ayuda de un esquema.
b) Explique las condiciones que deben cumplirse entre dos medios para que el rayo incidente no se refracte.
c) Un haz de luz pasa del aire al agua. Razone cómo cambian su frecuencia, longitud de onda y velocidad de propagación.

a) Teoría
b) Para que un rayo no se refracte, es decir que no llegue a salir del primer medio, debe ocurrir que:

- En primer lugar debe ocurrir que el rayo pase de un medio a otro con un índice de refracción menor, por ejemplo del agua al aire.
- Y además, que el ángulo de incidencia sea igual al ángulo límite o superior. De ser igual al ángulo límite saldrá tangente a la superficie de separación y si es mayor sufrirá refracción total.

c) Resulta evidente, que si la velocidad ($v=\lambda\cdot\nu$) de la onda varía al cambiar de medio mientras que su frecuencia permanece invariable, debe cambiar la longitud de onda:

$$\frac{\text{sen}\,i}{\text{sen}\,r} = \frac{v_1}{v_2} = n_{21} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$$

El índice de refracción del aire (aproximadamente igual al del vacío) es igual a 1 porque los índices de refracción absolutos se definen referidos a la velocidad de la luz en el vacío $n_{vacío}=c/c=1$. Para cualquier otro medio el índice de refracción es mayor que 1, puesto que en cualquier otro medio la velocidad de la luz es menor a la del vacío $n_{medioo}=c/v_{medio}>1$.

Si n2>n1 quiere decir que todos los numeradores deben ser mayores que los denominadores. Quiere decir que: seni>senr, o lo que es igual, el ángulo de incidencia es mayor que el de refracción; la velocidad en el vacío es mayor que en el agua y la longitud de onda en el vacío también es mayor que en el agua.

E4A.S2007

El láser de un reproductor de CD genera luz con una longitud de onda de 780 nm medida en el aire.
a) Explique qué características de la luz cambian al penetrar en el plástico del CD y calcule la velocidad de la luz en él.
b) Si la luz láser incide en el plástico con un ángulo de 30º, determine el ángulo de refracción.
$c = 3 \cdot 10^{8}\ m\ s^{-1}$; $n_{aire} = 1$; $n_{plástico} = 1,55$

a) Al cambiar de medio cambia la velocidad del rayo y como la frecuencia permanece invariable también debe variar la longitud de onda. Aplicando la ley de snell:

$$\frac{\text{sen}i}{\text{sen}r} = \frac{v_1}{v_2} = n_{21} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \quad \Rightarrow \quad \frac{3\cdot 10^8}{v_{plástico}} = \frac{1,55}{1} \quad \Rightarrow \quad v_{plástico} = 1,96\cdot 10^8\ m/s$$

También podemos calcular la velocidad teniendo en cuenta la definición de índice de refracción absoluto:

$$n_{plástico} = \frac{c}{v_{plástico}} \quad \Rightarrow \quad 1,55 = \frac{3\cdot 10^8}{v_{plástico}} \quad \Rightarrow \quad v_{plástico} = 1,96\cdot 10^8\ m/s$$

Como $v = \lambda\nu$, la frecuencia del rayo, que como hemos dicho, permanece inalterada al cambiar de medio es:

$$\nu = \frac{v_{aire}}{\lambda_{aire}} = \frac{3\cdot 10^8}{780\cdot 10^{-9}} = 3,85\cdot 10^{14}\ Hz$$

La longitud de onda del rayo en el plástico sería: la longitud de onda del rayo en el plástico sería:

$$\lambda_{plástico} = \frac{v_{plástico}}{\nu} = \frac{1,96\cdot 10^8}{3,85\cdot 10^{14}} = 5,09\cdot 10^{-7}\ m \ = 509\ nm$$

a la misma conclusión llegaríamos teniendo en cuenta que:

$$\frac{\text{sen}i}{\text{sen}r} = \frac{v_1}{v_2} = n_{21} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \quad \Rightarrow \quad \frac{1,55}{1} = \frac{780\cdot 10^{-9}}{\lambda_{plástico}} \quad \Rightarrow \quad \lambda_{plástico} = 5,09\cdot 10^{-7}\ m$$

b) Aplicando la ley de snell:

$$\frac{\text{sen}i}{\text{sen}r} = \frac{v_1}{v_2} = n_{21} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \quad \Rightarrow \quad \frac{\text{sen}30}{\text{sen}r} = \frac{1,55}{1} \quad \Rightarrow \quad r = 18,82º$$

Como vemos el rayo se acerca a la normal como era de esperar al pasar a un medio más refringente.

E1B.S2006

a) Razone si tres haces de luz visible de colores azul, amarillo y rojo, respectivamente: i) tienen la misma frecuencia; ii) tienen la misma longitud de onda; iii) se propagan en el vacío con la misma velocidad. ¿Cambiaría alguna de estas magnitudes al propagarse en el agua?
b) ¿Qué es la reflexión total de la luz? ¿Cuándo puede ocurrir?

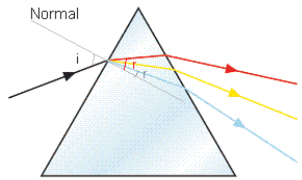
a) Evidentemente, si tienen colores distintos es porque tienen frecuencias distintas:

$$\nu_{azul} > \nu_{amarillo} > \nu_{rojo}$$

o el mismo argumento podría decirse para la longitud de onda, aunque en este caso la mayor correspondería al rojo y la más pequeña al azul.

La velocidad de la luz en el vacío es una constante y por tanto es independiente de la frecuencia de la luz, así que los tres rayos se propagarían con la misma velocidad de $3\cdot 10^8\ m/s$ y por eso si fuesen producidos por una sola fuente viajarían juntos, como le ocurre a la luz del sol.

Para cualquier otro medio, que no sea el vacío, la velocidad de la luz depende de la frecuencia de la luz, porque para cada frecuencia el índice de refracción es distinto, y por tanto, como la frecuencia en sí no varía debe hacerlo la longitud de onda.



De acuerdo con las leyes de la refracción de Snell, al incidir todos los colores con el mismo ángulo y tener distinta velocidad, cada color presenta diferente ángulo de refracción y es por lo que se descompone la luz blanca. Como puede verse, cuanto mayor sea el índice de refracción del color menor será su velocidad en el medio y menor su ángulo de refracción.

$$\frac{\text{sen}i}{\text{sen}r_{Roj,Am,Az}} = \frac{c}{v_{2Roj,Am,Az}} = n_{21} = \frac{n_{2Roj,Am,Az}}{n_1}$$

b) Teoría

E4B.S2006

Un rayo luminoso que se propaga en el aire incide sobre el agua de un estanque formando un ángulo de 20º con la normal.
a) ¿Qué ángulo formarán entre sí los rayos reflejado y refractado?

b) Variando el ángulo de incidencia, ¿podría producirse el fenómeno de reflexión total?

Razone la respuesta. $n_{aire} = 1$; $n_{agua} = 1,33$

a) de acuerdo con las leyes de snell el ángulo de reflexión es igual al de incidencia, así que será también de 20º y el de reflexión:

$$\frac{\text{sen} i}{\text{sen} r} = \frac{n_2}{n_1} \Rightarrow \frac{\text{sen}20}{\text{sen} r} = \frac{1}{1,33} \Rightarrow r = 14,9º$$

El rayo incidente y el refractado formarían un ángulo = 180+20–14,9 = 185,1º

b) Es imposible obtener reflexión total , ni siquiera ángulo límite cuando el rayo pasa de un medio menos refringente a otro más refringente, ya que como para que exista reflexión total el ángulo de refracción debería ser mayor de 90º y ni siquiera eso es posible ya que eso implicaría que al ser $\text{sen} i = n_2 / n_1$ y como $n_2 > n_1$ nos llevaría a que el seni de un ángulo es mayor que la unidad, lo que es imposible.

Por otro lado, como al mayor ángulo de incidencia posible, que sería de 90º, le corresponde un ángulo de reflexión de $1/\text{sen} r = 1,33/1 \Rightarrow r = 48,75º$ que es la máxima desviación posible del rayo, muy lejos de superar los 90º que sería necesario para tener reflexión total.

E6A.S2006

El ángulo límite vidrio−agua es de 60º. Un rayo de luz, que se propaga por el vidrio, incide sobre la superficie de separación con un ángulo de 45º y se refracta dentro del agua.

a) Explique qué es el ángulo límite y determine el índice de refracción del vidrio
b) Calcule el ángulo de refracción en el agua.

$n_{agua} = 1,33$

a) Sabiendo que el ángulo límite del vidrio−agua es 60º, podemos plantear:

$$\frac{\text{sen} i}{\text{sen} r} = \frac{n_2}{n_1} \Rightarrow \frac{\text{sen}\, i_{lim}}{\text{sen}90} = \frac{n_{agua}}{n_{vidrio}} \Rightarrow \frac{\text{sen}\,60}{1} = \frac{1,33}{n_{vidrio}} \Rightarrow n_{vidrio} = 1,54$$

b) Cuando el rayo incide desde el vidrio con un ángulo de 45º sobre el agua:

$$\frac{\text{sen} i}{\text{sen} r} = \frac{n_2}{n_1} \Rightarrow \frac{\text{sen}45}{\text{sen} r} = \frac{1,33}{1,54} \Rightarrow r = 54,96º$$

E6B.S2008

a) Explique la formación de imágenes y sus características en una lente divergente.
b) ¿Pueden formarse imágenes virtuales con lentes convergentes? Razone la respuesta.

Teoría

E5A.S2006

Dibuje la marcha de los rayos e indique el tipo de imagen formada con una lente convergente si:

a) La distancia objeto, s, es igual al doble de la focal, f.
b) La distancia objeto es igual a la focal.

Teoría

E4B.S2010

Un haz láser que se propaga por un bloque de vidrio tiene una longitud de onda de 550 nm. El haz emerge hacia el aire con un ángulo de incidencia de 25º y un ángulo de refracción de 40º.
a) Calcule el índice de refracción del vidrio y la longitud de onda de la luz láser en el aire.
b) Razone para qué valores del ángulo de incidencia el haz láser no sale del vidrio.
$c = 3 \cdot 10^8$ m s^{-1} ; $n_{aire} = 1$.

Igual al E5A.2009

E5B.S2010

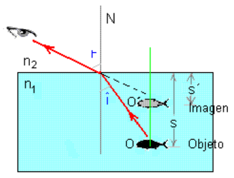
a) Explique el fenómeno de dispersión de la luz.
b) ¿Qué es el índice de refracción de un medio? Razone cómo cambian la frecuencia y la longitud de onda de una luz láser al pasar del aire al interior de una lámina de vidrio.

Teoría. E1A.S2009

E3B.S2010

a) Explique qué es el ángulo límite y qué condiciones deben cumplirse para que pueda observarse.
b) Razone por qué la profundidad real de una piscina llena de agua es mayor que la profundidad aparente.

a) Teoría
b) Teoría.



$$\frac{\text{Dist.aparente (Dist.}\textit{Imagen}\text{)}}{\text{Dist.real (Dist.Objeto)}} = \frac{s'}{s} = \frac{n_2}{n_1}$$

E6B.S2010

Un teléfono móvil opera con ondas electromagnéticas cuya frecuencia es $1{,}2\cdot10^9$ Hz.
a) Determine la longitud de onda.
b) Esas ondas entran en un medio en el que la velocidad de propagación se reduce a 5c/6. Determine el índice de refracción del medio y la frecuencia y la longitud de onda en dicho medio.
$c = 3\cdot10^8\ \text{m s}^{-1}$; $n_{aire} = 1$; $v_{sonido} = 340\ \text{m s}^{-1}$.

a) $v_{aire} = \lambda_{aire}\cdot\nu \;\rightarrow\; \lambda_{aire} = v_{aire} / \nu = 3\cdot10^8 / 1{,}2\cdot10^9 = 0{,}25$ m

b) $\frac{\text{sen}i}{\text{sen}r} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{n_2}{n_1} \;\rightarrow\; \frac{c}{5c/6} = \frac{n_2}{1} \;\rightarrow\; n_2 = 1{,}2$

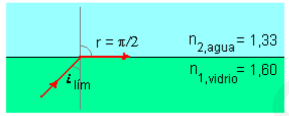
La frecuencia es la misma en todos los casos: $\nu = 1{,}2\cdot10^9$ Kz

$v_{medio} = \lambda_{medio}\cdot\nu \;\rightarrow\; \lambda_{medio} = v_{medio} / \nu = (5\cdot3\cdot10^8/6) / 1{,}2\cdot10^9 = 0{,}21$ m

E5A.S2008

Sobre la superficie de un bloque de vidrio de índice de refracción 1,60 hay una capa de agua de índice 1,33. Una luz amarilla de sodio, cuya longitud de onda en el aire es $589\cdot10^{-9}$ m, se propaga por el vidrio hacia el agua.
a) Describa el fenómeno de reflexión total y determine el valor del ángulo límite para esos dos medios.
b) Calcule la longitud de onda de la luz cuando se propaga por el vidrio y por el agua.
$c = 3\cdot10^8\ \text{m s}^{-1}$.

a) Teoría



$$\frac{\text{sen}i}{\text{sen}r} = \frac{n_2}{n_1} \;\rightarrow\; \frac{\text{sen}i_{lím}}{\text{sen}90} = \frac{n_{vidrio}}{n_{agua}} \;\rightarrow$$
$i_{lím} = 56{,}23^o$

b) En primer lugar vamos a calcular la velocidad del rayo en cada medio. Teniendo en cuenta que, por definición, el índice de refracción absoluto del medio es:

$$n_{vidrio} = \frac{c}{v_{vidrio}} \;\rightarrow\; v_{vidrio} = \frac{c}{1{,}60} = 1{,}9\cdot10^8\ \text{m/s}$$
$$n_{agua} = \frac{c}{v_{agua}} \;\rightarrow\; v_{agua} = \frac{c}{1{,}33} = 2{,}3\cdot10^8\ \text{m/s}$$

La frecuencia del rayo no varía al cambiar de medio, por tanto será la misma que tienen en el aire, donde vale:

$v_{aire} = \lambda_{aire}\cdot\nu \;\rightarrow\; \nu = v_{aire} / \lambda_{aire} = 3\cdot10^8 / 589\cdot10^{-9} = 5{,}1\cdot10^{14}$ Hz (amarillo)

Las longitudes de onda del rayo en el vidrio y en el agua son:

$\lambda_{vidrio} = v_{vidrio} / \nu = 1{,}9\cdot10^8 / 5{,}1\cdot10^{14} = 3{,}7\cdot10^{-7}$ m

$\lambda_{agua} = v_{agua} / \nu = 2{,}3\cdot10^8 / 5{,}1\cdot10^{14} = 4{,}5\cdot10^{-7}$ m

E6A.S2008

a) Describa los fenómenos de reflexión y de refracción de la luz.
b) Explique las condiciones que deben cumplirse entre dos medios para que el rayo incidente no se refracte.

Teoría

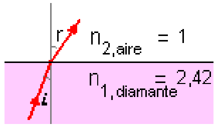
E6B.S2007

Un haz de luz de $5\cdot10^{14}$ Hz viaja por el interior de un diamante.
a) Determine la velocidad de propagación y la longitud de onda de esa luz en el diamante.
b) Si la luz emerge del diamante al aire con un ángulo de refracción de 10º, dibuje la trayectoria del haz y determine el ángulo de incidencia.
$c = 3\cdot10^8\ \text{m s}^{-1}$; $n_{diamante} = 2{,}42$

a) $n_{diamante} = \frac{c}{v_{diamante}} \;\rightarrow\; v_{diamante} = \frac{c}{2{,}42} = 1{,}2\cdot10^8\ \text{m/s}$

$\lambda_{diamante} = v_{diamante} / \nu = 1{,}2 \cdot 10^{8} / 5 \cdot 10^{14} = 2{,}4 \cdot 10^{-7}$ m

b)



$$\frac{\text{sen}i}{\text{sen}r} = \frac{n_2}{n_1} \quad \rightarrow \quad \frac{\text{sen}i}{\text{sen}10} = \frac{1}{2{,}42} \quad \rightarrow \quad i = 4{,}1^{\circ}$$

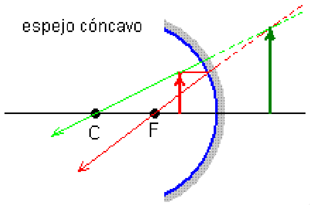
E2A.S2009

a) Enuncie las leyes de la reflexión y de la refracción de la luz. Explique qué es el ángulo límite e indique para qué condiciones puede definirse.
b) ¿Tienen igual frecuencia, longitud de onda y velocidad de propagación el rayo incidente y el refractado? Razone su respuesta.

Teoría

E6B.S2003
Construya gráficamente la imagen de:
a) Un objeto situado a 0,5 m de distancia de un espejo cóncavo de 2 m de radio.
b) Un objeto situado a la misma distancia delante de un espejo plano.
Explique en cada caso las características de la imagen y compare ambas situaciones.

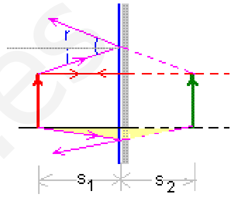
a) Teniendo en cuenta que en un espejo esférico el foco objeto y el foco imagen coinciden y que por tanto f= R/2 = 2/2 = 1m, en este caso el objeto al estar a s_1=–0,5m se encuentra entre el espejo y el foco y consecuentemente la imagen será: virtual derecha y mayor (el doble):



$$y_2 = -y_1 \frac{s_2}{s_1}$$

- y_2 es positiva $\Rightarrow$ es una imagen derecha (ya siempre y_1, s_2 son positivas y s_1 es negativa)
- la imagen es mayor porque, en valor absoluto, $s_2 > s_1$

b) En un espejo plano el radio es ∞ y por tanto también la distancia focal. En consecuencia el objeto esté donde esté siempre dará lugar a una imagen real derecha e igual (ya que $s_1 = -s_2 \Rightarrow y_1 = y_2$).



E1B.S2004
a) Construya gráficamente la imagen obtenida en un espejo cóncavo de un objeto situado entre el espejo y el foco. ¿Qué características tiene dicha imagen?
b) Los espejos convexos se emplean, por sus características, en los retrovisores de los automóviles, en los espejos de los cruces en las calles, etc. Explique por qué.

a) igual a E6B.S2003, b) igual a E5A.S2005 en la teoría

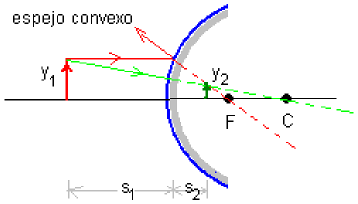
E2A.S2005
a) Explique qué es una imagen real y una imagen virtual y señale alguna diferencia observable entre ellas.
b) ¿Puede formarse una imagen virtual con un espejo cóncavo? Razone la respuesta utilizando las construcciones gráficas que considere oportunas

a) Imagen real: es la imagen que se forma por intercesión de dos rayos procedentes del objeto. No pueden verse y para verlas hay que proyectarlas sobre un plano.
Imagen virtual: es la imagen que se forma por intercesión de la prolongación de los rayos. No se pueden proyectar en un plano, pero pueden verse.
b) Sí, siempre que la imagen se encuentre entre el espejo y el foco.

E5B.S2012
a) Explique la formación de imágenes por un espejo convexo y, como ejemplo, considere un objeto situado entre el centro de curvatura y el foco.
b) Explique las diferencias entre imagen virtual e imagen real. Razone si puede formarse una imagen real con un espejo convexo.

a1) Las imágenes en los espejos se obtienen trazando dos rayos:
- uno que incide paralelamente al eje óptico (rojo en la fig.) y que, de acuerdo a la definición de foco, se refleja pasando por el foco, solo que en este caso solo puede pasar su proyección ya que el rayo no puede pasar por el foco al encontrarse al otro lado del espejo.
- otro que pase por centro de curvatura y que por tanto no se desviará y se refleja siguiendo el mismo camino (en color verde)
- Evidentemente, una vez construida la imagen, la proyección paralela al eje se reflejará en la dirección que pase por el foco (en color rosa).

a2) En un espejo convexo es imposible colocar un objeto entre la focal y el centro de curvatura, ya que, siempre, tanto la focal como el centro de curvatura están al otro lado del espejo. En cualquier otro punto sería:



b) Las diferencias entre una imagen real y virtual es que se obtengan al cortarse dos rayos procedentes del objeto o que se obtengan al cortarse sus prolongaciones. La imágenes en un espejo convexo son siempre:

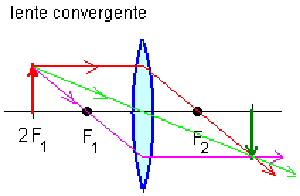
- virtuales porque los rayos siempre divergen y en consecuencia solo pueden cortarse sus prolongaciones (porque no pueden pasar por el foco y el centro de curvatura, ya que están al otro lado del espejo).
- derechas porque el objeto y la imagen están a ambos lados del espejo
- menores porque siempre $s_2 < s_1$

E5A.S2006

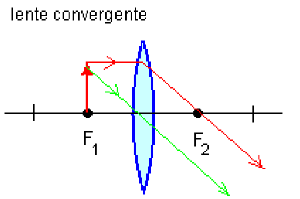
Dibuje la marcha de los rayos e indique el tipo de imagen formada con una lente convergente si:

a) La distancia objeto, s, es igual al doble de la focal, f.

b) La distancia objeto es igual a la focal.



Si el objeto está a una distancia igual al doble de la distancia focal se obtiene una imagen real, invertida y del mismo tamaño

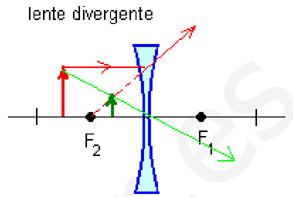


Si el objeto está en el foco, no se forma imagen, ya que los rayos se cortarían en el infinito.

E3A.S2008

a) Explique la formación de imágenes y sus características en una lente divergente.

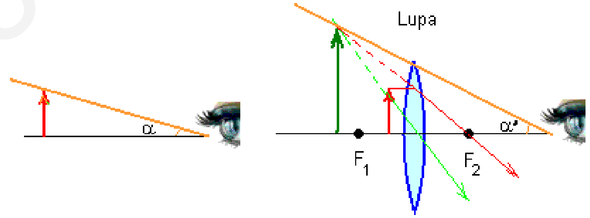
b) ¿Pueden formarse imágenes virtuales con lentes convergentes? Razone la respuesta.



En una lente divergente la imagen siempre es virtual, derecha y menor.

b) Para obtener imágenes virtuales con lentes convergentes el objeto debe estar siempre entre el foco objeto y la lente, que es lo que ocurre en una lupa.

Lupa: Es simplemente una lente convergente. Colocando el objeto entre el foco y la lente se obtiene una imagen virtual aumentada, es decir nos permite observarla con un ángulo de visión mayor:



EJERCICIOS SEMIRESUELTOS Y CON SOLUCIONES

E1A.S2011

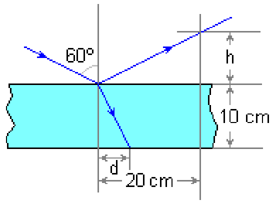
a) Construya la imagen formada con una lente convergente de un objeto situado a una distancia, s, de la lente igual al doble de la distancia focal, f, y comente sus características.

b) ¿Pueden formarse imágenes virtuales con lentes convergentes? Razone la respuesta.

Sol: a) igual al apartado a del E5A.S2006. b) igual al apartado b del E3A.S2008

E4B.S2004

Una lámina de vidrio, de índice de refracción 1,5, de caras paralelas y espesor 10 cm, está colocada en el aire. Sobre una de sus caras incide un rayo de luz, como se muestra en la figura. Calcule:



a) La altura h y la distancia d marcadas en la figura.

b) El tiempo que tarda la luz en atravesar la lámina.

$c = 3\cdot 10^8 \text{ m s}^{-1}$

Sol. a) L.Snell reflexión: i=r=60 → tg30=h/0,20 → h=0,1155m

L.Snell refracción: seni/senr=n_2/n_1 → sen60/senr=1,5/1 → r=35,26º

tg35,26=d/0,10 → d=0,0707m

b) Espacio recorrido por la luz en dentro de la lámina: cos35,26=0,10/s → s=0,1225m

Velocidad de la luz dentro de la lámina: $n_{vidrio}=c/v_{vidrio}$ → $v_{vidrio}=2\cdot 10^8$ m/s

$s=v\cdot t \rightarrow 0{,}1225=2\cdot 10^8\cdot t \rightarrow t=6{,}125\cdot 10^{-10}$seg

E6B.S2001

Una onda electromagnética armónica de 20 MHz se propaga en el vacío, en el sentido positivo del eje OX. El campo eléctrico de dicha onda tiene la dirección del eje OZ y su amplitud es de $3\cdot 10^{-3}$ N C^{-1}

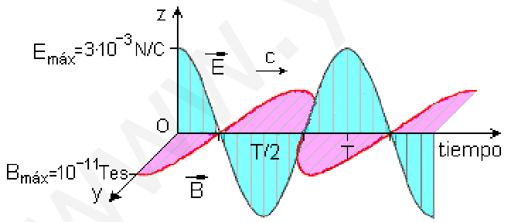
a) Escriba la expresión del campo eléctrico **E**(x, t), sabiendo que en x=0 su módulo es máximo cuando t = 0.

b) Represente en una gráfica los campos **E**(t) y **B**(t) y la dirección de propagación de la onda.

$c = 3\cdot 10^8 \text{ m s}^{-1}$.

Sol: a) Al tratarse de una onda armónica que se propaga hacia la derecha su ecuación será del tipo $E(x,t) = E_{máx}\operatorname{sen}2\pi\left(\frac{x}{\lambda}-\frac{t}{T}+\varphi_o\right) = 3\cdot 10^{-3}\operatorname{sen}2\pi\left(\frac{x}{15}-\frac{t}{5\cdot 10^{-8}}+\frac{1}{4}\right)$

b) Teniendo en cuenta que la dirección de propagación de la OEM viene dada por un vector como el $\vec{E}\wedge\vec{B}$. Si $\vec{E}$ tiene la dirección del eje OZ y se propaga en el sentido positivo del eje OX, según la definición de producto vectorial de dos vectores tenemos que admitir que $\vec{B}$ debe propagarse en el plano XY



$c = \frac{E_{máx}}{B_{máx}} \Rightarrow B_{máx}=10^{-11}$Teslas

EJERCICIOS PROPUESTOS EN SELECTIVIDAD CADA CURSO

LUZ. CURSO 2010/2011

E2B.S2011

a) Explique los fenómenos de reflexión y refracción de una onda en la superficie de separación entre dos medios.

b) ¿Son iguales la frecuencia, velocidad de propagación y longitud de onda de la luz incidente que las de la luz reflejada y transmitida? Razone la respuesta

E2B.S2011

Un rayo de luz de frecuencia $5\cdot 10^{14}$ Hz penetra en una lámina de vidrio de caras paralelas con un ángulo de incidencia de 30º.

a) Dibuje en un esquema los rayos incidente, refractado en el vidrio y emergente al aire y determine los ángulos de refracción y de emergencia.

b) Explique qué características de la luz cambian al penetrar en el vidrio y calcule la velocidad de propagación dentro de la lámina

$c= 3\cdot 10^8$ m s^{-1} ; $n_{vidrio} = 1{,}5$

E3A.S2011

a) Describa con ayuda de un esquema los fenómenos de reflexión y refracción de la luz y enuncie sus leyes.

b) Explique en qué consiste la reflexión total y en qué condiciones se produce

E4B.S2011

a) Un rayo de luz monocromática emerge al aire, desde el interior de un bloque de vidrio, en una dirección que forma un ángulo de 30º con la normal a la superficie. Dibuje en un esquema los rayos incidente y refractado y calcule el ángulo de incidencia y la velocidad de propagación de la luz en el vidrio.

b) ¿Existen ángulos de incidencia para los que no sale luz del vidrio? Explique este fenómeno y calcule el ángulo límite.

$c= 3\cdot 10^8$ m s^{-1} ; $n_{aire} = 1$; $n_{vidrio} = 1{,}5$

E6A.S2011J

Una onda electromagnética tiene en el vacío una longitud de onda de $5\cdot 10^{-7}$ m.

a) Explique qué es una onda electromagnética y determine la frecuencia y el número de onda de la onda indicada.

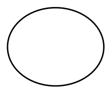
b) Al entrar la onda en un medio material su velocidad se reduce a 3c/4. Determine el índice de refracción del medio y la frecuencia y la longitud de onda en ese medio.

$c=3\cdot 10^8$ m/s.

a) Teoría. $\nu = c/\lambda = 6\cdot 10^{14}$ Hz ; $\bar{\nu} = 1/\lambda = 2\cdot 10^6 \text{ m}^{-1}$

b) Al cambiar de medio, varía la velocidad de la luz (que en este caso se reduce ¾) y como consecuencia varía también su longitud de onda, ya que su frecuencia permanece inalterada siendo independiente del medio en el que se propaga.

A partir de la ley de Snell para la refracción y que para el vacío v_1=c y n_1=1 y para el otro medio v_2 =3c/4



$$\frac{\text{sen}\,i}{\text{sen}\,r}=\frac{n_2}{n_1}=\frac{v_1}{v_2}=\frac{\lambda_1\nu}{\lambda_2\nu}=\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\;\Rightarrow\;\frac{n_2}{n_1}=\frac{v_1}{v_2}\;\rightarrow\;\frac{n_2}{1}=\frac{c}{3c/4}\;\rightarrow\;n_2=4/3$$

La frecuencia de la onda, como hemos dicho, no varía al cambiar de medio. La longitud de onda que la onda tendrá en el segundo medio material puede obtenerse de la misma relación anterior:

$$\frac{\text{sen}\,i}{\text{sen}\,r}=\frac{n_2}{n_1}=\frac{v_1}{v_2}=\frac{\lambda_1\nu}{\lambda_2\nu}=\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\;\Rightarrow\;\frac{v_1}{v_2}=\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\;\rightarrow\;\frac{c}{3c/4}=\frac{5\cdot10^{-7}}{\lambda_2}\;\rightarrow\;\lambda_2=3{,}75\cdot10^{-7}\,\text{m}$$

Como era de esperar, al pasar la luz de un medio ($n_{vacío}$=1) a propagarse en otro medio de mayor índice de refracción (n_2=4/3) la velocidad de propagación y la longitud de onda disminuyen.

LUZ. CURSO 2011/2012

E2BA.S2012
a) Explique los fenómenos de reflexión y refracción de una onda en la superficie de separación de dos medios.
b) Razone si es verdadera o falsa la siguiente afirmación: “las ondas reflejada y refractada tienen igual frecuencia, igual longitud de onda y diferente amplitud que la onda incidente”.

E3A.S2012
a) Modelos corpuscular y ondulatorio de la luz; caracterización y evidencia experimental.
b) Ordene de mayor a menor frecuencia las siguientes regiones del espectro electromagnético: infrarrojo, rayos X, ultravioleta y luz visible y razone si pueden tener la misma longitud de onda dos colores del espectro visible: rojo y azul, por ejemplo.

E4B.S2012
Un haz de luz que se propaga por el interior de un bloque de vidrio incide sobre la superficie del mismo de modo que una parte del haz se refleja y la otra se refracta al aire, siendo el ángulo de reflexión 30º y el de refracción 40º.
a) Calcule razonadamente el ángulo de incidencia del haz, el índice de refracción del vidrio y la velocidad de propagación de la luz en el vidrio.
b) Explique el concepto de ángulo límite y determine su valor para el caso descrito.
$c = 3\cdot10^8$ m s^{-1}

E6B.S2012
Un rayo de luz incide desde el aire en una lámina de vidrio con un ángulo de 30º. Las longitudes de onda en el aire de las componentes azul y roja de la luz son, respectivamente, λ(azul) = 486 nm y λ(roja) = 656 nm.
a) Explique con ayuda de un esquema cómo se propaga la luz en el vidrio y calcule el ángulo que forman los rayos azul y rojo. ¿Se propagan con la misma velocidad? Justifique la respuesta.
b) Determine la frecuencia y la longitud de onda en el vidrio de la componente roja.
$c = 3\cdot10^8$ m s^{-1} ; nvidrio (azul) = 1,7 ; nvidrio (rojo) = 1,6

LUZ . CURSO 2012/2013

E2B.S2013
4. Un haz de luz monocromática tiene una longitud de onda de 700 nm en el aire y 524 nm en el interior del humor acuoso del ojo humano.
a) Explique por qué cambia la longitud de onda de la luz en el interior del ojo humano y calcule el índice de refracción del humor acuoso.
b) Calcule la frecuencia de esa radiación monocromática y su velocidad de propagación en el ojo humano.
$c = 3\cdot10^8$ m s^{-1} ; naire = 1

E3B.S2013
2. a) ¿Qué es el índice de refracción de un medio? Razone cómo cambian la frecuencia, la longitud de onda y la velocidad de un haz de luz láser al pasar del aire al interior de una lámina de vidrio.
b) Explique en qué consiste la dispersión de la luz en un prisma.

E4B.S2013
4. Un haz de luz láser que se propaga por un bloque de vidrio tiene una longitud de onda de 450 nm. En el punto de emergencia al aire del haz, el ángulo de incidencia es de 25º y el ángulo de refracción de 40º.
a) Dibuje la trayectoria de los rayos y calcule el índice de refracción del vidrio y la longitud de onda de la luz láser en el aire.
b) Razone para qué valores del ángulo de incidencia el haz de luz no sale del vidrio.
$c = 3\cdot10^8$ m s^{-1} ; naire = 1

E5B.S2013
2. a) Explique los fenómenos de reflexión y refracción de la luz, y escriba sus leyes.
b) Explique si tienen la misma frecuencia y la misma longitud de onda tres haces de luz monocromática de colores azul, verde y rojo. ¿Se propagan en el vacío con la misma velocidad? ¿Qué característica de esos haces cambia cuando se propagan en vidrio? Razone las respuestas.

E6B.S2013
4. Un haz compuesto por luces de colores rojo y azul incide desde el aire sobre una de las caras de un prisma de vidrio con un ángulo de incidencia de 40º.
a) Dibuje la trayectoria de los rayos en el aire y tras penetrar en el prisma y calcule el ángulo que forman entre sí los rayos en el interior del prisma si los índices de refracción son n_{rojo} = 1,612 para el rojo y n_{azul} = 1,671 para el azul, respectivamente.
b) Si la frecuencia de la luz roja es de 4,2•1014 Hz calcule su longitud de onda dentro del prisma.
$c = 3\cdot10^8$ m s^{-1}; naire = 1

LUZ. CURSO 2013/2014

E1B.S2014
En tres experiencias independientes un haz de luz de 10^{15} Hz incide desde el aire, con un ángulo de 20º, en la superficie de cada uno de los materiales que se indican en la tabla, produciéndose reflexión y refracción.

Material	Cuarzo	Diamante	Agua

Índice de refracción	1,46	2,42	1,33

a) Razone si el ángulo de reflexión depende del material y en qué material la velocidad de propagación de la luz es menor. Determine para ese material el ángulo de refracción.
b) Explique en qué material la longitud de onda de la luz es mayor. Determine para ese material el ángulo de refracción.
$n_{aire} = 1$; $c = 3 \cdot 10^8$ m s^{-1}.
Sol: a) El ángulo de reflexión es independiente del medio; La velocidad es mayor en el agua; $r_{aire\text{-}agua}$=8º; b) λ es mayor en el agua; $r_{aire\text{-}agua}$=8º.

E3A.S2014 J
a) Explique los fenómenos de reflexión y refracción de la luz y las leyes que los rigen.
b) Razone si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones: i) la imagen de un objeto en un espejo convexo es siempre real, derecha y de menor tamaño que el objeto; ii) la luz cambia su longitud de onda y su velocidad de propagación al pasar del aire al agua.

E4B.S2014 S
Un buceador enciende una linterna debajo del agua y dirige el haz luminoso hacia arriba formando un ángulo de 30º con la vertical. Explique con ayuda de un esquema la marcha de los rayos de luz y determine:
a) el ángulo con que emergerá la luz del agua;
b) el ángulo de incidencia a partir del cual la luz no saldrá del agua.
$n_{aire} = 1$; $n_{agua} = 1{,}33$.
Sol: a) r=41,4º; b) $i_{lím}$=48,5º

E5B.S2014
a) Explique los fenómenos de reflexión y refracción de la luz y las leyes que los rigen.
b) Una superficie plana separa dos medios de índices de refracción n_1 y n_2 y un rayo de luz incide desde el medio de índice n1. Razone si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas: i) si $n_1>n_2$, el ángulo de refracción es menor que el ángulo de incidencia; ii) si $n_1<n_2$, a partir de un cierto ángulo de incidencia se produce el fenómeno de reflexión total.
Sol: b) Verdad; Verdad.

E6B.S2014
Un haz de luz roja que viaja por el aire incide sobre una lámina de vidrio de 30 cm de espesor. Los haces reflejado y refractado forman ángulos de 30º y 20º, respectivamente, con la normal a la superficie de la lámina.
a) Explique si cambia la longitud de onda de la luz al penetrar en el vidrio y determine el valor de la velocidad de propagación de la luz en el vidrio.
b) Determine el ángulo de emergencia de la luz (ángulo que forma el rayo que sale de la lámina con la normal). ¿Qué tiempo tarda la luz en atravesar la lámina de vidrio?
naire = 1 ; $c = 3 \cdot 10^8$ m s^{-1}.
Sol: a) De acuerdo con las leyes de Snell la longitud de onda de la luz cambia al cambiar de medio porque cambia la velocidad mientras que la frecuencia permanece constante.
$\lambda_{vidrio}=\lambda_{aire}\cdot$(sen20/sen30)=0,68 λ_{aire}; v_{vidrio}=c$\cdot$(sen20/sen30)=2,05$\cdot 10^8$ m$\cdot s^{-1}$
b) r´=30º; $s_{recorrido}$=0,3/cos20 m; t=$s_{recorrido}/v_{vidrio}$=1,55$\cdot 10^{-9}$ s

LUZ. CURSO 2014/2015

E1A.S2015
a) ¿Qué es una onda electromagnética? Explique las características de una onda cuyo campo eléctrico es: $\vec{E}(z,t) = E_0\,\vec{i}\,\cos(az - bt)$

b) Ordene en sentido creciente de sus longitudes de onda las siguientes regiones del espectro electromagnético: infrarrojo, rayos X, ultravioleta y luz visible y comente algunas aplicaciones de la radiación infrarroja y de los rayos X.

E2B.S2015
Un rayo de luz monocromática incide en una lámina de vidrio de caras planas y paralelas situada en el aire y la atraviesa. El espesor de la lámina es 10 cm y el rayo incide con un ángulo de 25º medido respecto a la normal de la cara sobre la que incide.
a) Dibuje en un esquema el camino seguido por el rayo y calcule su ángulo de emergencia. Justifique el resultado.
b) Determine la longitud recorrida por el rayo en el interior de la lámina y el tiempo invertido en ello.
$c = 3\cdot 10^8$ m s^{-1} ; $n_{vidrio} = 1{,}5$; $n_{aire} = 1$

E3B.S2015
a) Explique, con ayuda de un esquema, los fenómenos de reflexión y refracción de la luz en la superficie que separa dos medios con diferente índice de refracción y enuncie sus leyes.
b) ¿Qué es la reflexión total? Razone en qué situaciones puede producirse.

E4B.S2015
Un rayo de luz roja, de longitud de onda en el vacío $650\cdot 10^{-9}$ m, emerge al agua desde el interior de un bloque de vidrio con un ángulo de 45º. La longitud de onda en el vidrio es $433\cdot 10^{-9}$ m.
a) Dibuje en un esquema los rayos incidente y refractado y determine el índice de refracción del vidrio y el ángulo de incidencia del rayo.
b) ¿Existen ángulos de incidencia para los que la luz sólo se refleja? Justifique el fenómeno y determine el ángulo a partir del cual ocurre este fenómeno.
$n_{agua} = 1{,}33$

E6B.S2015
Cuando un haz de luz de $5\cdot 10^{14}$ Hz penetra en cierto material su velocidad se reduce a 2c/3.
a) Determine la energía de los fotones, el índice de refracción del material y la longitud de onda de la luz en dicho medio.
b) ¿Podría propagarse la luz por el interior de una fibra de ese material sin salir al aire? Explique el fenómeno y determine el valor del ángulo límite.
$c = 3\cdot 10^8$ m s^{-1} ; $h = 6{,}62\cdot 10^{-34}$ J s

ÓPTICA GEOMÉTRICA. CURSO 2010/2011

E1A.S2011
a) Construya la imagen formada con una lente convergente de un objeto situado a una distancia, s, de la lente igual al doble de la distancia focal, f, y comente sus características.
b) ¿Pueden formarse imágenes virtuales con lentes convergentes? Razone la respuesta.

E5B.S2011
a) Formación de imágenes en espejos.
b) Los fabricantes de espejos retrovisores para automóviles advierten que los objetos pueden estar más cerca de lo que parece en el espejo. ¿Qué tipo de espejo utilizan y por qué se produce ese efecto? Justifique la respuesta mediante un diagrama de rayos.

ÓPTICA GEOMÉTRICA. CURSO 2011/2012

E1A.S2012
a) Explique en qué consiste el fenómeno de reflexión total e indique en qué condiciones se puede producir.
b) Razone con la ayuda de un esquema por qué al sumergir una varilla recta en agua su imagen parece quebrada.

E5B.S2012
a) Explique la formación de imágenes por un espejo convexo y, como ejemplo, considere un objeto situado entre el centro de curvatura y el foco.
b) Explique las diferencias entre imagen virtual e imagen real. Razone si puede formarse una imagen real con un espejo convexo.

OPTICA GEOMETRICA. CURSO 2012/2013

E1A.S2013
2. a) Explique la marcha de rayos utilizada para la construcción gráfica de la imagen formada por una lente convergente y utilícela para obtener la imagen de un objeto situado entre el foco y la lente. Explique las características de dicha imagen.
b) ¿Cuáles serían las características de la imagen si el objeto estuviera situado a una distancia de la lente igual a tres veces la distancia focal?

ÓPTICA GEOMÉTRICA. CURSO 2014/2015

E5B.S2015
a) Explique la construcción de rayos para obtener la imagen en un espejo cóncavo y comente las características de la imagen de un objeto situado a una distancia del espejo mayor que su radio de curvatura.
b) ¿Puede formarse una imagen virtual con un espejo cóncavo? Razone la respuesta.

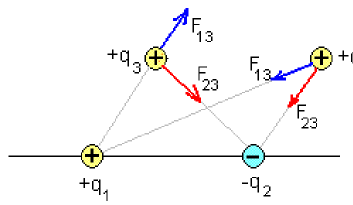
CAMPO ELÉCTRICO

E3B.S2009
a) Enuncie la ley de Coulomb y aplique el principio de superposición para determinar la fuerza que actúa sobre una carga en presencia de otras dos.
b) Dos cargas $+q_1$ y $-q_2$ están situadas en dos puntos en un plano. Explique, con la ayuda de una gráfica, en qué posición habría que colocar una tercera carga $+q_3$ para que estuviera en equilibrio.

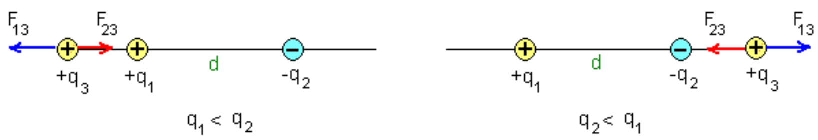
a) Teoría
b) Para que la carga esté en equilibrio es necesario que la suma de todas las fuerzas sobre ella sea cero. De acuerdo al principio de superposición la fuerza resultante es la suma vectorial de las fuerzas que cada carga hace por separado sobre q_3. Para que sea nula es necesario que (1) las dos fuerzas tengan la misma dirección, (2) sentidos opuestos y (3) el mismo módulo.

La fuerza que ejerce $+q_1$ sobre la carga $+q_3$ es repulsiva y la que ejerce la carga $-q_2$ sobre $+q_3$ es atractiva. De acuerdo con el principio de superposición, la fuerza sobre la carga $+q_3$ vendrá dada por la suma vectorial de la que cada carga ejerce sobre ella por separado, de manera que para que den resultante nula :

- Como la dirección de la fuerza entre dos cargas es según la recta que las une ello nos lleva a que las tres cargas deben estar sobre una misma recta para que las dos fuerzas tengan la misma dirección. Otra posición sería imposible, ya que si la carga +q3 no estuviese sobre de la recta que une las cargas +q1 y –q2 la resultante de las fuerzas F_{13} y F_{23} nunca sería nula.



- La carga +q3 no puede estar entre las cargas +q1 y –q2 porque entre ellas las fuerzas F_{13} y F_{23} tienen la misma dirección y sentido y nunca se anularían
- La carga +q3, por tanto, debe estar a la izquierda de +q1 o bien a la derecha de +q3, tal como se indica en la figura:



- Teniendo en cuenta que, de acuerdo con la ley de Coulomb, la fuerza es inversamente proporcional a la distancia, el que la carga $+q_3$ esté a un lado u otro dependerá del "valor absoluto" de las cargas $+q_1$ y $-q_2$. Obviamente estará más cerca de la carga más pequeña en valor absoluto.

Supongamos que $q_1<q_2$ y si llamamos x a la distancia a la que habría que colocar la carga $+q_3$ a la derecha de $+q_1$, tendremos:

$$F_{13} = K\frac{q_1 q_3}{x^2} \qquad y \qquad F_{23} = K\frac{q_2 q_3}{(x+d)^2}$$

para que la carga esté en reposo los módulos de las dos fuerzas deben ser iguales, ya que tienen la misma dirección y sentidos puestos:

$$K\frac{q_1 q_3}{x^2} = K\frac{q_2 q_3}{(x+d)^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{q_1}{x^2} = \frac{q_2}{(d-x)^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{\sqrt{q_1}}{x} = \frac{\sqrt{q_2}}{d-x} \quad \Rightarrow$$

$$x = d\frac{\sqrt{q_1}}{\sqrt{q_1}+\sqrt{q_2}}$$

E5A.S2009

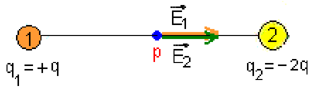
Considere dos cargas eléctricas puntuales de $q_1=2\cdot 10^{-6}$ C y $q_2=-4\cdot 10^{-6}$ C separadas 0,1m

a) Determine el valor del campo eléctrico en el punto medio del segmento que une ambas cargas. ¿Puede ser nulo el campo en algún punto de la recta que las une? Contesta razonadamente con la ayuda de un esquema.

b) Razone si es posible que el potencial eléctrico se anule en algún punto de dicha recta y, en su caso, calcule la distancia de ese punto a las cargas.

$K=9\cdot 10^9\ Nm^2C^{-2}$

a) En el punto medio de la recta que une dos cargas de distinto signo el campo eléctrico creado por ambas cargas se refuerza y apunta a la carga negativa:



Como tienen la misma dirección y el mismo sentido, basta con calcular sus módulos y sumarlos:

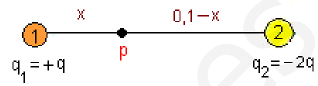
$$E_1 = K\frac{q_1}{d^2} = K\frac{q}{d^2} \qquad \text{y lo mismo} \qquad E_2 = K\frac{q_2}{d^2} = K\frac{2q}{d^2}$$

El campo resultante en el punto medio del segmento que une las cargas será:

$$E = E_1 + E_2 = K\frac{3q}{d^2} = 9\cdot 10^9\frac{3\cdot 210^{-6}}{0{,}05^2} = 2{,}16\cdot 10^7\ N/C$$

El campo puede ser nulo en un punto de la recta que las une, aunque fuera del segmento que une las cargas, exactamente a 0,24m a la izquierda de la carga positiva. Razonalo (ejercicio E3B.S2009)

b) Aunque el campo entre las cargas de distinto signo no puede ser nulo, el potencial sí que puede serlo porque es la suma del creado por cada carga y una es positiva y la otra negativa:



$$V_p = \sum V_i = K\frac{q}{r_{1p}} + K\frac{q_2}{r_{2p}}$$

$$V_p = K\frac{q}{x} + K\frac{-2q}{0{,}1-x} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x = 0{,}033m$$

E6A.S2009

a) Energía potencial electrostática de una carga en presencia de otra. Razone si la energía potencial electrostática de una carga q aumenta o disminuye al pasar de un punto A a otro B, siendo el potencial de A menor que en B.

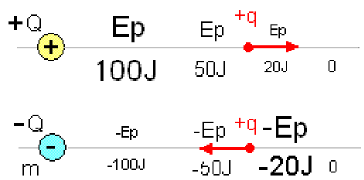
b) El punto A está más alejado que el B de la carga Q que crea el campo. Razone si la carga Q es positiva o negativa.

a) Teoría. Teniendo en cuenta que la relación entre la Energía potencial y el Potencial es el testigo, es decir la carga en este caso:

$$Ep_A - Ep_B = q\ (V_A - V_B)$$

resulta evidente que si V_A es menor que V_B, en el caso de que la carga q sea positiva, la Ep_A será también será menor que la Ep_B. (Lo contrario sería si q fuese negativa). Por lo tanto podremos decir que la energía potencial de la carga +q aumenta al pasar al punto B.

b) Puesto que Ep=K·Q·q/r, resulta que la Ep eléctrica tiene su "máximo valor positivo si las cargas son del mismo signo" (o "máximo valor negativo si las cargas son de distinto signo") en la superficie de la carga que crea el campo y va disminuyendo (o aumentando) al alejarnos hasta llegar a cero en el infinito. En cualquier caso, en el infinito la Ep es cero.



Según esto, si el potencial (que para una carga +q varía igual que la energía potencial) es más pequeño en el punto A, que está más alejado que el B, resulta que la carga Q, que crea el campo, debe ser positiva.

E1A.S2009

a) Explique la relación entre campo y potencial eléctrico

b) Razone si puede ser distinto de cero el potencial eléctrico en un punto en el que el campo eléctrico es nulo.

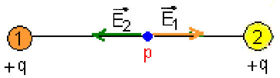
a) Teoría

b) De la definición de ddp entre dos puntos como la circulación del vector intensidad de campo entre ellos:

$$V_A - V_B = \int_{A,\text{campo}}^{B} \vec{E} \bullet d\vec{r}$$

se deduce que si el valor del campo eléctrico es nulo el potencial de ambos puntos A y B es el mismo. Si E=0 ⇒ $V_A=V_B$, pero eso no quiere decir que necesariamente $V_A=0$.

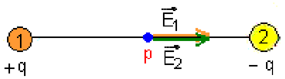
Así que, en un punto donde el campo es nulo no necesariamente debe serlo también el potencial. Imagínate dos cargas iguales del mismo signo. En el punto medio de la recta que las une el campo es nulo porque se anulan los campos creados por cada carga, mientras que el potencial (referido al infinito) es el doble del que tendría si hubiera una sola carga:



El potencial en el punto medio debido a la asociación de cargas, que de acuerdo con el principio de superposición es la suma del potencial debido a cada una de ellas, sería:

$$V_p = \sum V_i = K\frac{Q}{r_{1p}} + K\frac{Q}{r_{2p}} = 2K\frac{Q}{r_{1p}}$$

Y al contrario, en el punto medio de la recta que une dos cargas de distinto signo el potencial es nulo (referido al infinito) pero el campo eléctrico no es nulo, sino que apunta a la carga negativa:



Como puedes ver el campo eléctrico en el punto medio no es nulo, por el contrario, su módulo es el doble. Sin embargo el potencial en ese punto debido a la asociación de cargas sí que es nulo, ya que:

$$V_p = \sum V_i = K\frac{Q}{r_{1p}} + K\frac{-Q}{r_{2p}} = 0$$

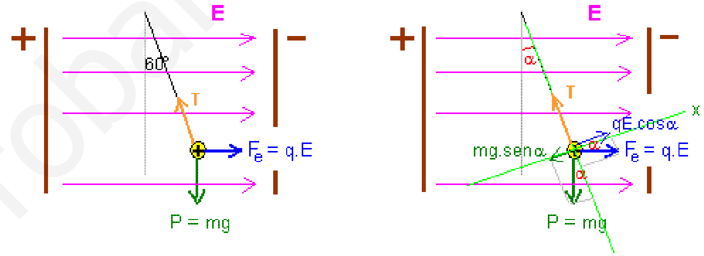
E4A.S2009

Una bolita de 1 g cargada con $+5\cdot 10^{-6}$ C pende de un hilo que forma 60º con la vertical en una región en la que existe un campo eléctrico uniforme en dirección horizontal.

a) Explique con la ayuda de un esquema qué fuerzas actúan sobre la bolita y calcule el valor del campo eléctrico.

b) Razone qué cambios experimentaría la situación de la bolita si: i) se duplicara el campo eléctrico. ii) se duplicara la masa de la bolita.

a) Sobre la bolita actúan tres fuerzas: El peso, la eléctrica y la tensión de la cuerda que la sujeta, tal como se muestra en la figura:



Para que el péndulo esté en equilibrio, es preciso que la suma de las fuerzas sea nula, así que eligiendo un sistema de referencia como el de la figura no hay más que descomponerlas e igualar las componentes en el eje X.

$$mg\cdot \text{sen}\alpha = qE\cdot\cos\alpha \quad\Rightarrow\quad E = \frac{mg\cdot \text{tg}\alpha}{q} = \frac{0{,}001\cdot 10\cdot \text{tg}60}{5\cdot 10^{-6}} = 3464\,N/C$$

Las componentes en eje Y también dan resultante nula: $T = mg\cdot\cos\alpha + qE\cdot\text{sen}\alpha$

b) Si se duplica el valor del campo eléctrico, obviamente aumentará el ángulo que forme con la vertical una vez alcanzado el equilibrio, vamos a ver en qué medida:

$$\left.\begin{array}{l} E = \dfrac{mg\cdot \text{tg}\alpha}{q} \\ E' = \dfrac{mg\cdot \text{tg}\alpha'}{q} \end{array}\right\} \quad \frac{E}{E'} = \frac{\text{tg}\alpha}{\text{tg}\alpha'} = \frac{1}{2} \quad\Rightarrow\quad \text{tg}\alpha' = 2\,\text{tg}\alpha$$

En el caso de que se duplique el valor de la masa, disminuirá el ángulo que forme con la vertical. Despejamos la masa y luego dividimos miembro a miembro:

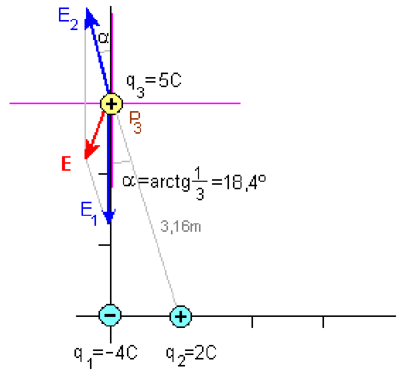
$$\left.\begin{array}{l} m = \dfrac{qE}{g\cdot \text{tg}\alpha} \\ m' = \dfrac{qE}{g\cdot \text{tg}\alpha'} \end{array}\right\} \quad \frac{m}{m'} = \frac{\text{tg}\alpha'}{\text{tg}\alpha} = \frac{1}{2} \quad\Rightarrow\quad \text{tg}\alpha' = \frac{\text{tg}\alpha}{2}$$

E6B.S2009

Dos cargas puntuales $q_1=-4C$ y $q_2=2C$ se encuentran en los puntos (0,0) y (1,0) respectivamente.

a) Determine el valor del campo eléctrico en el punto (0,3) m
b) Razone qué trabajo hay que realizar para trasladar una carga q_3=5C desde el infinito hasta el punto (0,3) m e interprete el signo del resultado.
$K=9\cdot10^9\ N\ m^2\ C^{-2}$

a) De acuerdo con el principio de superposición el campo eléctrico en el punto P_3 es la suma vectorial del campo que en ese punto crea la carga q_1 y del crea la carga q_2. El módulo del campo creado en P_3 por las cargas q_1 y q_2 es:



$$E_1 = K\frac{q_1}{d_1^2} = K\frac{4}{3^2} = 0{,}44K$$

$$E_2 = K\frac{q_2}{d_2^2} = K\frac{2}{3{,}16^2} = 0{,}20K$$

En forma de vector, respecto del SR coloreado en rosa sería:

$$\vec{E}_1 = \qquad\qquad -E_1\vec{j}$$
$$\vec{E}_2 = -E_2 \mathrm{sen}18{,}4^{\circ}\,\vec{i} + E_2\cos 18{,}4\,\vec{j}$$
$$\overline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}$$
$$\vec{E} = -0{,}06K\,\vec{i} - 0{,}25K\,\vec{j} = 0{,}54\cdot10^9\,\vec{i} - 2{,}25\cdot10^9\,\vec{j}$$

El módulo del campo eléctrico en el punto P_3 sería:

$$E = \sqrt{(0{,}54\cdot10^9)^2 + (2{,}25\cdot10^9)^2} = 2{,}31\cdot10^9\ N/C$$

El ángulo que forma con el eje X sería: $\beta = \mathrm{arctg}\frac{E_x}{E_y} = \mathrm{arctg}\frac{0{,}54}{-2{,}25} = -13{,}5^{\circ}$

b) El trabajo que hay que realizar para traer la carga q_3 desde el infinito hasta el punto donde se encuentra es igual, por definición, a la energía potencial que tiene la carga q_3 en ese punto, ya que como sabemos, la diferencia de Ep entre dos puntos es igual al trabajo que hacemos nosotros para llevar una carga (o una masa) desde un punto al otro. Y como la Ep en el infinito es cero, porque disminuye con la distancia, el trabajo para llevarla desde A hasta B, donde A es el infinito y B el punto P_3 será:

$$W_{\infty\rightarrow P3,nosotros} = Ep_{p3} - Ep_{\infty} = Ep_{p3}$$

por otro lado, la Ep del punto P_3, de acuerdo con el principio de superposición, será la suma de la Ep de cada carga, así que:

$$Ep_3 = Ep_{13} + Ep_{23} = K\frac{q_1 q_3}{r_{13}} + K\frac{q_2 q_3}{r_{23}} = \frac{9\cdot10^9\cdot(-4)\cdot5}{3} + \frac{9\cdot10^9\cdot2\cdot5}{3{,}16} = -3{,}15\cdot10^{10}\ \text{Julios}$$

El signo menos, que aparece, quiere decir que la carga q_3 viene sola, es decir que realmente no tenemos que realizar ese trabajo para traerla desde el infinito y colocarla en el punto P_3, sino que el trabajo lo hace el campo eléctrico creado por las otras dos cargas.

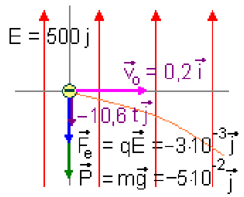
E2B.S2010
Una partícula de $5\cdot10^{-3}$ kg y carga eléctrica $q = -6\cdot10^{-6}$ C se mueve con una velocidad de 0,2 m s^{-1} en el sentido positivo del eje X y penetra en la región x > 0, en la que existe un campo eléctrico uniforme de 500 N C^{-1} dirigido en el sentido positivo del eje Y.
a) Describa, con ayuda de un esquema, la trayectoria seguida por la partícula y razone si aumenta o disminuye la energía potencial de la partícula en su desplazamiento.
b) Calcule el trabajo realizado por el campo eléctrico en el desplazamiento de la partícula desde el punto (0, 0) m hasta la posición que ocupa 5 s más tarde.
$g = 10\ m\ s^{-2}$

a) Sobre la partícula actúan la fuerza peso y la fuerza eléctrica:

$$\vec{P} = m\vec{g} = 5\cdot10^{-3}(-10\vec{j}) = -5\cdot10^{-2}\,\vec{j}\ \ N$$
$$\vec{F}_e = q\vec{E} = -6\cdot10^{-6}(500\vec{j}) = -3\cdot10^{-3}\,\vec{j}\ \ N$$
$$\overline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}$$
$$\Sigma\vec{F} = \vec{P} + \vec{F}_e = -0{,}053\vec{j}\ \ N$$

Observa:

- Al utilizar la expresión vectorial $\vec{F}_e = q\vec{E}$ debe sustituirse el valor de la carga con su signo incluido, como así se ha hecho.
- Precisamente, como el producto de un vector por un escalar negativo es un vector en la misma dirección y sentido contrario, la fuerza eléctrica tiene sentido contrario al campo eléctrico. En este caso el mismo que el peso.



La aceleración, aplicando la segunda ley de Newton, es:

$$\vec{a} = \frac{\Sigma\vec{F}}{m} = \frac{-0{,}053\,\vec{j}}{0{,}005} = -10{,}6\,\vec{j}\ \ m.s^{-2}$$

Como puedes ver, se trata de un movimiento exactamente igual al que tiene una piedra cuando se lanza horizontalmente. El vector velocidad que actúa sobre la partícula y su vector de posición, teniendo en cuenta que la velocidad inicial es $\vec{v}_o = 0{,}2\vec{i}$ y que la posición inicial es (0,0), es decir $\vec{r}_o = 0\vec{i} + 0\,\vec{j}$

$$\vec{v} = \int \vec{a}\,dt = \int -10{,}6\,\vec{j}\,dt = -10{,}6t\,\vec{j} + \vec{v}_o = 0{,}2\,\vec{i} - 10{,}6t\,\vec{j}$$

$$\vec{r} = \int \vec{v}\,dt = \int (0{,}2\,\vec{i} - 10{,}6t\,\vec{j})dt = 0{,}2t\,\vec{i} - 5{,}3t^2\,\vec{j} + \vec{r}_o = 0{,}2t\,\vec{i} - 5{,}3t^2\,\vec{j}$$

La ecuación de la trayectoria en forma paramétrica y en forma normal es:

$$\left.\begin{array}{l} x = 0{,}2t \\ y = -5{,}3t^2 \end{array}\right\} \text{ eliminando el parámetro t } \rightarrow \quad y = -132{,}5\ x^2$$

Energía: La partícula se mueve espontáneamente en el seno de un campo eléctrico y otro gravitatorio y naturalmente lo hace hacia la posición en que la energía potencial (suma de la Ep eléctrica y Ep gravitatoria) es menor.

Como ambos campos son conservativos $\Delta Ec\uparrow + \Delta Ep\downarrow = 0$, la disminución de energía potencial de la partícula, es igual al aumento de la energía cinética que adquiere. La velocidad de la partícula depende del tiempo y aumenta con él ($\vec{v} = 0{,}2\,\vec{i} - 10{,}6t\,\vec{j}$), por tanto en el punto final B la energía cinética es mayor y la potencial menor.

b) El trabajo realizado por el campo eléctrico, de acuerdo con la definición de trabajo, y teniendo en cuenta que al cabo de 5 seg, la partícula estará en la posición:

$$\vec{r} = 0{,}2t\,\vec{i} - 5{,}3t^2\,\vec{j}\Big|_{t=5} = 1\,\vec{i} - 132{,}5\,\vec{j}$$

$$W_{A(0,0)\rightarrow B(1,-132,5),CampoEle} = \int_A^B \vec{F}_{Elec} \bullet d\vec{r} = \int_A^B -0{,}003\vec{j} \bullet (dx\,\vec{i} + dy\vec{j}) = \int_A^B -0{,}003dy =$$
$$= \left|-0{,}003y\right|_{y_A=0}^{y_B=-132,5} = -0{,}003 \cdot -132{,}5 = +0{,}3975J$$

El trabajo realizado por el campo para llevar la partícula del punto A al B es igual a menos la variación de energía potencial entre esos puntos, es decir que :

$$W_{A\rightarrow B,CampoEle} = Ep_{A,Ele} - Ep_{B,Ele} = +0{,}3975J = -\Delta Ep_{eléctr}$$

Como puede verse, y como ya habíamos razonado en el apartado anterior, la energía potencial inicial de la partícula es mayor que la final, de ahí que el trabajo que hace el campo sea positivo.

Si hacemos exactamente lo mismo para calcular el trabajo realizado por la fuerza peso:

$$W_{A(0,0)\rightarrow B(1,-132,5),CampoGrav} = \int_A^B \vec{F}_{Grav} \bullet d\vec{r} = \int_A^B -0{,}05\,\vec{j} \bullet (dx\,\vec{i} + dy\vec{j}) = \left|-0{,}05y\right|_{y_A=0}^{y_B=-132,5} = +6{,}625J$$

$$W_{A\rightarrow B,CampoGrav} = Ep_{A,Grav} - Ep_{B,Grav} = +6{,}625J = -\Delta Ep_{gravit}$$

Si aplicamos la conservación de la energía entre los puntos A y B: $\Delta Ec + \Delta Ep = 0$

$$\underbrace{\frac{1}{2}0{,}005\,(v_B^2 - 0{,}2^2)}_{\Delta Ec} + \underbrace{(-0{,}3975 - 6{,}625)}_{\Delta Ep} = 0 \quad \rightarrow \quad v_B = 53{,}000377\,m/s$$

Podemos hacer una comprobación calculando el valor de la velocidad en el punto B a partir de la ecuación de la velocidad, ya que para el momento t=5 seg.

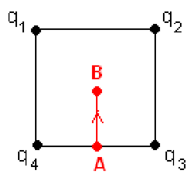
$$\vec{v}_B = 0{,}2\,\vec{i} - 10{,}6t\,\vec{j}\Big|_{t=5seg} = 0{,}2\,\vec{i} - 53\vec{j} \quad \rightarrow \quad v_B = \sqrt{0{,}2^2 + 53^2} = 53{,}000377\,m/s$$

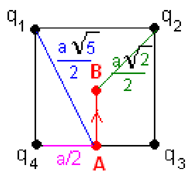
Ejemplo:
Cuatro cargas eléctricas q_o se encuentran en los vértices de un cuadrado de lado *a*. ¿Qué trabajo hay que realizar para llevar una quinta carga q_o desde A hasta B. Véase la figura.

Sencillamente lo que hay que hacer es calcular el potencial en los puntos A y B y luego tener en cuenta que el trabajo que hacemos nosotros para llevar la carga q_o es igual al valor de la carga por la ddp entre esos puntos:

$$W_{A\to B,nosotros} = q_o(V_B - V_A)$$

Vamos ahora con las operaciones, y para poder distinguir las cargas, porque son iguales, mejor las llamaremos con nombres diferentes. Las distancias entre las cargas y los puntos son fáciles de calcular aplicando el teorema de Pitágoras.





$$V_A = K\left[\frac{q_1}{r_{1A}}+\frac{q_2}{r_{2A}}+\frac{q_3}{r_{3A}}+\frac{q_4}{r_{4A}}\right] = K\left[\frac{q_o}{\frac{a\sqrt{5}}{2}}+\frac{q_o}{\frac{a\sqrt{5}}{2}}+\frac{-q_o}{\frac{a}{2}}+\frac{-q_o}{\frac{a}{2}}\right] = \frac{Kq_o(4\sqrt{5}-20)}{5a}$$

fíjate que si hiciéramos operaciones, el potencial en el punto A es negativo, porque $(4\sqrt{5}-20)$ es negativo.

$$V_B = K\left[\frac{q_1}{r_{1B}}+\frac{q_2}{r_{2B}}+\frac{q_3}{r_{3B}}+\frac{q_4}{r_{4B}}\right] = K\left[\frac{q_o}{\frac{a\sqrt{2}}{2}}+\frac{q_o}{\frac{a\sqrt{2}}{2}}+\frac{-q_o}{\frac{a\sqrt{2}}{2}}+\frac{-q_o}{\frac{a\sqrt{2}}{2}}\right] = 0$$

El trabajo que nosotros tenemos que hacer para llevar una carga q_o desde el punto A hasta el B será:

$$W_{A\to B,nosotros} = q_o(V_B - V_A) = q_o\left(0-\frac{Kq_o(4\sqrt{5}-20)}{5a}\right) = -\frac{Kq_o^2(4\sqrt{5}-20)}{5a} = +$$

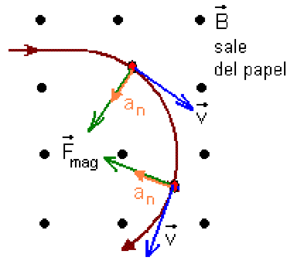
El trabajo que hacemos es positivo indica que realmente debemos hacer trabajo para llevar la carga q_o desde A hasta B. Efectivamente era de esperar puesto que, si te fijas en la distribución de cargas, nunca la carga se moverá hacia B de forma espontánea, ya que está siendo atraída por las cargas negativas y sería repelida por las dos positivas de arriba.

CAMPO MAGNÉCTICO

E1B.S2009
Un protón tiene una energía cinética de $2\cdot 10^{-12}$ J y se mueve, en una región donde existe un campo magnético de 0,6 T, en dirección perpendicular a su velocidad.
a) Razone con ayuda de un esquema la trayectoria del protón y calcule el periodo de su movimiento.
b) ¿Cómo variarán las características de su movimiento si la energía cinética se redujera a la mitad? $m_p=1{,}7\cdot 10^{-27}$ Kg ; $e=1{,}6\cdot 10^{-19}$ C

a) De acuerdo con la expresión de Lorentz $\vec{F}_{mag} = q\vec{v}\wedge\vec{B}$ y de la definición de producto vectorial de vectores, la fuerza que actuará sobre el protón será perpendicular al plano formado por los vectores $\vec{v}$ y $\vec{B}$. Como ambos vectores tienen dirección perpendicular, el módulo de la fuerza tendrá el valor máximo, ya que $F_{mag} = qvB\,\mathrm{sen}90 = qvB$

Al moverse el protón con una velocidad $\vec{v}$ y estar sometido a una fuerza $\vec{F}$ en dirección perpendicular, de cuerdo con la segunda ley de Newton, dará lugar a una aceleración normal que, como sabemos, es responsable de los cambios en dirección de la velocidad. Como la aceleración normal es constante $a_n = qvB/m$ el resultado será un movimiento circular y además uniforme porque no hay aceleración tangencial.



Puesto que el movimiento es circular y uniforme, podremos decir que tarda el mismo tiempo en dar cada vuelta, es decir, que se trata de un movimiento periódico y el periodo precisamente es eso, el tiempo en dar una vuelta.

Esta vez, para variar, vamos a resolver el problema desde el punto de vista de un observados inercial, es decir que está quieto en el centro de la trayectoria. Para él la fuerza normal, que hace cambiar de dirección de la velocidad, será igual a la fuerza magnética:

$$F_n = F_{mag} \quad\Rightarrow\quad m\frac{v^2}{r} = qvB \qquad \text{como} \quad v = \omega r = \frac{2\pi r}{T}$$

despejando:

$$T = \frac{2\pi m}{qB} = \frac{2\pi\cdot 1{,}7\cdot 10^{-27}}{1{,}6\cdot 10^{-19}\cdot 0{,}6} = 1{,}1\cdot 10^{-7}\,\mathrm{seg}$$

como puedes ver, el periodo de revolución de una partícula que gira en un campo magnético es independiente de la velocidad y del radio de la trayectoria, que es precisamente lo que hace posible el funcionamiento del ciclotrón.

b) Como hemos razonado en la primera parte el periodo es independiente de la velocidad, de manera que un cambio en la energía cinética de la partícula no afectaría al periodo, sin embargo si que influiría en el radio de la trayectoria, ya que como se deduce al igualar las fuerzas:

$$r = \frac{mv}{qB}$$

por tanto si:

$$\frac{Ec}{Ec'} = 2 = \frac{\frac{1}{2}mv^2}{\frac{1}{2}mv'^2} \qquad \Rightarrow \qquad v' = \frac{v}{\sqrt{2}}$$

y por tanto al radio de la trayectoria en el caso de que la energía cinética se reduzca a la mitad será $\sqrt{2}$ veces menor:

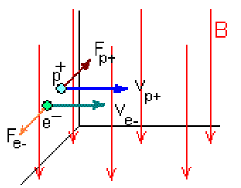
$$r' = \frac{mv'}{qB} = \frac{mv}{qB\sqrt{2}} = \frac{r}{\sqrt{2}}$$

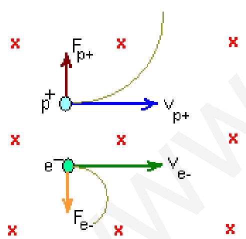
La aceleración normal, como puedes deducir, será $a_n' = a_n / \sqrt{2}$

E2A.S2009

a) Enuncie la ley de Lorentz y razone, a partir de ella, las características de la fuerza magnética sobre una carga.
b) En una región del espacio existe un campo magnético uniforme, vertical y dirigido hacia abajo. Se disparan horizontalmente un electrón y un protón con igual velocidad. Compare, con ayuda de un esquema, las trayectorias descritas por ambas partículas y razone cuales son sus diferencias.

a) Teoría
b) Vamos a dibujar el esquema girándolo 90º para que se vea mejor:





- Como la fuerza de Lorentz viene dada por $\vec{F}_{mag} = q\,\vec{v} \wedge \vec{B}$ es evidente que la fuerza que actúa sobre el protón y la que actúa sobre el electrón son iguales en módulo (si ambos tienen la misma velocidad), pero tienen distinto sentido, porque en el primer caso la carga, que es un escalar, es positiva y para el electrón negativa

- Como la fuerza, de acuerdo con la definición de producto vectorial, debe estar en el plano perpendicular al formado por los vectores $\vec{v}$ y $\vec{B}$ resulta que se trata de una fuerza normal a la velocidad y en consecuencia producirá cambios en su dirección y como tienen un módulo constante, el resultado es que le hará girar con un movimiento circular y uniforme.
- El radio de la trayectoria, que puede obtenerse, desde el punto de vista de un SRNI, igualando la fuerza magnética y la centrífuga, resulta ser:

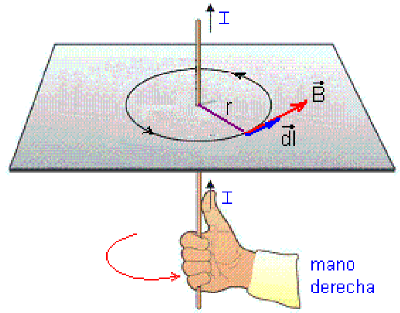
$$qvB = m\frac{v^2}{r} \qquad \Rightarrow \qquad r = \frac{mv}{qB}$$

- Como vemos, el radio es directamente proporcional a la masa de la partícula, así que al ser la masa del protón unas 1800 veces mayor que la del electrón, el radio de su trayectoria también será ese número de veces mayor que para el electrón.

E2B.S2009

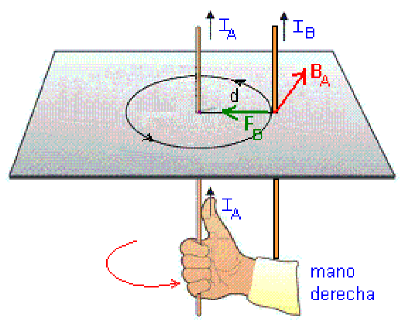
Por dos conductores rectilíneos, paralelos, muy largos, separados 0,2 m circulan corrientes de la misma intensidad y sentido.
a) Razone qué fuerzas se ejercen entre ambos conductores y determine el valor de la intensidad de corriente que debe circular por cada conductor para que la fuerza por unidad de longitud sea de $2{,}25\cdot10^{-6}$ N m^{-1}. b) Razone cómo depende dicha fuerza de la distancia de separación de los conductores y del sentido de las corrientes. $\mu_o = 4\pi\,10^{-7}$ T m A^{-1}

a) Un conductor por el que circula una corriente crea un campo magnético, cuyas líneas son circunferencias concéntricas situadas en el plano perpendicular al conductor y cuyo sentido viene dado por la regla del tornillo que avance como la corriente, tal como se muestra en la figura. A una distancia d vale:



$$B = \frac{\mu_o I}{2\pi \cdot d}$$

El otro conductor, por el que circula también una corriente I, se encuentra en el seno del campo magnético creado por el primer conductor y por tanto sobre él aparecerá una fuerza que viene dada por la ley de Laplace: $\vec{F} = I \cdot \vec{L} \wedge \vec{B}$ tal como se muestra en la figura:



$$F = I L B = I L \frac{\mu_o I}{2\pi d}$$

$$F/L = \frac{\mu_o I \cdot I}{2\pi d} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot I^2}{2\pi \cdot 0{,}2} = 2{,}25 \cdot 10^{-6}$$

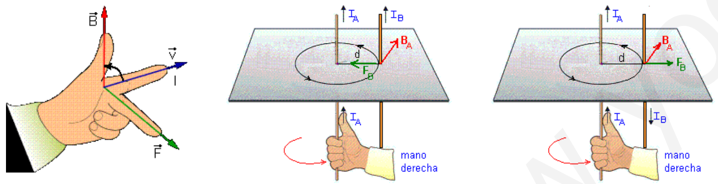
$$I = 1{,}5 Amp$$

b) Puesto que la fuerza que actúa sobre el segundo conductor viene dada por $\vec{F} = I_2 \vec{L}_2 \wedge \vec{B}_1$ es evidente que:

- Depende del valor del campo magnético $\vec{B}_1$ que existe en el punto P, a una distancia *d* del primer conductor. Como vemos el valor del campo (creado por el conductor1) es inversamente proporcional a la distancia, así que disminuye linealmente conforme separamos los conductores:

$$B_1 = \frac{\mu_o I_1}{2\pi \cdot d}$$

- Depende del sentido de I_2, respecto del sentido de I_1, que es quien da sentido al vector $\vec{L}_2$.
  De acuerdo con la definición de producto vectorial, la fuerza sobre el segundo conductor estará en un plano perpendicular al que forman los vectores $\vec{L}_2$ y $\vec{B}_1$, y su sentido vendrá dado por la regla del tornillo que gire como lo haría el primer vector para coincidir con el segundo por el camino mas corto, o bien aplicando la regla de la mano izquierda. Así:

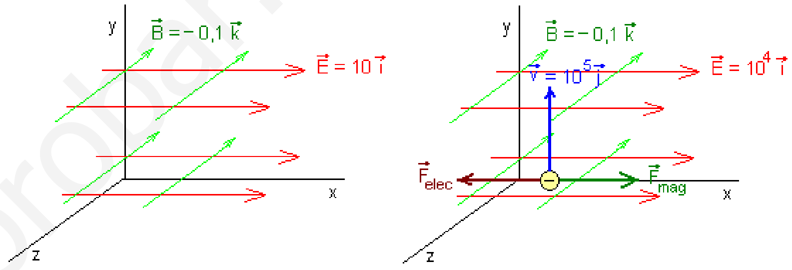


El mismo razonamiento se puede hacer para obtener la fuerza que el segundo conductor ejerce sobre el primero, llegando a la misma conclusión, como es natural, ya que se tratan de fuerzas de acción y reacción

E3A.S2009

Un electrón con una velocidad $\vec{v} = 10^5 \vec{j}$ m s^{-1} penetra en una región del espacio en la que existen un campo eléctrico $\vec{E} = 10^4 \vec{i}$ N C^{-1} y un campo magnético $\vec{B} = -0{,}1\vec{k}$ T

a) Analice, con la ayuda de un esquema, el movimiento que sigue el electrón. b) En un instante dado se suprime el campo eléctrico. Razone cómo cambia el movimiento del electrón y calcule las características de su trayectoria. e=1,6·10^{-19} C ; m$_e$=9,1·10^{-31} Kg



a) El campo eléctrico ejerce una fuerza sobre el electrón $\vec{F}_{elec} = q\vec{E}$ que, al tratarse de un vector por un escalar, tiene la misma dirección del campo y sentido opuesto porque la carga del electrón es una magnitud negativa. En la figura se ha dibujado en dirección $-\vec{i}$

$$\vec{F}_{elec} = q\vec{E} = -1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 10^4\,\vec{i} = -1{,}6 \cdot 10^{-15}\,\vec{i}\ N$$

El campo magnético ejerce una fuerza sobre el electrón $\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$ que será (de acuerdo con la definición de producto vectorial) perpendicular al plano formado por $\vec{v}$ y $\vec{B}$, es decir tendrá dirección del eje X. Su sentido el de un sacacorchos que gire como $\vec{v}$ para coincidir con $\vec{B}$ por el camino mas corto, aunque en este caso al tratarse de un electrón tiene sentido opuesto, así que tendrá dirección y sentido de $\vec{i}$ (Al mismo resultado llegaríamos aplicado la regla de la mano izquierda) y tenido en cuenta que el producto vectorial de los vectores unitarios $\vec{j} \wedge \vec{k} = \vec{i}$

$$\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B} = -1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 10^5\,\vec{j} \wedge (-0{,}1\vec{k}) = 1{,}6 \cdot 10^{-15}\,\vec{j} \wedge \vec{k} = 1{,}6 \cdot 10^{-15}\,\vec{i}\ N$$

La fuerza resultante sobre el electrón será la suma vectorial de ambas fuerzas, y como tienen el mismo módulo, la misma dirección y sentidos opuestos darán una resultante nula, de manera que el electrón se moverá con un movimiento rectilíneo y uniforme.

b) Si se suprime el campo eléctrico actuará solo la fuerza debida al campo magnético, que como tiene módulo constante y es normal a la velocidad dará lugar a un movimiento circular uniforme en el plano XY. Dibuja el esquema con las fuerzas que actúan sobre el electrón y calcula el radio de la trayectoria $R = 5{,}69 \cdot 10^{-6}\,m$ y el periodo $T = 3{,}6 \cdot 10^{-10}\,s$

E4B.S2009

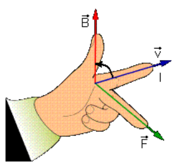
a) Razone cómo podría averiguar, con la ayuda de una carga, si en una región del espacio existe un campo eléctrico o un campo magnético

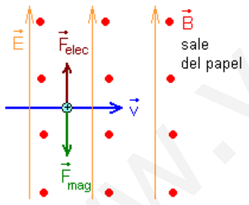
b) Un haz de protones atraviesa sin desviarse una zona en la que existen un campo eléctrico y uno magnético. Razone qué condiciones deben cumplir esos campos.

a) Si sabemos con certeza que existe un campo eléctrico o un campo magnético, la maneras mas sencilla es simplemente dejando un cuerpo cargado en reposo, ya que sobre la carga actuará una fuerza $\vec{F} = q\vec{E}$ si existe un campo eléctrico y no actuaría ninguna fuerza si hubiera uno magnético, ya que para que aparezca la fuerza de Lorentz, $\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$, la carga debería estar en movimiento (más exactamente, como se deduce de la expresión: en movimiento y que su velocidad no tenga la dirección del campo magnético, porque su producto vectorial sería nulo)

b) Obviamente para que el protón no se desvíe la suma de las fuerzas sobre él debe ser cero, lo que quiere decir el la fuerza magnética de Lorentz debe compensar a la fuerza eléctrica, y por tanto las dos fuerzas además de ser iguales en módulo deben tener la misma dirección y sentidos opuestos.

La dirección de la fuerza eléctrica es la del campo eléctrico, ya que $\vec{F} = q\vec{E}$ y además tienen el mismo sentido porque el protón tienen carga positiva.
La dirección de la fuerza magnética es perpendicular al plano formado por $\vec{v}$ y $\vec{B}$ ya que viene dada por $\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$. Aplicando la regla de la mano izquierda y suponiendo que el campo magnético sale del papel y el protón se mueve hacia la derecha, tendríamos:





- Como vemos en la figura, si el protón tiene dirección $\vec{i}$, el campo eléctrico debe tener dirección $\vec{j}$ y el campo magnético dirección $\vec{k}$
- Su módulos deben ser iguales, así que deben guardar la relación:

$$qE = qvB \qquad \Rightarrow \qquad v = \frac{E}{B}$$

E2A.S2007

a) Explique el efecto de un campo magnético sobre una partícula cargada en movimiento.

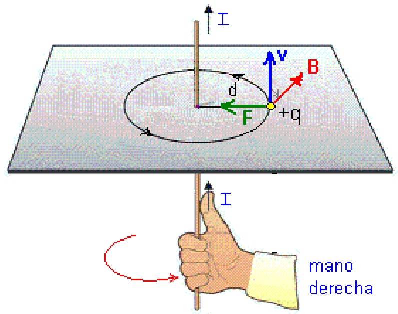
b) Explique con ayuda de un esquema la dirección y sentido de la fuerza que actúa sobre una partícula con carga positiva que se mueve paralelamente a una corriente eléctrica rectilínea ¿Y si se mueve perpendicularmente al conductor, alejándose de él?

a) Teoría

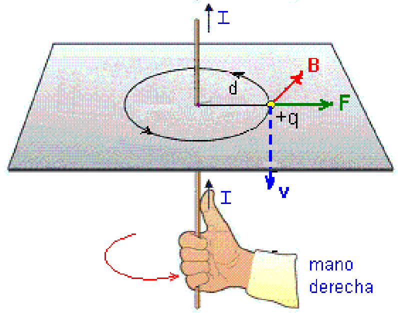
b1) La corriente crea a su alrededor un campo magnético. Las líneas de campo son circunferencias concéntricas situadas en el plano normal al conductor y en el sentido que cerramos la mano derecha mientras apuntamos con el pulgar en el sentido de la corriente. La dirección y sentido de $\vec{B}$ es la tangente a esas líneas, por definición, tal como se dibuja en las figuras.

Una vez que hemos determinado la dirección y sentido del campo creado por la corriente, la carga al moverse estará sometida a una fuerza, que viene dada por la ley de Lorentz $\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$

En el caso de que la carga positiva se mueva paralela al conductor por el que circula una corriente eléctrica, pueden ocurrir dos casos: Que se mueva en el mismo sentido de la corriente o que se mueva en sentido contrario



En el caso de que la carga positiva se mueva paralela a la corriente y además en el mismo sentido de la corriente la fuerza es atractiva como puede verse aplicando la regla de la mano izquierda o simplemente la definición de producto vectorial. (Realmente tenemos el mismo caso de dos conductores paralelos por los que circulan corrientes en el mismo sentido)



Si la carga se mueve en sentido contrario a la corriente, como vemos razonando igual, la fuerza es repulsiva.

Fíjate que en ambos casos la fuerza mantiene siempre esa dirección y sentido, aunque varía el módulo, porque al acercarse al conductor, o alejarse, el campo magnético aumenta o disminuye. Recuerda que el campo creado por un conductor por el que circula una corriente *I*, a una distancia *d* viene dado por: $B = \mu_o I / 2\pi \cdot r$

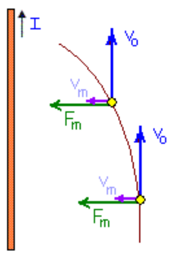
Así que la fuerza sobre la carga positiva, que se mueve con velocidad v_o paralela al conductor será:

$$F_{mag} = qvBsen\alpha = qvB = qv_o \frac{\mu_o I}{2\pi r}$$

y la aceleración sería:

$$a_{mag} = \frac{F_{mag}}{m} = qv_o \frac{\mu_o I}{2\pi r m}$$

Como esa fuerza tiene siempre la misma dirección y sentido, y lo es perpendicular a la velocidad, estaríamos en un movimiento muy parecido a que describiría una piedra que lanzamos horizontalmente, donde está sometida a una fuerza (el peso) siempre normal a la dirección de la velocidad, solo que en este caso esa fuerza varía en módulo al acercarse o alejarse del hilo conductor. En cualquier caso la carga describiría una rama de parábola.

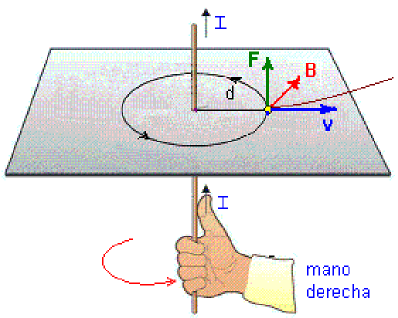


La velocidad resultante sobre la carga, en el sistema de referencia de la figura, sería:

$$\vec{v} = -v_{mag}\,\vec{i} + v_o\,\vec{j} = -a_{mag}\,t\,\vec{i} + v_o\,\vec{j}$$

$$\vec{v} = -\left(qv_o \frac{\mu_o I}{2\pi r}\right) t\,\vec{i} + v_o\,\vec{j}$$

b2) En el caso de que la carga se mueva perpendicularmente al conductor, alejándose de él, tendríamos, razonando como antes que:



Como vemos, en este caso, la fuerza es paralela al hilo y tiene el sentido de la corriente, aunque su módulo disminuya conforme se aleja del hilo. La trayectoria que seguirá será también una especie de rama de parábola.

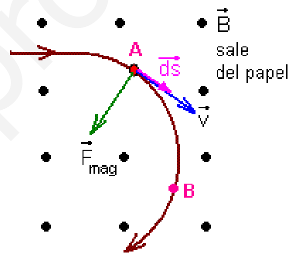
E5B.S2007

a) Fuerza magnética sobre una carga en movimiento.

b) Una partícula, con carga q, penetra en una región en la que existe un campo magnético perpendicular a la dirección del movimiento. Analice el trabajo realizado por la fuerza magnética y la variación de energía cinética de la partícula.

a) Teoría

b) De acuerdo con la ley de Lorentz, $\vec{F} = q\,\vec{v} \wedge \vec{B}$ la fuerza magnética siempre es perpendicular al plano que forman los vectores $\vec{v}$ y $\vec{B}$, por tanto la fuerza es siempre perpendicular a la trayectoria de la partícula. (Da igual que la velocidad sea normal al campo, porque siempre, de acuerdo con la definición de producto vectorial de dos vectores $\vec{F}$ será un vector perpendicular al plano que forman los vectores $\vec{v}$ y $\vec{B}$, aunque de módulo más pequeño, según el valor del ángulo que formen $\vec{v}$ y $\vec{B}$, ya que $F_{mag} = q\,v\,B\,sen\alpha$.)



El trabajo que hace la fuerza magnética para llevar la carga desde el punto A hasta el punto B, de acuerdo con la definición de trabajo, es nulo porque se trata del producto escalar de dos vectores perpendiculares:

$$W_{A\rightarrow B,camp.mag} = \int_A^B \vec{F}_{mag} \bullet d\vec{s} = 0$$

De acuerdo con el teorema del trabajo y la energía cinética o teorema de las fuerzas vivas, como el trabajo realizado por la fuerza F para llevar el cuerpo desde un punto A hasta otro B es igual a la variación de energía cinética entre esos puntos

$$W_{A\rightarrow B,\text{Todas las fuerzas}} = \Delta Ec$$

Si el trabajo es cero, la energía cinética no varía y por tanto la velocidad en toda la trayectoria es la misma.

Podemos llegar a la misma conclusión teniendo en cuanta que la $\vec{F}_{mag}$ es normal a la velocidad y por tanto solo produce cambios en la dirección de la velocidad, de ahí que le haga girar, pero no produce variaciones en el módulo $\Rightarrow \Delta Ec=0$.

E1A.S2007

Una cámara de niebla es un dispositivo para observar trayectorias de partículas cargadas. Al aplicar un campo magnético uniforme, se observa que las trayectorias seguidas por un protón y un electrón son circunferencias.

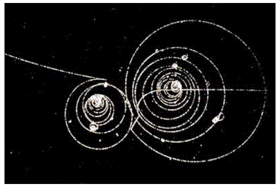
a) Explique por qué las trayectorias son circulares y represente en un esquema el campo y las trayectorias de ambas partículas.

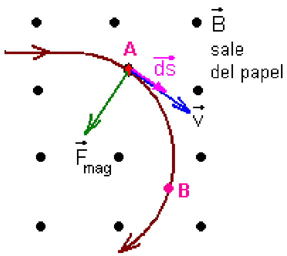
b) Si la velocidad angular del protón es $\omega_p = 10^6$ rad s^{-1}, determine la velocidad angular del electrón y la intensidad del campo magnético.

$e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C; $m_e = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ kg; $m_p = 1{,}7 \cdot 10^{-27}$kg

a) Teoría

b) Una cámara de niebla es simplemente una caja cerrada que contiene vapor de agua superenfriado y supersaturado. Cuando una partícula cargada de suficiente energía interacciona con el vapor, lo ioniza y da lugar a pequeñas gotas de agua que dan lugar a una niebla, con lo que se produce un rastro a lo largo de su trayectoria similar al de los aviones reactores.





Desde el punto de vista de un observador no inercial, teniendo en cuenta que la fuerza normal o centrípeta en este caso es la fuerza magnética de Lorentz y que la $v = \omega R$

$$F_{mag} = m\frac{v^2}{R} = q\,vB \qquad \Rightarrow \qquad m\,\omega = q\,B$$

Al tener el protón y el electrón la misma carga en valor absoluto y al ser el campo de la cámara el mismo en ambos casos, podemos poner que:

$$m_p\omega_p = m_e\omega_e \qquad \Rightarrow \qquad \omega_e = \frac{m_p\omega_p}{m_e} = \frac{1{,}7\cdot 10^{-27}\cdot 10^6}{9{,}1\cdot 10^{-31}} = 1{,}9\cdot 10^9\,\text{rad/seg}$$

De la relación anterior podemos deducir el valor del campo magnético:

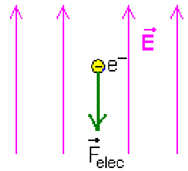
$$m\,\omega = q\,B \qquad \Rightarrow \qquad B = \frac{m_p\omega_p}{q} = \frac{1{,}7\cdot 10^{-27}\cdot 10^6}{1{,}6\cdot 10^{-19}} = 0{,}01\text{Tesla}$$

E4A.S2007

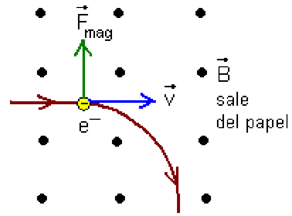
Un haz de electrones penetra en una zona del espacio en la que existen un campo eléctrico y otro magnético.

a) Indique, ayudándose de un esquema si lo necesita, qué fuerzas se ejercen sobre los electrones del haz. b) Si el haz de electrones no se desvía, ¿se puede afirmar que tanto el campo eléctrico como el magnético son nulos? Razone la respuesta.

a) El campo eléctrico ejerce una fuerza sobre el electrón $\vec{F}_{elec} = q\vec{E}$ que como puede verse en la expresión tiene la misma dirección del campo, aunque en este caso al tratarse de un electrón tiene sentido opuesto, ya que *q* es una magnitud negativa.



El campo magnético ejerce una fuerza sobre el electrón, siempre que se mueva, dada por la ley de Lorentz, $\vec{F} = q\,\vec{v}\wedge\vec{B}$ que como puede verse será (de acuerdo con la definición de producto vectorial) perpendicular al plano formado por $\vec{v}$ y $\vec{B}$, es decir tendrá dirección del eje Z. Su sentido el de un sacacorchos que gire como $\vec{v}$ para coincidir con $\vec{B}$ por el camino mas corto, aunque en este caso al tratarse de un electrón tiene sentido opuesto.



Un campo eléctrico siempre ejercerá una fuerza sobre una carga, el electrón en este caso, mientras que el campo magnético lo hará solo en el caso en que la carga esté en movimiento. (y por supuesto en el caso en que $\vec{v}$ y $\vec{B}$ no tengan la misma dirección, porque su producto vectorial sería nulo)

b) Si existen a la vez ambos campos, la fuerza resultante sobre el electrón será la suma vectorial de ambas fuerzas. Cuando el campo eléctrico y el magnético sean perpendiculares, las fuerzas eléctrica y magnética tendrían la misma dirección y sentidos opuestos, pudiendo dar resultante nula en el caso en que tengan el mismo módulo, lo que ocurrirá cuando v=E/B

$$F_{elec} = F_{mang} \qquad \Rightarrow \qquad q\,E = q\,vB \qquad \Rightarrow \qquad v = \frac{E}{B}$$

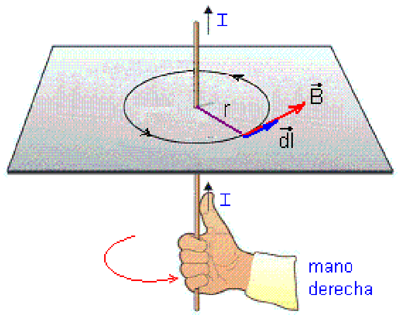
E4B.S2007

Por un conductor rectilíneo muy largo, apoyado sobre un plano horizontal, circula una corriente de 150 A.

a) Dibuje las líneas del campo magnético producido por la corriente y calcule el valor de dicho campo en un punto situado en la vertical del conductor y a 3 cm de él.

b) ¿Qué corriente tendría que circular por un conductor, paralelo al anterior y situado a 0,8 cm por encima de él, para que no cayera, si la masa por unidad de longitud del conductor es de 20 g·m^{-1}? DATOS $\mu_0 = 4\pi\cdot 10^{-7}$ T m A^{-1}; g = 10 m s^{-2}

a) La expresión del campo magnético creado por una corriente rectilínea a una distancia *r* del conductor se calcula fácilmente a partir de la ley de Ampere:



$$\oint \vec{B} \bullet d\vec{l} = \mu_o I$$

$$\oint B \cdot dl \cdot \cos 0 = \mu_o I$$

$$B \oint dl = \mu_o I$$

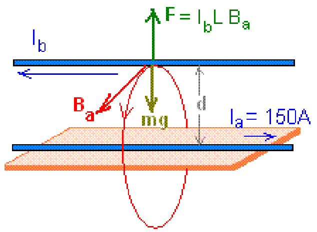
$$B \cdot 2\pi \cdot r = \mu_o I$$

$$B = \frac{\mu_o I}{2\pi r} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 150}{2\pi \cdot 0{,}03} = 10^{-3} T$$

b) Para compensar el peso del hilo, la fuerza magnética debe ser repulsiva y por tanto por los dos conductores debe circular la corriente en sentido contrario, como se muestra en la figura. La fuerza que el campo magnético creado por el conductor A ejerce sobre el otro hilo, por el que circula una corriente I_B, es:

$$F_{mag} = I_B L B_A = I_B L \frac{\mu_o I_A}{2\pi \cdot r} = \frac{\mu_o I_A I_B}{2\pi r} L$$

Para que el sistema esté en equilibrio $F_{mag} = F_{peso} \Rightarrow \frac{\mu_o I_A I_B}{2\pi r} L = mg$ y como en lugar de la masa nos dan la masa por unidad de longitud, es decir m/L



$$\frac{\mu_o I_A I_B}{2\pi r} = \frac{m}{L} g$$

$$\frac{4\pi 10^{-7} \cdot 150 \cdot I_B}{2\pi 0{,}008} = 0{,}02 \cdot 10$$

$$I_B = 53{,}3 Amp$$

E6A.S2007

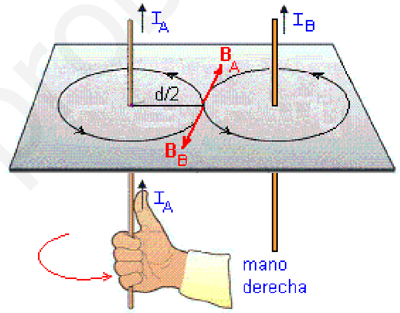
Por dos conductores rectilíneos y de gran longitud, dispuestos paralelamente, circulan corrientes eléctricas de la misma intensidad y sentido.

a) Dibuje un esquema, indicando la dirección y el sentido del campo magnético debido a cada corriente y del campo magnético total en el punto medio de un segmento que una a los dos conductores y coméntelo.

b) Razone cómo cambiaría la situación al duplicar una de las intensidades y cambiar su sentido.

a) Las líneas de campo magnético son circunferencias concéntricas al conductor y su sentido es el que nos da la forma en que cerramos la mano derecha mientras el pulgar apunta en el sentido de la corriente, o el del avance de un tornillo. El campo magnético, por definición es tangente a esas líneas

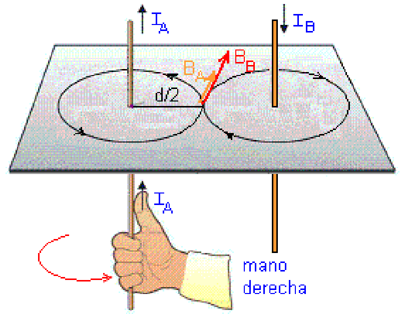
Como puede verse en la figura, el campo creado por cada conductor tienen la misma dirección y sentidos opuestos, y como por ambos circula la misma corriente y distan lo mismo del conductor sus módulos son iguales, así que dan resultante nula.



$$B_A = \frac{\mu_o I_A}{2\pi r} \qquad B_B = \frac{\mu_o I_B}{2\pi r}$$

Como $I_A = I_B$ y la distancia *r* es la misma $B_A = B_B$ y al ser vectores de la misma dirección y sentidos opuestos dan resultante nula.

b) Al cambiar una de las corrientes de sentido, por ejemplo la B en la figura, como vemos hace que el campo creado por ambos conductores tenga misma la dirección y el mismo sentido, con lo que se refuerzan.



$$B_A = \frac{\mu_o I_A}{2\pi r} \qquad B_B = \frac{\mu_o I_B}{2\pi r} = \frac{\mu_o 2 I_A}{2\pi r}$$

Obviamente el campo total, que es la suma vectorial de ambos, al tener la misma dirección y sentido es $B = B_A + B_B = 3B_A$

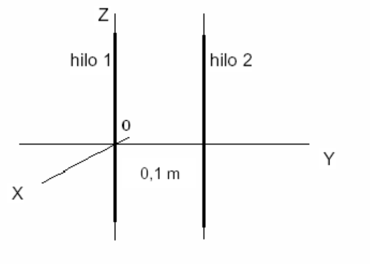
E5A.S2010

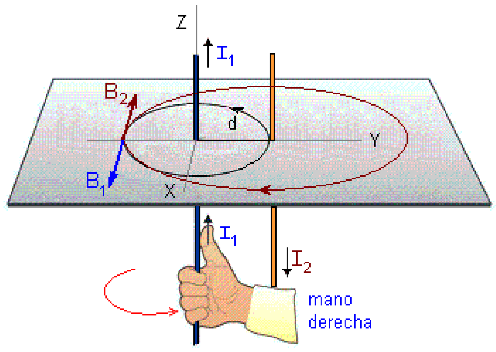
Considere los dos hilos conductores rectilíneos e indefinidos mostrados en la figura. Por el hilo 1 circula una corriente de intensidad I_1= 10 A dirigida en el sentido positivo del eje Z.

a) Determine el sentido de la corriente en el hilo 2 y el valor de su intensidad si el campo magnético es cero en un punto del eje Y situado 0,1 m a la izquierda del hilo 1.

b) Razone cuál sería el campo magnético en un punto del eje Y situado 0,1 m a la derecha del hilo 2, si por éste circulara una corriente del mismo valor y sentido que por el hilo 1.

$\mu_o = 4\pi \cdot 10^{-7}$ T m A^{-1}





El campo que creado por un hilo, por el que circula una corriente I, teniendo en cuenta la ley de Ampere $\oint \vec{B} \bullet d\vec{l} = \mu_o I$ e integrando a través de una trayectoria cerrada como una circunferencia de radio *r* alrededor del hijo, resulta: $B = \mu_o I / 2\pi r$

a) El campo magnético creado por el hijo1 a 0,1 m a su izquierda es $B_1 = \dfrac{\mu_o I_1}{2\pi\, r_1}$ y como puede verse en la figura tiene dirección +X. Para que el campo resultante en ese punto sea nulo es preciso que el que origina el conductor2 tenga el mismo módulo, dirección y sentido contrario, y para ello como puede verse en la figura la corriente en el conductor2 debe circular en sentido opuesto (–Z). Igualando los módulos:

$$B_1 = \frac{\mu_o I_1}{2\pi r_1} = \frac{\mu_o I_2}{2\pi r_2} = B_2 \quad \to \quad I_2 = \frac{I_1\, r_2}{r_1} = \frac{10 \cdot 0{,}2}{0{,}1} = 20\,\text{A}$$

b) Ahora por los dos hilos circula la misma corriente y en el mismo sentido. Si dibujas el campo creado por cada conductor a 0,1 m a la derecha del hijo2, verás que ahora los dos campos tienen la misma dirección y el mismo sentido, así que se refuerzan:

$$B_{Total} = B_1 + B_2 = \frac{\mu_o I_1}{2\pi r_1} + \frac{\mu_o I_2}{2\pi r_2} = \frac{\mu_o 10}{2\pi 0{,}2} + \frac{\mu_o 10}{2\pi 0{,}1} = 3 \cdot 10^{-5}\,\text{T}$$

E1A.S2010

Una espira circular de 5 cm de radio, inicialmente horizontal, gira a 60 rmp en torno a uno de sus diámetros en un campo magnético vertical de 0,2T.

a) Dibuje en una gráfica el flujo magnético a través de la espira en función del tiempo entre los instantes t=0 y t=2s e indique el valor máximo de dicho flujo.

b) Escriba la expresión de la fuerza electromotriz inducida en la espira en función del tiempo e indique su valor en el instante t=1s.

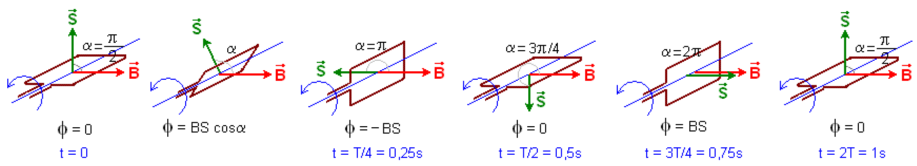
a) De acuerdo con la definición de flujo que atraviesa una superficie como producto escalar de la intensidad de campo por el vector superficie:

$$\phi = \vec{B} \bullet \vec{S} = BS \cdot \cos\alpha = BS \cdot \cos(\omega t + \varphi_o)$$

Como vemos, si el ángulo que forman $\vec{B}$ y $\vec{S}$ fuera constante el flujo también sería constante y no se induciría una fem en la espira. No obstante el ángulo, α, que forman las líneas de campo magnético con el vector superficie varía porque la espira se encuentra girando con una velocidad angular de $\omega = 60\,\text{rmp} = 60\dfrac{2\pi}{60}\text{rad.s}^{-1} = 2\pi\,\text{rad.s}^{-1}$

$\Rightarrow$ T=1seg

Ahora vamos a calcular el valor de φ_o teniendo en cuenta que para $t = 0$, $\phi = 0$, ya que en ese instante la espira está horizontal y por tanto $\vec{B} \perp \vec{S} \Rightarrow 0 = BS \cdot \cos(\omega \cdot 0 + \varphi_o) \Rightarrow \varphi_o = \pi/2$



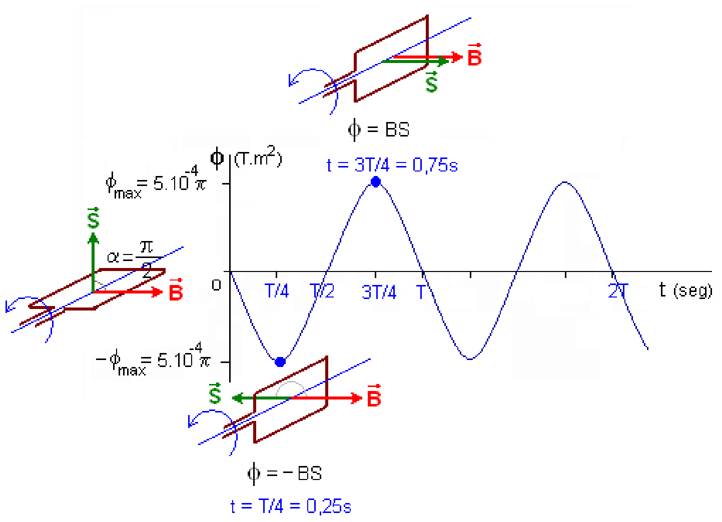
La ecuación del flujo, tenido en cuenta que $\cos(\alpha + \pi/2) = -\text{sen}\,\alpha$, será:

$$\phi = BS\cos(\omega t + \frac{\pi}{2}) = -BS\,\text{sen}\,\omega t$$

$$\phi = -0{,}2 \cdot \pi(0{,}05)^2\,\text{sen}\,2\pi t = -5 \cdot 10^{-4}\pi\,\text{sen}\,2\pi t \quad (\text{T} \cdot \text{m}^2)$$

Para representar el flujo a través de la espira en función del tiempo, $\phi = -5 \cdot 10^{-4}\pi \cdot \text{sen}\,2\pi t$, damos al tiempo valores de cuarto en cuarto de periodo, es decir cada 0,25s:

t (s)	0	T/4=0,25	T/2=0,5	3T/4=0,75	T=1	1,25	1,5	1,75	2,00
ϕ	0	$-5 \cdot 10^{-4}\pi$	0	$5 \cdot 10^{-4}\pi$	0	$-5 \cdot 10^{-4}\pi$	0	$5 \cdot 10^{-4}\pi$	0



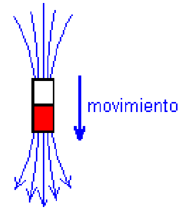
b) La f.e.m. inducida en la espira, según la ley de Faraday−Lenz:

$$e = -\frac{d\phi}{dt} = -\frac{d(-5\cdot 10^{-4}\pi\cdot \text{sen}\, 2\pi t)}{dt} = 5\cdot 10^{-4}\pi\cdot 2\pi\cdot \cos 2\pi t = 10^{-3}\pi^2 \cos 2\pi t$$

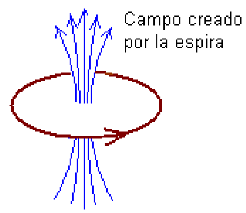
Como puede verse la f.e.m. inducida depende del tiempo y viene dada por una función sinusoidal, siendo la f.e.m. máxima $10^{-3}\pi^2$ voltios.

En el momento t=1 seg (que es precisamente el valor del periodo), será $10^{-3}\pi^2$ voltios.

E1B.S2008
Una espira circular de 0,5 m de radio está situada en una región en la que existe un campo magnético perpendicular a su plano, cuya intensidad varia de 0,3 T a 0,4 T en 0,12 s.
a) Dibuje en un esquema la espira, el campo magnético y el sentido de la corriente inducida y explique sus características.
b) Calcule la fuerza electromotriz inducida en la espira y razone cómo cambiaría dicha fuerza electromotriz si la intensidad del campo disminuyese en lugar de aumentar.



a) La espira está siendo atravesada por un campo magnético variable y por tanto, de acuerdo con la ley de Faraday−Lenz se inducirá una corriente. El valor del campo que atraviesa la espira aumenta con el tiempo, posiblemente porque se le esté acercando un imán o un solenoide por el que circula una corriente.



De acuerdo con la ley de Faraday−Lenz, cuando acercamos el norte del imán la espira, en ésta debe inducirse una corriente que “se oponga a la causa que lo crea”, es decir, que debe comportarse como si fuera un imán que rechace al que le acercamos. Como si presenta una inercia a cambiar su estado inicial, por eso al aumentar el campo a través de ella crea unas líneas de campo “de forma inducida” en sentido contrario para contrarrestar a las del imán.

Aplicando la regla de la mano derecha a la espira, nos daría la dirección de la corriente, tal como se ha dibujado en la figura. La corriente inducida será continua, porque la variación del campo es uniforme, es decir siempre aumentando. Otra cosa sería si aumentara y disminuyera alternativamente, ya que en tal caso en la espira se induciría corriente en un sentido al aumentar y en el contrario al disminuir por los motivos expuestos anteriormente.

b) De acuerdo con la ley de Faraday−Lenz:

$$e = -\frac{\Delta\phi_B}{\Delta t} = -\frac{\Delta(BS\cos 0)}{\Delta t} = -\left(\frac{\Delta B}{\Delta t}S + B\frac{\Delta S}{\Delta t}\right) = -\frac{(0{,}4-0{,}3)}{0{,}12}\pi 0{,}5^2 = -0{,}65\,\text{Volt}$$

Ya hemos dicho que si el campo disminuyese la f.e.m. inducida sería la misma, pero cambiaría el sentido de la corriente. (Explica el significado del signo menos)

E5A.S2007

Una espira circular de 2 cm de radio se encuentra en un campo magnético uniforme, de dirección normal al plano de la espira y de intensidad variable con el tiempo:

$$B = 3\,t^2 + 4 \quad (S.I.)$$

a) Deduzca la expresión del flujo magnético a través de la espira en función del tiempo.
b) Represente gráficamente la fuerza electromotriz inducida en función del tiempo y calcule su valor para t = 2 s.

a) De acuerdo con la ley de Faraday−Lenz:

$$e = -\frac{d\phi}{dt} = -\frac{d(BS\cos 0)}{dt} = -\left(\frac{dB}{dt}S + B\frac{dS}{dt}\right) = -\frac{d(3t^2+4)}{dt}S = -6tS$$

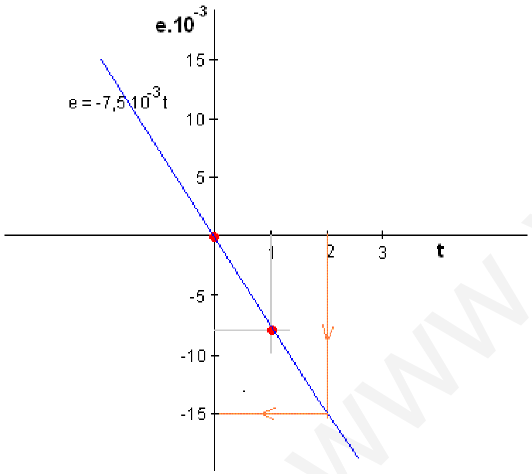
sustituyendo:

$$e = -6t\cdot\pi R^2 = -6t\cdot\pi 0{,}02^2 = -7{,}5\cdot 10^{-3}\,t$$

b) Como vemos la f.e.m. inducida depende del tiempo y "aumenta" linealmente con el tiempo (el signo menos como sabes solo indica que se opone a la causa que la crea) y eso era de esperar ya que el valor del campo también aumenta con el tiempo, de manera que la corriente inducida será continua y tendrá el sentido que contrarreste al aumento de campo, tal como explicamos en el ejercicio anterior.

$$e\Big|_{t=2seg} = -7{,}5\cdot 10^{-3}\cdot 2 = -0{,}015\,Volt$$

La representación de la ecuación de la f.e.m. inducida $e = -7{,}5\cdot 10^{-3}\,t$ que corresponde a una recta se hace simplemente obteniendo dos puntos, por ejemplo para t=0 y t=1



EJERCICIOS SEMIRESUELTOS Y CON SOLUCIONES

E2B.S2008

a) Explique las características de la interacción eléctrica entre dos cargas puntuales en reposo.
b) ¿Es nulo el campo eléctrico en algún punto del segmento que une dos cargas puntuales de igual valor absoluto pero de signo contrario? Razone la respuesta.

a) Teoría
b) No, porque si las cargas tienen distinto signo, el campo eléctrico creado por cada carga tiene la misma dirección y sentido en cualquier lugar del segmento que las une, y por tanto no puede dar resultante nula. (Haz un esquema y dibuja el campo creado por cada carga. Aplica el principio de superposición para obtener el valor del campo resultante.)

E5B.S2010

a) Explique la interacción de un conjunto de cargas puntuales.
b) Considere dos cargas eléctricas +Q y –Q, situadas en dos puntos A y B. Razone cuál sería el potencial electrostático en el punto medio del segmento que une los puntos A y B. ¿Puede deducirse de dicho valor que el campo eléctrico es nulo en dicho punto?

a) Teoría
b) Aplicando el principio de superposición $V = V_1 + V_2 = K\frac{Q}{r/2} + K\frac{-Q}{r/2} = 0$

El campo en ese mismo punto no es nulo, ya que el campo creado por +Q apunta hacia B y el campo creado por –Q también apunta hacia B, de manera que se refuerzan al tener la misma dirección y el mismo sentido.

Su modulo es $E = E_1 + E_2 = K\frac{Q}{(r/2)^2} + K\frac{Q}{(r/2)^2} = K\frac{8Q}{r^2}$

E4B.S2010 (Similar al E3B.S2008 de la teoría)

Una pequeña esfera de $5\cdot 10^{-3}$ kg y carga eléctrica q cuelga del extremo inferior de un hilo aislante, inextensible y de masa despreciable, de 0,5 m de longitud. Al aplicar un campo eléctrico horizontal de $2\cdot 10^2$ V m^{-1} el hilo se separa de la vertical hasta formar un ángulo de 30º.

a) Dibuje en un esquema las fuerzas que actúan sobre la esfera y determine el valor de la carga q.
b) Haga un análisis energético del proceso y calcule el cambio de energía potencial de la esfera.

g = 10 m s^{-2}

a) q = $1{,}44.10^{-4}$ C
b) $\Delta Ep = \Delta Ep_{grav} + \Delta Ep_{eléctr} = 3{,}35\cdot 10^{-3} + -7{,}2\cdot 10^{-3} = -3{,}85.10^{-3}$ J

La variación de energía potencial disminuye porque la posición final es más estable que la inicial

E6B.S2010

Una carga de $3\cdot 10^{-6}$ C se encuentra en el origen de coordenadas y otra carga de $-3\cdot 10^{-6}$ C está situada en el punto (1,1) m.

a) Dibuje en un esquema el campo eléctrico en el punto B (2,0) m y calcule su valor. ¿Cuál es el potencial eléctrico en el punto B?

b) Calcule el trabajo necesario para desplazar una carga de $10\cdot10^{-6}$ C desde el punto A (1,0) m hasta el punto B (2,0) m.
$K = 9\cdot10^{9}$ N m^2 C^{-2}

a) $\vec{E}_B = (K\frac{3\cdot10^{-6}}{2^2} - K\frac{3\cdot10^{-6}}{(\sqrt{2})^2}\cos 45)\vec{i} + K\frac{3\cdot10^{-6}}{(\sqrt{2})^2}\text{sen}45\,\vec{j} = -2796\vec{i} + 9546\vec{j}$; E=9947 N/C

$$V_B = K\frac{3\cdot10^{-6}}{2} + K\frac{-3\cdot10^{-6}}{\sqrt{2}} = -5592\,\text{Volt}$$

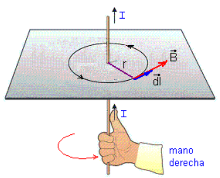
b) $V_A = K\frac{3\cdot10^{-6}}{1} + K\frac{-3\cdot10^{-6}}{1} = 0\,\text{Volt}$

$$W_{A\to B,\text{campo}} = q'(V_A - V_B) = 10\cdot10^{-6}(0 - -5592) = 0{,}056\ \textit{Julios}$$

$$W_{A\to B,\text{Nosotros}} = -W_{A\to B,\text{campo}} = -0{,}056\,\text{J}$$

E1B.S2008
Dos conductores rectilíneos, indefinidos y paralelos distan entre sí 1,5 cm. Por ellos circulan corrientes de igual intensidad y del mismo sentido.
a) Explique con la ayuda de un esquema la dirección y sentido del campo magnético creado por cada una de las corrientes y de la fuerza que actúa sobre cada conductor.
b) Calcule el valor de la intensidad de la corriente que circula por los conductores si la fuerza que uno de ellos ejerce sobre un trozo de 25 cm del otro es de 10^{-3} N.
$\mu 0 = 4\pi\cdot10^{-7}$ N A^{-2}
a) Teoría; b) I = 17,3 A

E4B.S2008
a) Fuerza magnética sobre una carga en movimiento; ley de Lorentz.
b) Explique, con ayuda de un esquema, la dirección y el sentido de la fuerza que actúa sobre una partícula con carga positiva que se mueve paralelamente a un conductor rectilíneo por el que circula una corriente eléctrica. ¿Y si la carga se mueve perpendicularmente al conductor, alejándose de él?.
a) Teoría
b)

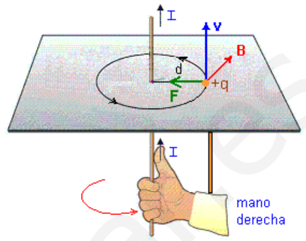


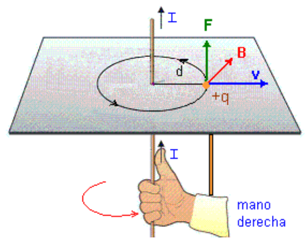
El hilo crea un campo magnético alrededor del conductor como se indica en la figura:

$$B = \frac{\mu_o I}{2\pi\cdot r}$$

Si la carga positiva se mueve paralela al conductor la dirección de la fuerza de Lorentz sobre la carga es perpendicular al conductor y el sentido es hacia él, en el caso de que la carga se mueva en el mismo sentido que la corriente, y viceversa.

Por otro lado, si la carga positiva se aleja del conductor, la fuerza de Lorentz será paralela al hilo.





E5B.S2008
a) Enuncie la ley de Lenz−Faraday de la inducción electromagnética y comente su significado físico.
b) Una espira circular de sección S se encuentra en un campo magnético $\vec{B}$, de modo que el plano de la espira es perpendicular al campo. Razone en qué caso se induce fuerza electromotriz en la espira.
Teoría

E4A.S2010
a) Explique qué es la inducción electromagnética.
b) Una espira rectangular está situada, horizontalmente, en un campo magnético vertical uniforme. Razone si se induce fuerza electromotriz en la espira en las situaciones siguientes: i) se aumenta o disminuye la intensidad del campo magnético; ii) manteniendo constante el campo magnético, se mueve la espira con velocidad constante hasta quedar fuera del campo.
Teoría

E5B.S2009
a) Enuncie la ley de Lenz−Faraday y razone sin con un campo magnético constante puede producirse fuerza electromotriz inducida en una espira.
b) Un conductor rectilíneo se conecta a un generador de corriente continua durante un cierto tiempo y después se desconecta. Cerca del conductor se encuentra una espira. Razone, ayudándose de un esquema, si en algún instante se induce fuerza electromotriz en la espira y explique sus características.
a) Teoría: Puesto que la fem inducida es igual a menos la variación de flujo de campo magnético con respecto al tiempo, es evidente que si el campo magnético es constante su derivada es nula. Escribe la expresión para justificarlo.
b) Teoría: Mientras por el hilo circule una corriente continua el campo creado a su alrededor es constante y solo depende de la intensidad que circula por el hilo y de distancia al mismo, sin embargo en el momento de conectarlo y de desconectarlo la intensidad varía desde cero hasta el valor de régimen y al contrario, por lo que el campo magnético en esos instantes es variable y sí que se induciría una corriente instantánea en la espira. Escribe la expresión para justificarlo y dibuja un esquema. ¿Hay alguna posición de la espira en la que no se induciría corriente?

E1A.S2008
a) Explique las experiencias de Öersted y comente cómo las cargas en movimiento originan campos magnéticos.
b) ¿En qué casos un campo magnético no ejerce ninguna fuerza sobre una partícula cargada? Razone la respuesta.
a) Teoría
b) De acuerdo con la ley de Lorentz, $\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$, la fuerza es nula cuando la carga esté en reposo, o bien, puesto que se trata de un producto vectorial de su velocidad por el campo magnético, la fuerza también será nula en el caso de que ambos vectores tengan la misma dirección, tanto si tienen el mismo sentido ($sen0 = 0$) como si tienen sentidos opuestos ($sen180 = 0$)

E3A.S2008
Comente razonadamente la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones:
a) La fuerza magnética entre dos conductores rectilíneos e indefinidos por los que circulan corrientes de diferente sentido es repulsiva.
b) Si una partícula cargada en movimiento penetra en una región en la que existe un campo magnético siempre actúa sobre ella una fuerza.
a) Sí. Teoría
b) No. Ver el apartado b) del ejercicio E1A.S2008

E2A.S2010
a) Explique las características de la fuerza magnética sobre una carga en movimiento.
b) Dos partículas cargadas describen trayectorias circulares de igual radio en una región en la que existe un campo magnético uniforme. ¿Puede asegurarse que ambas partículas tienen la misma masa? ¿Tienen que ser iguales sus velocidades? Razone las respuestas.

a) Teoría.
b) Teniendo en cuenta que la fuerza de Lorentz es igual a la fuerza normal, responsable de que gire, y despejando la masa se obtiene que: $m = q\,B\,R\,/\,\mathrm{v}$ por tanto, la masa de la partícula además de depender del valor del campo y del radio de la trayectoria depende de su carga y de la velocidad que lleve. Lo mismo puede decirse acerca de sus velocidades.

E3A.S2010
Un electrón se mueve con velocidad $\vec{v} = 200\vec{i}$ m s^{-1} en una región en la que existen un campo eléctrico $\vec{E} = 100\vec{j}$ V m^{-1} y un campo magnético $\vec{B}$.
a) Explique con ayuda de un esquema la dirección del campo magnético y calcule su intensidad.
b) En un instante dado, se suprime el campo eléctrico. Razone cuál sería la nueva trayectoria del electrón e indique en un esquema el sentido en que se mueve.
e = 1,6·10^{-19} C
a) Si el electrón se mueve con velocidad constante $\vec{v} = 200\vec{i}$ quiere decir que la fuerza eléctrica se compensa con la magnética de Lorentz. Igualando ambas, $\vec{B} = 0{,}5\vec{k}$
b) Describirá una trayectoria circular de radio $R = m\,\mathrm{v}\,/\,q\,B$

E3B.S2010
a) Explique las características del campo magnético creado por una corriente rectilínea indefinida.
b) Por dos conductores rectilíneos e indefinidos, paralelos entre sí, circulan corrientes eléctricas de igual intensidad y sentidos opuestos. Explique, con ayuda de un esquema, la dirección y el sentido del campo magnético debido a cada corriente y del campo magnético total en el punto medio de un segmento que una a los dos conductores. ¿Cómo cambiaría la situación si se invirtiese el sentido de una de las corrientes?
Teoría

EJERCICIOS PROPUESTOS EN SELECTIVIDAD CADA CURSO

CAMPO ELECTRICO. CURSO 2010/2011

E1A.S2011
Dos cargas puntuales iguales, de +10^{-5} C, se encuentran en el vacío, fijas en los puntos A (0, 0) m y B (0, 3) m.
a) Calcule el campo y el potencial electrostáticos en el punto C (4, 0) m.
b) Si abandonáramos otra carga puntual de +10^{-7} C en el punto C (4, 0) m, ¿Cómo se movería? Justifique la respuesta.
K = 9 .10^{9} N m^{2} C^{-2}

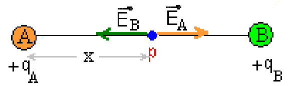
E2A.S2011
a) Campo y potencial electrostáticos de una carga puntual.
b) En una región del espacio existe un campo electrostático generado por una carga puntual negativa, q. Dados dos puntos, A más cercano a la carga y B más alejado de la carga, razone si el potencial en B es mayor o menor que en A.

E3B.S2011
a) Potencial electrostático de una carga puntual.
b) Cuando una partícula cargada se mueve en la dirección y sentido de un campo eléctrico, aumenta su energía potencial. Razone qué signo tiene la carga de la partícula.

E5A.S2011
Una partícula con una carga de 2·10^{-6} C se encuentra en reposo en el punto (0, 0) y se aplica un campo eléctrico uniforme de 100 N C^{-1}, dirigido en el sentido positivo del eje X.
a) Describa razonadamente la trayectoria seguida por la partícula hasta el instante en que se encuentra en un punto A, situado a 4 m del origen. Razone si aumenta o disminuye la energía potencial de la partícula en dicho desplazamiento y en qué se convierte dicha variación de energía.
b) Calcule el trabajo realizado por la fuerza que actúa sobre la partícula en el desplazamiento entre el origen y el punto A y la diferencia de potencial eléctrico entre ambos puntos.

E6A.S2011
a) Campo eléctrico de una carga puntual.
b) Dos cargas puntuales positivas están situadas en dos puntos A y B de una recta. ¿Puede ser nulo el campo eléctrico en algún punto de esa recta? ¿Y si las cargas fueran negativas?.

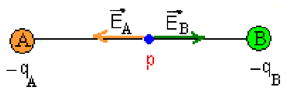
a) Teoría
b) El campo eléctrico creado por una carga en un punto es un vector en la dirección que une la carga y el punto, y el sentido viene dado por la forma en que se movería una carga positiva colocada en dicho punto. Por otro lado, el campo eléctrico creado por una asociación de cargas en un punto, de acuerdo con el principio de superposición, es la suma vectorial del campo creado por cada carga por separado.
Así, para que ambos campos (vectores) den resultante nula deben tener el mismo módulo, la misma dirección y sentidos opuestos. Al tratarse de cargas del mismo signo eso es posible en un punto del segmento que une las cargas como puede verse en la figura.



Si las dos cargas tienen el mismo valor ese punto, donde el campo es nulo, será el punto medio del segmento que las une. Si tienen distinto valor será un punto más cercano a la carga más pequeña: Como para que el campo sea nulo los módulos de los campos deben ser iguales:

$$K\frac{q_A}{x^2} = K\frac{q_B}{(d-x)^2} \quad\Rightarrow\quad \frac{\sqrt{q_A}}{x} = \frac{\sqrt{q_B}}{d-x} \quad\Rightarrow\quad x = d\frac{\sqrt{q_A}}{\sqrt{q_A}+\sqrt{q_B}}$$

En el caso de que las dos cargas sean negativas el resultado es exactamente el mismo con la única diferencia de que el sentido del campo eléctrico creado por cada carga en el punto tiene sentido contrario:



CAMPO MAGNETICO, CURSO 2010/2011

E1B.S2011
a) Fuerza magnética sobre una carga en movimiento; ley de Lorentz.
b) Explique, con ayuda de un esquema, el tipo de movimiento que efectúan un electrón y un neutrón al penetrar con una velocidad $\vec{v}$ en una región del espacio en la que existe un campo magnético uniforme $\vec{B}$ perpendicular a $\vec{v}$.

E2B.S2011
Por dos conductores rectilíneos, de gran longitud, paralelos y separados una distancia de 10 cm, circulan corrientes de 5 A y 10 A en el mismo sentido.
a) Dibuje en un esquema el campo magnético en el punto medio de un segmento que una los dos conductores y calcule su valor.
b) Determine la fuerza por unidad de longitud que actúa sobre cada conductor, indicando su dirección y sentido.
$\mu 0 = 4\pi.10^{-7}$ N A^{-2}

E3A.S2011

Un protón penetra en un campo magnético $\vec{B}$ con velocidad $\vec{v}$ perpendicular al campo y describe una trayectoria circular de periodo 10^{-6} s
a) Dibuje en un esquema el campo magnético, la fuerza que actúa sobre el protón y su velocidad en un punto de la trayectoria y calcule el valor del campo magnético.
b) Explique cómo cambiaría la trayectoria si, en lugar de un protón, penetrara un electrón con la misma velocidad $\vec{v}$.
$e = 1{,}6\cdot10^{-19}$ C ; $m_p = 1{,}7\cdot10^{-27}$ kg ; $m_e = 9{,}1\cdot10^{-31}$ kg

E4B.S2011
Un protón penetra en un campo eléctrico uniforme, $\vec{E}$, de 200 N C^{-1}, con una velocidad $\vec{v}$, perpendicular al campo, de 106 m s^{-1}.
a) Explique, con ayuda de un esquema, las características del campo magnético, $\vec{B}$, que habría que aplicar, superpuesto al eléctrico, para que no se modificara la dirección de la velocidad inicial del protón.
b) Calcule el valor de dicho campo magnético. ¿Se modificaría ese resultado si en vez de un protón penetrase un electrón en las mismas condiciones?

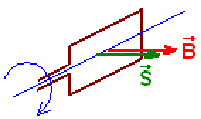
E5B.S2011
a) Fuerza magnética entre dos corrientes rectilíneas indefinidas.
b) Suponga dos conductores rectilíneos, paralelos y separados por una distancia d, por los que circulan corrientes eléctricas de igual intensidad. Dibuje en un esquema el campo magnético debido a cada corriente y el campo magnético total en el punto medio de un segmento que una a los dos conductores. Considere los siguientes casos: i) las dos corrientes van en el mismo sentido; ii) tienen sentidos opuestos.

INDUCCION. CURSO 2010/2011

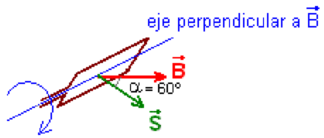
E4A.S2011
a) Fuerza electromotriz inducida; ley de Lenz−Faraday.
b) Cuando un imán se acerca a una espira se genera en ella una fuerza electromotriz. Razone cómo cambiaría esa fuerza electromotriz si: i) el imán se alejara de la espira; ii) se invirtieran los polos del imán; iii) el imán se mantuviera fijo.

E6B.S2011
Una espira conductora de 40 cm^2 se sitúa en un plano perpendicular a un campo magnético uniforme de 0,3T.
a) Calcule el flujo magnético a través de la espira y explique cuál sería el valor del flujo si se girara la espira un ángulo de 60º en torno a un eje perpendicular al campo.
b) Si el tiempo invertido en ese giro es de $3\cdot10^{-2}$ s ¿Cuánto vale la fuerza electromotriz media inducida en la espira? Explique qué habría ocurrido si la espira hubiese girado en sentido contrario.

a) El flujo, por definición, es el producto escalar del vector campo por el vector superficie. Puesto que el campo es perpendicular al plano de la espira y el vector superficie es un vector de módulo igual a la superficie de la espira y perpendicular a la misma, ambos vectores tienen la misma dirección (como se aprecia en la figura) y su producto escalar es máximo.



$\phi = BS$



$\phi = BS\cos\alpha$

$$\phi = \vec{B} \bullet \vec{S} = BS \cdot \cos 0 = 0{,}3T \cdot 40 \cdot 10^{-4} m^2 = 1{,}2 \cdot 10^{-3}\, Tm^2 = 1{,}2 \cdot 10^{-3}\, \text{Weber}$$

cuando la espira gire 60º en torno al eje perpendicular al campo, tal como se muestra en la figura, ahora el vector superficie formará 60º con el campo, por tanto:

$$\phi = \vec{B} \bullet \vec{S} = BS \cdot \cos 60 = 0{,}3 \cdot 40 \cdot 10^{-4} \cdot \cos 60 = 6 \cdot 10^{-4}\ \text{Weber}$$

b) La ley de Faraday-Lenz nos dice que la fuerza electromotriz inducida es igual a menos la variación de flujo de campo magnético, indicando el signo menos que la fem inducida es tal que se opone a la causa que la origina. Para un intervalo de tiempo podemos escribirla como:

$$e = -\frac{\Delta\phi}{\Delta t} = -\frac{6 \cdot 10^{-4} - 1{,}2 \cdot 10^{-3}}{3 \cdot 10^{-2}} = 0{,}02\, V$$

Como hemos dicho, la fuerza electromotriz inducida es tal que se opone a la causa que la origina. Como en este caso es debida a la disminución del flujo de $\vec{B}$, en la espira se induce una corriente en sentido contrario a las agujas del reloj y así la bobina crea su propio campo en la misma dirección de $\vec{B}$.

Si se hiciera girar la bobina en sentido contrario la situación sería la misma, ya que también daría lugar a una disminución del flujo de campo magnético a través de la espira igual al caso anterior, ya que cos60=cos(−60), y en consecuencia se inducirá una corriente en el mismo sentido que antes y del mismo valor.

De todas formas esta pregunta tiene una cierta mala intención, ya que si partimos de la posición inicial tanto si giramos a la izquierda como si giramos a hacia la derecha la situación es a misma, como se ha razonado. Sin embargo si una vez que la espira "ha girado ya 60º" le cambiamos el sentido de giro entonces sí que estaríamos aumentando el flujo de $\vec{B}$ a través de la espira y en este caso la corriente tendría sentido opuesto.

CAMPO ELECTRICO 2012. CURSO 2011/2012

E2A.S2012
a) Campo electrostático de un conjunto de cargas puntuales.
b) ¿Puede ser nulo el campo eléctrico producido por dos cargas puntuales en un punto del segmento que las une? Razone la respuesta.

E3B.S2012
a) Enuncie la ley de Coulomb y comente su expresión.
b) Dos cargas puntuales q y − q se encuentran sobre el eje X, en x = a y en x = − a, respectivamente. Escriba las expresiones del campo electrostático y del potencial electrostático en el origen de coordenadas.

E4B.S2012
Dos cargas $q_1 = -8 \cdot 10^{-9}$ C y $q_2 = (32/3) \cdot 10^{-9}$ C se colocan en los puntos A (3, 0) m y B (0, − 4) m, en el vacío.
a) Dibuje en un esquema el campo eléctrico creado por cada carga en el punto (0, 0) y calcule el campo eléctrico total en dicho punto.
b) Calcule el trabajo necesario para trasladar la carga q1 desde su posición inicial hasta el punto (0,0).
$K_e = 9 \cdot 10^9$ N m^2 C^{-2}

E5A.S2012
Un electrón se mueve con una velocidad de $2 \cdot 10^6$ m s^{-1} y penetra en un campo eléctrico uniforme de 400 N C^{-1}, de igual dirección y sentido que su velocidad.
a) Explique cómo cambia la energía del electrón y calcule la distancia que recorre antes de detenerse.
b) ¿Qué ocurriría si la partícula fuese un positrón? Razone la respuesta.
$e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C; $m = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ kg

E6A.S2012
a) Potencial electrostático de una carga puntual y de un conjunto de cargas puntuales.
b) Si se conoce el potencial electrostático en un solo punto, ¿se puede determinar el campo eléctrico en dicho punto? Razone la respuesta.

CAMPO MAGNETICO. CURSO 2011/2012

E1B.S2012
a) Fuerza magnética sobre una carga en movimiento; ley de Lorentz.
b) Si la fuerza magnética sobre una partícula cargada no realiza trabajo, ¿cómo puede tener algún efecto sobre el movimiento de la partícula? ¿Conoce otros ejemplos de fuerzas que no realizan trabajo pero tienen un efecto significativo sobre el movimiento de las partículas? Justifique las respuestas.

E2B.S2012
Un protón acelerado desde el reposo por una diferencia de potencial de $2 \cdot 10^6$ V penetra, moviéndose en el sentido positivo del eje X, en un campo magnético $\vec{B} = 0{,}2\vec{k}$ T.
a) Calcule la velocidad de la partícula cuando penetra en el campo magnético y dibuje en un esquema los vectores $\vec{v}$, $\vec{B}$ y $\vec{F}$ en ese instante y la trayectoria de la partícula.
b) Calcule el radio y el periodo de la órbita que describe el protón.
$m = 1{,}67 \cdot 10^{-27}$ kg ; $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C

E3A.S2012
Dos conductores rectilíneos, largos y paralelos están separados 5 m. Por ellos circulan corrientes de 5 A y 2 A en sentidos contrarios.

a) Dibuje en un esquema las fuerzas que se ejercen los dos conductores y calcule su valor por unidad de longitud.
b) Calcule la fuerza que ejercería el primero de los conductores sobre una carga de 10^{-6}C que se moviera paralelamente al conductor, a una distancia de 0,5 m de él, y con una velocidad de 100 m s^{-1} en el sentido de la corriente.
$\mu_0 = 4\pi\cdot10^{-7}$ N A^{-2}
a) $F_{mag}/L = \mu_o I_A I_B/2\pi d = 4\cdot 10^{-7}$ N/m (Repulsiva)
b) $Fmag = qvB_A = qv(\mu_o I_A/2\pi d) = 2\cdot 10^{-10}$ N (Atractiva)

E5B.S2012
a) Explique las características del campo magnético creado por una corriente rectilínea e indefinida.
b) Por dos conductores rectilíneos e indefinidos, dispuestos paralelamente, circulan corrientes eléctricas de la misma intensidad y sentido. Dibuje en un esquema la dirección y sentido de la fuerza sobre cada uno de los conductores.

INDUCCION. CURSO 2011/2012

E1A.S2012
A una espira circular de 5 cm de radio, que descansa en el plano XY, se le aplica durante el intervalo de tiempo de t = 0 a t = 5 s un campo magnético $\vec{B} = 0{,}1t^2\vec{k}$ T, donde t es el tiempo en segundos.
a) Calcule el flujo magnético que atraviesa la espira y represente gráficamente la fuerza electromotriz inducida en la espira en función del tiempo.
b) Razone cómo cambiaría la fuerza electromotriz inducida en la espira si: i) el campo magnético fuera $\vec{B} = (2 - 0{,}01t^2)\vec{k}$ T ; ii) la espira estuviera situada en el plano XZ.

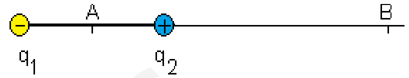
E4A.S2012
a) Fuerza electromotriz inducida. Ley de Lenz−Faraday.
b) Una espira se encuentra en reposo en el plano horizontal, en un campo magnético vertical y dirigido hacia arriba. Indique en un esquema el sentido de la corriente que circula por la espira si: i) aumenta la intensidad del campo magnético; ii) disminuye dicha intensidad.

E6B.S2012
Una espira de 0,1 m de radio gira a 50 rpm alrededor de un diámetro en un campo magnético uniforme de 0,4 T y dirección perpendicular al diámetro. En el instante inicial el plano de la espira es perpendicular al campo.
a) Escriba la expresión del flujo magnético que atraviesa la espira en función del tiempo y determine el valor de la f.e.m. inducida.
b) Razone cómo cambiarían los valores máximos del flujo magnético y de la f.e.m. inducida si se duplicase la frecuencia de giro de la espira.

CAMPO ELÉCTRICO. CURSO 2012/2013

E1A.S2013
3. Dos cargas eléctricas puntuales $q_1 = -5$ μC y $q_2 = 2$ μC están separadas una distancia de 10 cm. Calcule:

a) El valor del campo y del potencial eléctricos en un punto B, situado en la línea que une ambas cargas, 20 cm a la derecha de la carga positiva, tal y como indica la figura.



b) El trabajo necesario para trasladar una carga $q_3 = -12$ μC desde el punto A, punto medio entre las cargas q_1 y q_2, hasta el punto B. ¿Qué fuerza actúa sobre q_3 una vez situada en B?
$K = 9\cdot10^9$ N m^2 C^{-2}
a) $E_B=5\cdot10^4$ N/C hacia q_2; $V_B = -6\cdot10^4$ Volt.
b) $V_A = -5{,}4\cdot10^5$Volt ; $W_{A\text{-}B,q3} = q_3(V_A\text{-}V_B) =+5{,}76$ J ; $F_{q3,B} = q_3E_B = 0{,}6$ N

E3A.S2013
3. Dos partículas de 25 g y con igual carga eléctrica se suspenden de un mismo punto mediante hilos inextensibles de masa despreciable y 80 cm de longitud. En la situación de equilibrio los hilos forman un ángulo de 45º con la vertical.
a) Haga un esquema de las fuerzas que actúan sobre cada partícula.
b) Calcule la carga de las partículas y la tensión de los hilos.
$K = 9\cdot10^9$ N m^2 C^{-2} ; g = 9,8 m s^{-2}
b) $q=5{,}9\cdot 10^{-6}$C; T=0,35N

E4B.S2013
3. Una partícula con carga $2\cdot10^{-6}$ C se encuentra en reposo en el punto (0,0). Se aplica un campo eléctrico uniforme de 500 N C^{-1} en el sentido positivo del eje OY.
a) Describa el movimiento seguido por la partícula y la transformación de energía que tiene lugar a lo largo del mismo.
b) Calcule la diferencia de potencial entre los puntos (0,0) y (0,2) m y el trabajo realizado para desplazar la partícula entre dichos puntos.
$K = 9\cdot10^9$ N m^2 C^{-2}
a) $\Delta Ec\uparrow+\Delta Ep\downarrow=0$; b) $V_A\text{-}V_B=1000$ Volt; $W_{A-B,Campo}=q(V_A\text{-}V_B)=2\cdot 10^{-3}$ J

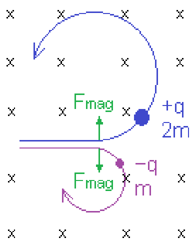
CAMPO MAGNÉTICO. CURSO 2012/2013

E1B.S2013
1. a) Explique las características de la fuerza sobre una partícula cargada que se mueve en un campo magnético uniforme. ¿Varía la energía cinética de la partícula?
b) Una partícula con carga positiva se mueve en línea recta y penetra en una región en la que existen un campo eléctrico y un campo magnético, perpendiculares entre sí y perpendiculares a la velocidad inicial de la partícula. Haga un esquema y razone qué condición debe cumplirse para que la partícula continúe su trayectoria rectilínea.
a) $\Delta Ec=0$ (apartado b E4A.S2014); b) v=E/B

E2B.S2013
3. Un electrón con una energía cinética de $7{,}6\cdot10^3$ eV describe una órbita circular en un campo magnético de 0,06 T.
a) Represente en un esquema el campo magnético, la trayectoria del electrón y su velocidad y la fuerza que actúa sobre él en un punto de la trayectoria.
b) Calcule la fuerza magnética que actúa sobre el electrón y su frecuencia y periodo de giro.
$m_e = 9{,}1\cdot10^{-31}$ kg ; e $=1{,}6\cdot10^{-19}$ C

b) $Ec=1{,}22\cdot10^{-15}J=½m_ev^2 \Rightarrow v=5{,}17\cdot10^7 m/s$
$F_{mag}=qvB=4{,}96\cdot10^{-13}N$; $T=2\pi m_e/qB=5{,}96\cdot10^{-10}seg$; $\nu=1/T=1{,}68\cdot10$ Hz

E3B.S2013
1. a) Explique las características de la fuerza sobre una partícula cargada en movimiento en un campo magnético.
) Dos partículas con cargas de igual valor absoluto y diferente signo se mueven con la misma velocidad, dirigida hacia la derecha y en el plano del papel. Ambas partículas penetran en un campo magnético uniforme de dirección perpendicular al papel y dirigido hacia dentro. Analice con ayuda de un gráfico las trayectorias seguidas por las dos partículas si la masa de una es el doble que la de la otra.
b) La partícula positiva estará sometida a una fuerza de Lorentz en el plano del papel y vertical hacia arriba $\Rightarrow$ girará en el plano del papel comenzando hacia arriba. La partícula negativa estará sometida a una fuerza (del mismo módulo, ya que $F_{mag}=qvB$) en el plano del papel y hacia abajo $\Rightarrow$ girará en el plano del papel comenzando hacia abajo.
Como $r=mv/qB \Rightarrow$ La partícula que tiene el doble masa describirá una circunferencia con el doble de radio. (También tardará el doble en girar, ya que $T=2\pi m/qB$)



E4A.S2013
1. a) Explique, con la ayuda de un esquema, las fuerzas que se ejercen entre sí dos corrientes rectilíneas paralelas.
b) Utilice la fuerza entre dos corrientes paralelas para definir la unidad de intensidad de corriente en el Sistema Internacional.
Teoría

E5A.S2013
3. Un protón, inicialmente en reposo, se acelera bajo una diferencia de potencial de 10^3 V. A continuación, entra en un campo magnético uniforme, perpendicular a la velocidad, y describe una trayectoria circular de 0,3 m de radio.
a) Dibuje en un esquema la trayectoria del protón, indicando las fuerzas que actúan sobre él en cada etapa y calcule el valor de la intensidad del campo magnético.
b) Si con la misma diferencia de potencial se acelerara un electrón, determine el campo magnético (módulo, dirección y sentido) que habría que aplicar para que el electrón describiera una trayectoria idéntica a la del protón y en el mismo sentido.
$e=1{,}6\cdot10^{-19}$ C ; $m_p = 1{,}7\cdot10^{-27}$ kg ; $m_e = 9{,}1\cdot10^{-31}$ kg
a) $qV=½mv^2 \Rightarrow v_p=4{,}34\cdot10^5 m/s$; $qvB=mv^2/r \Rightarrow B_p=1{,}54\cdot10^{-2}T$;
b) $v_e=1{,}88\cdot10^7 m/s$ $B_e=3{,}56\cdot10^{-4}T$ (sentido contrario)

E6A.S2013
1. a) Explique las características del campo magnético creado por una corriente eléctrica rectilínea indefinida.
b) Por dos conductores rectilíneos, paralelos y de longitud infinita, circulan corrientes de la misma intensidad y sentido. Dibuje un esquema indicando la dirección y sentido del campo magnético debido a cada corriente y del campo magnético total en el punto medio de un segmento que une a los dos conductores. Razone cómo cambiaría la situación al duplicar una de las intensidades y cambiar su sentido.

b) Al circular la corriente por los conductores en sentido contrario y duplicar la corriente en uno de ellos, los conductores se repelen con una fuerza doble ya que $F/L=\mu_oI_1I_2/2\pi d$.

E6B.S2013
3. Una partícula α se acelera desde el reposo mediante una diferencia de potencial de $5\cdot10^3$V y, a continuación, penetra en un campo magnético de 0,25 T perpendicular a su velocidad.
a) Dibuje en un esquema la trayectoria de la partícula y calcule la velocidad con que penetra en el campo magnético.
b) Calcule el radio de la circunferencia que describe tras penetrar en el campo magnético.
$m_\alpha = 6{,}7\cdot10^{-27}$ kg ; $q_\alpha = 3{,}2\cdot10^{-19}$ C
a) $qV=½mv^2 \Rightarrow v=6{,}91\cdot10^5 m/s$; b) $r=mv/qB=5{,}79\cdot10^{-2}m$

INDUCCIÓN. CURSO 2012/2013

E2A.S2013
1. a) Explique en qué consiste el fenómeno de inducción electromagnética y escriba la ley de Lenz−Faraday.
b) Una espira, contenida en el plano horizontal XY y moviéndose en la dirección del eje X, atraviesa una región del espacio en la que existe un campo magnético uniforme, dirigido en el sentido positivo del eje Z. Razone si se induce corriente eléctrica en la espira e indique el sentido de la misma en cada uno de los siguientes casos: i) cuando la espira penetra en el campo; ii) cuando se mueve en su interior; iii) cuando sale del campo magnético.
bi) Conforme la espira va entrando en el campo va aumentando el flujo de B en dirección +Z a través de la espira $\Rightarrow$ se inducirá una corriente en sentido horario que dará lugar a una campo inducido en sentido −Z, tratando así de compensar al campo que provoca la corriente conforme a la ley de Lenz-Faraday.
bii) Cuando la espira se mueve dentro del campo la corriente inducida es nula porque no hay variación de flujo de B.
biii) Conforme sale del campo va disminuyendo el flujo de B en dirección +Z a través de la espira $\Rightarrow$ en la espira se induce una corriente en sentido antihorario que dará lugar a un campo en dirección +Z de manera que, de acuerdo con la ley de Lenz-Faraday, la espira trata de compensar la pérdida de líneas de campo a través de ella creando un campo en la misma dirección y sentido.
Dibuja los esquemas correspondientes a las situaciones bi y bii.

E5B.S2013
1. a) Escriba la ley de Lenz−Faraday y explique la polaridad (signo) de la fuerza electromotriz inducida.
b) Una espira se encuentra en reposo en un campo magnético uniforme perpendicular a su plano. Razone, con ayuda de un esquema, la corriente inducida en la espira si el módulo del campo magnético: i) aumenta; ii) permanece constante; iii) disminuye.
b) Similar a E2A.S2013.

CAMPO ELÉCTRICO. CURSO 2013/2014

E1A.S2014

a) Potencial electrostático de una carga puntual.

b) Una partícula cargada negativamente pasa de un punto A, cuyo potencial es V_A, a otro B, cuyo potencial es $V_B < V_A$. Razone si la partícula gana o pierde energía potencial.

Sol: b) $W_{A\to B,campo} = -\Delta Ep = -q\,\Delta V \;\rightarrow\; \Delta Ep = q\,\Delta V = - \cdot - = + \;\rightarrow$ aumenta su Ep

E2A.S2014

Dos cargas puntuales $q_1=5\cdot 10^{-6}$C y $q_2=-5\cdot 10^{-6}$C se encuentran fijas en los puntos (0,0) y (0,3) m, respectivamente. Una tercera carga $Q=2\cdot 10^{-6}$C se coloca en el punto (4,0) m.

a) Dibuje en un esquema el campo eléctrico debido a las cargas q_1 y q_2 en la posición de la carga Q y determine la fuerza que actúa sobre ella.

b) Determine el trabajo realizado por el campo si la partícula de carga Q se desplaza desde su posición inicial hasta el punto (2,0) m y razone si sería necesario aplicar a la partícula una fuerza adicional para que efectuase ese desplazamiento.

$K_e = 9\cdot 10^9$ N m^2 A^{-2}s^{-2}

Sol: a) $\vec{E} = 1{,}37\cdot 10^3\,\vec{i} + 1{,}07\cdot 10^3\,\vec{j}$; $\vec{F} = Q\vec{E} = 2{,}74\cdot 10^{-3}\,\vec{i} + 2{,}14\cdot 10^{-3}\,\vec{j}$

b) $W_{A\to B,campo} = -\Delta Ep = Ep_A - Ep_B = -0{,}0155\,J$. El signo menos indica que la carga no se mueve espontáneamente del punto A hasta el B, por tanto habría que aplicar una fuerza externa para llevarla.

E5B.S2014

a) Campo eléctrico de una carga puntual.

b) Dos cargas eléctricas puntuales positivas están situadas en dos puntos A y B de una recta. ¿Puede ser nulo el campo eléctrico en algún punto de esa recta? ¿Y si una de las cargas fuera negativa? Razone las respuestas.

Sol: b) Verdad. Si ambas cargas tienen el mismo signo $\vec{E} = 0$ en un punto situado en el segmento que une las cargas. Si las cargas tienen signo contrario $\vec{E} = 0$ en un punto de la recta que las une, fuera del segmento, y en el lado más cercano a la carga más pequeña. (Ver ejercicio E3B.S2009)

E4B.S2014 S

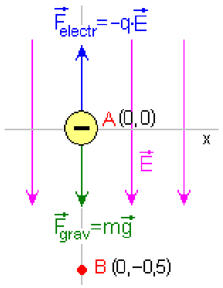
Una partícula de 20 g y cargada con $-2\cdot 10^{-6}$ C, se deja caer desde una altura de 50 cm. Además del campo gravitatorio, existe un campo eléctrico de $2\cdot 10^4$ V m^{-1} en dirección vertical y sentido hacia abajo.

a) Dibuje un esquema de las fuerzas que actúan sobre la partícula y determine la aceleración con la que cae. ¿Con qué velocidad llegará al suelo?

b) Razone si se conserva la energía mecánica de la partícula durante su movimiento. Determine el trabajo que realiza cada fuerza a la que está sometida la partícula.

g = 9,8 m s^{-2}

a) Como la carga es negativa la fuerza eléctrica tiene sentido contrario al campo eléctrico, ya que $\vec{F} = q\,\vec{E}$, por tanto tiene la misma dirección y sentido opuesto al peso.



$\Sigma\vec{F} = m\,\vec{a} \;\Rightarrow\; q\,\vec{E} + m\,\vec{g} = m\,\vec{a} \;\Rightarrow$

$(-2\cdot 10^{-6})\cdot 2\cdot 10^4(-\vec{j}) + 0{,}020\cdot 9{,}8\,(-\vec{j}) = 0{,}020\,\vec{a}$

$\vec{a} = -7{,}8\,\vec{j}$ m/s^2

Como cae con movimiento rectilíneo uniformemente acelerado

v=at	$v = -7{,}8\cdot t$	$\rightarrow$ v=2,79 m/s
s=1/2at^2	$-0{,}5=1/2\cdot(-7{,}8)\cdot t^2$	$\rightarrow$ t=0,358 seg

También podemos calcular la velocidad con que llega al punto B aplicando el teorema de las fuerzas vivas: $W_{Todas\ las\ fuerzas} = \Delta Ec$

Aprovechando que ya hemos calculado las fuerzas, la fuerza resultante es $\vec{F}_{resultante} = -0{,}156\,\vec{j}$

$$W_{TodasFuerzas} = \int_{y=0}^{y=0,5} \vec{F}_{res} \bullet dy\vec{j} = -0{,}156\,|y|_0^{-0,5} = +0{,}078\,J = Ec_B - 0 \;\Rightarrow\; v_B = 2{,}79 \text{ m/s}$$

Al tratarse de fuerzas constantes podemos calcular el trabajo utilizando la definición particular de trabajo $W_{TodasFuerzas} = F_{res}\cdot s\cdot \cos\alpha = 0{,}156\cdot 0{,}5\cdot \cos 0^{\circ} = 0{,}078$ J (En este caso recuerda que solo hay que escribir el módulo de F_{res}=0,156N, el espacio recorrido y el ángulo es el formado por la F_{res} y el desplazamiento, que al ser ambos hacia abajo es 0º.)

b) Al estar sometida la partícula a una fuerza eléctrica y otra gravitatoria, ambas conservativas, se conservará la energía mecánica: ΔEp+ΔEc=0 (donde la variación de energía potencial es la de ambos campos: $\Delta Ep_{eléctr} + \Delta Ep_{gravit}$).

Para calcular el trabajo que hace cada fuerza utilizaremos la expresión particular del trabajo para fuerzas constantes. Pero no olvides que la F_{electr} tiene sentido contrario al desplazamiento (α=180º), mientras que el peso tiene el mismo sentido del desplazamiento (α=0º).

$W_{A\to B,F.eléctr} = 4\cdot 10^{-2}\cdot 0{,}5\cdot \cos 180 = -0{,}02$ J

$W_{A\to B,F.gravit} = 0{,}196\cdot 0{,}5\cdot \cos 0 = +0{,}098$ J

Podemos comprobar que el trabajo total (suma de ambos) es $W_{A\to B,F.Result} = +0{,}078$ J

Teniendo en cuenta que, por definición, el trabajo realizado por las fuerzas conservativas para llevar un cuerpo desde A hasta B es igual a "menos" la variación de energía potencial entre esos puntos: $W_{A\to B,F.Conservat\,(Eléctr+Gravit)} = +0{,}078 = -\Delta Ep$.

Resulta obvio que al sustituir en la expresión de la conservación de la energía obtendremos la misma expresión que escribimos como teorema de las fuerzas vivas, ya que ΔEp+ΔEc=0 ⇒ − 0,078 + ΔEc=0 ⇒ 0,078 = ΔEc ⇒ v_B=2,79m/s

CAMPO MAGNÉTICO. CURSO 2013/2014

E1B.S2014

Un haz de partículas con carga positiva y moviéndose con velocidad $\vec{v} = v\vec{i}$ continúa moviéndose sin cambiar de dirección al penetrar en una región en la que existen un campo eléctrico $\vec{E} = 500\vec{j}$ Vm^{-1} y un campo magnético de 0,4 T paralelo al eje Z.
a) Dibuje en un esquema la velocidad de las partículas, el campo eléctrico y el campo magnético, razonando en qué sentido está dirigido el campo magnético, y calcule el valor v de la velocidad de las partículas.
b) Si se utilizaran los mismos campos eléctrico y magnético y se invirtiera el sentido de la velocidad de las partículas, razone con la ayuda de un esquema si el haz se desviaría o no en el instante en que penetra en la región de los campos.

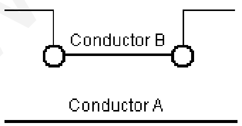
a) El campo ejercerá sobre la carga positiva una fuerza eléctrica en la misma dirección y sentido $\vec{F}_{electr} = q\vec{E}$. Para que las cargas positivas no se desvíen el campo magnético debe tener dirección $+\vec{k}$, es decir que será $\vec{B} = 0{,}4\vec{k}$ y ejercerá una fuerza de Lórenzt $\vec{F}_{mag} = q\,v\,B\,(-\vec{j})$.
Para que la partícula no se desvíe los módulos de ambas fuerzas debe ser iguales ⇒
$F_{electr} = F_{mag}$ ⇒
$q\,E = q\,v\,B$ ⇒ $v = E/B = 1250$ m/s
b) Al invertir la velocidad la fuerza eléctrica sigue siendo la misma en dirección $+\vec{j}$, pero la fuerza magnética invierte el sentido, con lo que también tendrá dirección $+\vec{j}$.
⇒ ambas fuerza no dan resultante nula con lo que la partícula se desviará.
c) En el caso de que la carga fuese negativa y se mantuviera el sentido de su velocidad y el de los campos, la carga no se desviaría porque en este casi la fuerza eléctrica tendría la dirección contraria al campo eléctrico ($-\vec{j}$) y la magnética también tendría sentido contrario ($+\vec{j}$)

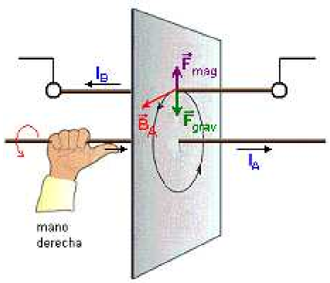
E2B.S2014

a) Explique las características del campo creado por una corriente rectilínea indefinida.
b) ¿En qué casos un campo magnético no ejerce ninguna fuerza sobre una partícula cargada? ¿Y sobre una corriente eléctrica? Razone las respuestas.
Teoría.

E3A.S2014 J

Por el conductor A de la figura circula una corriente de intensidad 200 A. El conductor B, de 1 m de longitud y situado a 10 mm del conductor A, es libre de moverse en la dirección vertical.
a) Dibuje las líneas de campo magnético y calcule su valor para un punto situado en la vertical del conductor A y a 10 cm de él.
b) Si la masa del conductor B es de 10 g, determine el sentido de la corriente y el valor de la intensidad que debe circular por el conductor B para que permanezca suspendido en equilibrio en esa posición.
$g = 9{,}8$ m s^{-2} $\mu_o = 4\pi \cdot 10^{-7}$ T m A^{-1}





a) $B_A = \dfrac{\mu_o I_A}{2\pi d}$ ⇒
$B_{A,10cm} = 4\cdot10^{-4}T$

b) $B_{A,10mm} = 4\cdot10^{-3}T$

$F_{grav} = F_{mag}$ ⇒ $m\,g = I_B B_A L_B$ ⇒
$m\,g = I_B \dfrac{\mu_o I_A}{2\pi d} L_B$

$I_B = 24{,}5$ Amp. (en sentido contrario a I_A)

E5A.S2014

Un protón se mueve en una órbita circular, de 1 cm de radio, perpendicular a un campo magnético uniforme de $5\cdot10^{-3}$ T.
a) Dibuje la trayectoria seguida por el protón indicando el sentido de recorrido y la fuerza que el campo ejerce sobre el protón. Calcule la velocidad y el período del movimiento.
b) Si un electrón penetra en el campo anterior con velocidad de $4\cdot10^{6}$ m s^{-1} perpendicular a él, calcule el radio de la trayectoria e indique el sentido de giro.
$m_p = 1{,}7\cdot10^{-27}$ kg ; $m_e = 9{,}1\cdot10^{-31}$ kg ; $e = 1{,}6\cdot10^{-19}$ C
a) Dibuja una trayectoria circular y la fuerza necesaria para ello. En función de la fuerza deduce la dirección y sentido que debe tener el campo. Deduce las expresiones de v y T:
$v = q\cdot B\cdot r/m_p = 4{,}71\cdot 10^{3}$ m/s; $T = 2\pi\cdot m_p/q\cdot B = 1{,}34\cdot 10^{-5}$seg.
b) La fuerza de Lórentz tiene sentido opuesto a la ejercida sobre el protón ⇒ El electrón girará en sentido contrario al protón. $r = m_e\cdot v/q\cdot B = 4{,}55\cdot 10^{-3}$m

E6A.S2014

a) Explique las características del movimiento de partículas cargadas en un campo magnético uniforme.

E6B.S2014

Dos conductores rectilíneos, paralelos y muy largos, separados 10 cm, transportan corrientes de 5 y 8 A, respectivamente, en sentidos opuestos.
a) Dibuje en un esquema el campo magnético producido por cada uno de los conductores en un punto del plano definido por ellos y situado a 2 cm del primero y 12 cm del segundo y calcule la intensidad del campo total.
b) Determine la fuerza por unidad de longitud sobre uno de los conductores, indicando si es atractiva o repulsiva.
$\mu_o = 4\pi \cdot 10^{-7}$ N A^{-2}

a) $B_1 = \mu_o I_1/2\pi r_1 = 5\cdot 10^{-5}$ T
$B_2 = \mu_o I_2/2\pi r_2 = 1{,}33\cdot 10^{-5}$ T
$B = 3{,}67\cdot 10^{-5}$ T (sentido de B_1)
b) $F/L = \mu_o I_1 I_2/2\pi d = 8\cdot 10^{-5}$ N/m (Repulsiva)

E4A.S2014 S

a) Escriba la ley de Lorentz y explique las características de la fuerza magnética sobre una carga en movimiento.
b) Razone si es verdadera o falsa la siguiente afirmación: “La energía cinética de una partícula cargada que se mueve en un campo eléctrico no puede ser constante, pero si se moviera en un campo magnético sí podría permanecer constante”.

b) Verdad. Si una partícula cargada, que tiene una velocidad inicial v_o, penetra en una región donde exista un campo eléctrico, sobre ella aparecerá una fuerza $\vec{F}_{eléctr} = q\vec{E}$ ⇒ está sometida a una aceleración en la misma dirección del campo y el mismo sentido si la carga es positiva ⇒ Variará la velocidad y en consecuencia ΔEc#0.

En el caso que la partícula cargada, inicialmente tenga v_o=0, al colocarla en el campo eléctrico se moverá espontáneamente hacia donde disminuya su Ep y por tanto aumentará su Ec, ya que el campo eléctrico es conservativo y debe conservarse la energía mecánica.

Por el contrario, cuando la partícula cargada se mueve en un campo magnético mantendrá siempre el mismo módulo de la velocidad inicial, ya que la fuerza que aparece sobre ella $\vec{F}_{mag} = q\,\vec{v} \wedge \vec{B}$ es siempre un vector normal a la velocidad $\Rightarrow$ dará lugar a una aceleración normal que solamente producirá cambios en la dirección de la velocidad $\Rightarrow$ (de no haber sobre la partícula otras fuerzas) ΔEc=0.
Llegaríamos a la misma conclusión teniendo en cuenta que el trabajo que realiza la fuerza de Lorentz para llevar a la caga de un punto a otro es nulo porque $\vec{F} \perp d\vec{r}$ y de acuerdo con el teorema de las fuerzas vivas $W_{A-B}=\Delta Ec=0$.

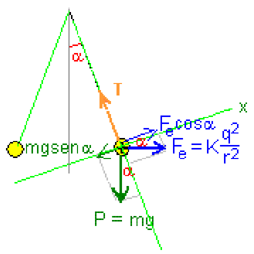
INDUCCIÓN. CURSO 2013/2014

E3B.S2014 J
a) Explique los fenómenos de inducción electromagnética y enuncie la ley de Faraday-Lenz.
b) Dos espiras circulares “a” y “b” se hallan enfrentadas con sus planos paralelos. i) Por la espira “a” comienza a circular una corriente en sentido horario. Explique con la ayuda de un esquema el sentido de la corriente inducida en la espira “b”. ii) Cuando la corriente en la espira “a” alcance un valor constante, ¿qué ocurrirá en la espira “b”? Justifique la respuesta.

bi) En la espira b se induce una corriente en sentido antihorario. bii) No hay corriente.

CAMPO ELÉCTRICO. CURSO 2014/2015

E1A.S2015
Dos partículas puntuales iguales, de 5 g y cargadas eléctricamente, están suspendidas del mismo punto por medio de hilos, aislantes e iguales, de 20 cm de longitud. El ángulo que forma cada hilo con la vertical es de 12º.
a) Calcule la carga de cada partícula y la tensión en los hilos.
b) Determine razonadamente cuánto debería variar la carga de las partículas para que el ángulo permaneciera constante si duplicáramos su masa.
$K = 9\cdot 10^9$ N m^2 C^{-2} ; g = 9,8 m s^{-1}



a) Si el sistema está en equilibrio $\Rightarrow$ La fuerza resultante sobre cada carga es nula $\Rightarrow$

$\sum F_x=0 \Rightarrow \; mg\,sen\alpha = K\frac{q^2}{r^2}\cos\alpha$, donde r la distancia que separa las cargas = al doble del cateto del triángulo que el hilo forma con la vertical: r = 2*Lsenα
Sustituyendo y despejando $q = 8{,}95\cdot 10^{-8}$C

$\sum F_y=0 \Rightarrow \; T = mg\cos\alpha + K\frac{q^2}{r^2}sen\alpha$,
Sustituyendo T = 0,05 N

b) $\sum F_x=0 \Rightarrow \; mg\,sen\alpha = K\frac{q^2}{r^2}\cos\alpha \Rightarrow$ Si el ángulo no varía, tampoco variará r, por tanto podemos poner que $m=f(q^2) \Rightarrow$ Si doblamos la masa $\Rightarrow q' = q\sqrt{2}$

E2B.S2015
Una partícula de carga $+3\cdot 10^{-9}$ C está situada en un campo eléctrico uniforme dirigido en el sentido negativo del eje OX. Para moverla en el sentido positivo de dicho eje una distancia de 5 cm, se aplica una fuerza constante que realiza un trabajo de $6\cdot 10^{-5}$ J y la variación de energía cinética de la partícula es + $4{,}5\cdot 10^{-5}$ J.
a) Haga un esquema de las fuerzas que actúan sobre la partícula y determine la fuerza aplicada.
b) Analice energéticamente el proceso y calcule el trabajo de la fuerza eléctrica y el campo eléctrico.

E3B.S2015
a) Describa las características del campo eléctrico creado por una carga puntual positiva.
b) Para dos puntos A y B de una determinada región del espacio, en la que existe un campo eléctrico uniforme, se cumple que $V_A > V_B$. Si dejamos libre una carga negativa en el punto medio del segmento que une A con B, ¿hacia dónde se moverá la carga? Razone la respuesta.

E4A.S2015
a) Defina las características del potencial eléctrico creado por una carga eléctrica puntual positiva.
b) ¿Puede ser nulo el campo eléctrico en algún punto intermedio del segmento que une a dos cargas puntuales del mismo valor q? Razónelo en función del signo de las cargas.

E5A.S2015
Dos cargas de $-2\cdot 10^{-6}$ C y $+4\cdot 10^{-6}$ C se encuentran fijas en los puntos (0,0) y (0,2) m, respectivamente.
a) Calcule el valor del campo eléctrico en el punto (1,1) m.
b) Determine el trabajo necesario para trasladar una carga de $+6\cdot 10^{-6}$ C desde el punto (1,1) al (0,1) m y explique el significado del signo obtenido.
$K = 9\cdot 10^9$ N m^2 C^{-2}

E5B.S2015
a) Explique qué es una superficie equipotencial. ¿Qué forma tienen las superficies equipotenciales en el campo eléctrico de una carga puntual? Razone qué trabajo realiza la fuerza eléctrica sobre una carga que se desplaza por una superficie equipotencial.
b) En una región del espacio existe un campo eléctrico uniforme. Si una carga negativa se mueve en el mismo sentido y dirección del campo, ¿aumenta o disminuye su energía potencial? ¿Y si la carga es positiva? Razone las respuestas.

E6B.S2015
Una partícula de 1 g y carga $+4\cdot 10^{-6}$ C se deja en libertad en el origen de coordenadas. En esa región existe un campo eléctrico uniforme de 2000 N C^{-1} dirigido en el sentido positivo del eje OX.

a) Describa el tipo de movimiento que realiza la partícula y calcule su aceleración y el tiempo que tarda en recorrer la distancia al punto P(5,0) m.
b) Calcule la velocidad de la partícula en el punto P y la variación de su energía potencial eléctrica entre el origen y dicho punto.
Nota: Desprecie el efecto gravitatorio en la trayectoria de la partícula.
a) $F = q\cdot E = m\cdot a \Rightarrow a = (4\cdot 10^{-6}*2\cdot 10^{-3})/10^{-3} = 8\ m/s^2$.
Si se desprecia el peso la carga positiva se moverá en la dirección del campo con movimiento rectilíneo uniformemente acelerado, con una aceleración de 8 m/s^2
Aplicando las ecuaciones de un movimiento RUA para un móvil que parte del reposo y tiene una aceleración de 8 m/s2, tenemos que para recorrer 5m tarda t = 1,12 seg y llega con una v = 8,94 m/s.
(Si se considerase el peso la velocidad de la carga sería $\vec{v} = 8t\,\vec{i} - 9{,}8t\,\vec{j}$)
b) Como la carga se mueve exclusivamente bajo la acción de la fuerza eléctrica, que es conservativa: $\Delta Ec + \Delta Ep = 0$. Teniendo en cuenta que $Ec_A = 0$ y que $Ec_B = ½mv_B^2 = 0{,}04$ J
Por tanto: $0{,}04 + \Delta Ep = 0 \Rightarrow \Delta Ep = -0{,}04$ J (lógico que ΔEp tenga signo menos, ya que los cuerpos, la carga en ese caso, se mueven espontáneamente hacia donde la Ep es menor)

CAMPO MAGNÉTICO. CURSO 2014/2015

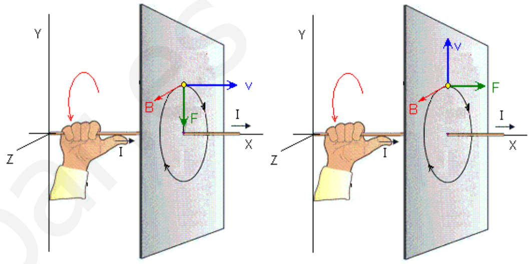
E1B.S2015
a) Fuerza magnética sobre una carga en movimiento; ley de Lorentz.
b) Dos iones, uno con carga doble que el otro, penetran con la misma velocidad en un campo magnético uniforme. El diámetro de la circunferencia que describe uno de los iones es cinco veces mayor que el de la descrita por el otro ion. Razone cuál es la relación entre las masas de los iones.

E3A.S2015
Un deuterón, isótopo del hidrógeno, recorre una trayectoria circular de radio 4 cm en un campo magnético uniforme de 0,2 T. Calcule:
a) la velocidad del deuterón y la diferencia de potencial necesaria para acelerarlo desde el reposo hasta esa velocidad.
b) el tiempo en que efectúa una semirevolución.
$e = 1{,}6\cdot 10^{-19}$ C ; $m_{deuterón} = 3{,}34\cdot 10^{-27}$ kg

E4B.S2015
Dos conductores rectilíneos, verticales y paralelos, distan entre sí 10 cm. Por el primero de ellos circula una corriente de 20 A hacia arriba.
a) Calcule la corriente que debe circular por el otro conductor para que el campo magnético en un punto situado a la izquierda de ambos conductores y a 5 cm de uno de ellos sea nulo.
b) Razone cuál sería el valor del campo magnético en el punto medio del segmento que separa los dos conductores si por el segundo circulara una corriente del mismo valor y sentido contrario que por el primero.
$\mu_0 = 4\pi\cdot 10^{-7}\ N\ A^{-2}$

E6A.S2015 Similar a E2A.S2007
a) Fuerza magnética sobre una carga en movimiento; ley de Lorentz.

b) Explique, con ayuda de un esquema, la dirección y sentido de la fuerza que actúa sobre una partícula con carga positiva que se mueve en el sentido positivo del eje OX, paralelamente a un conductor rectilíneo por el que circula una corriente eléctrica, también en el sentido positivo del eje OX. ¿Y si la partícula cargada se moviera alejándose del conductor en el sentido positivo del eje OY?



INDUCCIÓN. CURSO 2014/2015

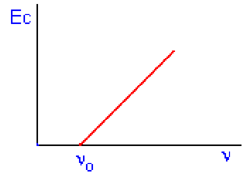
E2A.S2015
Fuerza electromotriz inducida y variación de flujo; ley de Lenz−Faraday.
b) Considere una espira plana circular, colocada perpendicularmente a un imán y enfrente de su polo norte. Si el imán se aproxima a la espira, ¿aumenta o disminuye el flujo magnético a través de la espira? Dibuje la espira y el imán e indique el sentido de la corriente inducida, según que el imán se aproxime o aleje de la misma. Justifique su respuesta.

FÍSICA MODERNA

EFECTO FOTOELÉCTRICO

E1B.S2008
Razone si las siguientes afirmaciones son ciertas o falsas:
a) "Los electrones emitidos en el efecto fotoeléctrico se mueven con velocidades mayores a medida que aumenta la intensidad de la luz que incide sobre la superficie del metal".
b) "Cuando se ilumina la superficie de un metal con una radiación luminosa sólo se emiten electrones si la intensidad de luz es suficientemente grande".

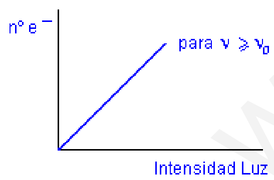
a) Falso. De acuerdo con la física clásica así debería ser porque la energía de una onda es proporcional al cuadrado de su intensidad ($E = m \cdot 2\pi^2 \nu^2 \cdot y^2_{max}$). Sin embargo, precisamente debido a la cuantificación de la energía, la velocidad de los electrones emitidos solo depende de la frecuencia de la luz con que se ilumina el metal, de tal manera que, si ν es la frecuencia de la luz, y ν_o es la frecuencia umbral, tenemos que la energía del fotón de luz ($h\nu$) se invierte en arrancar el electrón del metal ($h\nu_o$) y el resto en energía cinética:



$$h\nu = h\nu_o + \frac{1}{2}mv^2$$

El aumento de la intensidad de la luz solamente hace que se arranquen más electrones, porque más intensidad significa aumentar el número de fotones, es decir que aumente la intensidad de la corriente.

b) Falso. La respuesta es similar a la anterior, ya que como hemos indicado solamente hay efecto fotoeléctrico si la frecuencia de la luz es igual o mayor a la umbral y nada tiene que vez con la intensidad. Así que resumiendo: por muy débil que sea la intensidad de la luz, siempre y cuando $\nu \geq \nu_o$ habrá efecto fotoeléctrico y en caso contrario no independientemente de la intensidad que tenga la luz.



E1B.S2007
Cuando se ilumina un metal con un haz de luz monocromática se observa emisión fotoeléctrica.

a) Explique, en términos energéticos, dicho proceso.
b) Si se varía la intensidad del haz de luz que incide en el metal, manteniéndose constante su longitud de onda, ¿variará la velocidad máxima de los electrones emitidos? ¿Y el número de electrones emitidos en un segundo? Razone las respuestas.

a) Teoría
b) Teoría

E2A.S2008
Al incidir un haz de luz de longitud de onda $625 \cdot 10^{-9}$ m sobre una superficie metálica, se emiten electrones con velocidades de hasta $4{,}6 \cdot 10^5$ m/s
a) Calcule la frecuencia umbral del metal.
b) Razone cómo cambiaría la velocidad máxima de salida de los electrones si aumentase la frecuencia de la luz ¿Y si disminuyera la intensidad del haz de luz?
$h = 6{,}63 \cdot 10^{-34}$ J s ; $c = 3 \cdot 10^8$ m s^{-1} ; me = $9{,}1 \cdot 10^{-31}$ kg

a) De acuerdo con la ecuación de Einstein para el efecto fotoeléctrico: (La energía del fotón de luz se invierte en el trabajo de extracción para arrancar el electrón y el resto en energía cinética):

$$h\nu = h\nu_o + \frac{1}{2}mv^2$$

y teniendo en cuenta que $c = \lambda \nu$

$$6{,}63 \cdot 10^{-34}\,\frac{3 \cdot 10^8}{625 \cdot 10^{-9}} = 6{,}63 \cdot 10^{-34}\nu_o + \frac{1}{2}9{,}1 \cdot 10^{-31}(4{,}6 \cdot 10^5)^2 \quad \Rightarrow \quad \nu_o = 3{,}35 \cdot 10^{14}\,\text{Hz}$$

que corresponde al infrarrojo cercano.

b) Si de la ecuación anterior despejamos la velocidad con las que salen los electrones del metal, tenemos que:

$$v = \sqrt{\frac{2h(\nu - \nu_o)}{m}}$$

Como vemos, la velocidad de los electrones depende exclusivamente de la frecuencia de la luz ν y el resto son todo constantes (*h* es la constante de Planck, *m* la masa del electrón y ν_o es la frecuencia umbral que aunque es diferente para cada metal, para un metal dado sí que es una constante también). También se ve claramente que para que el argumento de la raíz sea positivo $\nu \geq \nu_o$ que es la condición para que haya efecto fotoeléctrico.
La intensidad de la luz no tienen efecto sobre su velocidad sino sobre el número de electrones emitidos. Si disminuye saldrán menos, pero con igual velocidad.

E2B.S2009

Sobre un metal cuyo trabajo de extracción es de 3 eV se hace incidir radiación de longitud de onda 2.10^{-7} m.

a) Calcule la velocidad máxima de los electrones emitidos, analizando los cambios energéticos que tienen lugar.

b) Determine la frecuencia umbral de fotoemisión del metal.

$h=6{,}6\cdot10^{-34}$ J s ; $c=3\cdot10^{8}$ m s^{-1} ; $e=1{,}6\cdot10^{-19}$ C ; $m_e=9{,}1\cdot10^{-31}$ Kg

a) De acuerdo con la interpretación de Einstein del efecto fotoeléctrico, la energía del fotón de la radiación incidente ($h\nu$) se invierte en:

- Primero en arrancar el electrón del metal, es lo que se llama trabajo de extracción: $E_o = h\nu_o$ donde ν_o se llama frecuencia umbral, por debajo de la cual no hay efecto fotoeléctrico por muy intensa que sea la luz.
- El resto de la energía del fotón se invierte en comunicarle energía cinética al electrón arrancado del metal

$$h\nu = E_o + \frac{1}{2}mv^2$$

por tato, sustituyendo y teniendo en cuenta que la frecuencia y longitud de onda de la radiación están relacionadas $c=\lambda\cdot\nu$, y cuidando de expresar en julios el trabajo de extracción, para lo que multiplicamos por la carga del electrón:

$$6{,}6\cdot10^{-34}\,\frac{3\cdot10^{8}}{2\cdot10^{-7}} = 3\cdot1{,}6\cdot10^{-19} + \frac{1}{2}9{,}1\cdot10^{-31}\,v^2$$

de donde:

$$v = 1{,}06\cdot10^{6}\,m/s$$

b) La frecuencia umbral, como hemos dicho, es la frecuencia mínima que debe tener el fotón de luz para arrancar un electrón. La energía de ese fotón sería la energía mínima que debe tener y es lo que se llama trabajo de extracción:

$$E_o = h\nu_o \qquad \Rightarrow \qquad 3\cdot1{,}6\cdot10^{-19} = 6{,}6\cdot10^{-34}\,\nu_o \qquad \Rightarrow \qquad \nu_o = 7{,}27\cdot10^{-14}\,Hz$$

El espectro visible se extiende desde $3{,}8\cdot10^{14}$ a $8{,}0\cdot10^{14}$ Hz, así que la radiación debe corresponder a una luz azul−violeta.

E1A.S2010

Al iluminar potasio con luz amarilla de sodio de $\lambda=5890\cdot10^{-10}$m se liberan electrones con una energía cinética máxima de $0{,}577\cdot10^{-19}$J y al iluminarlo con luz ultravioleta de una

lámpara de mercurio de $\lambda=2537\cdot10^{-10}$m la energía cinética máxima de los electrones emitidos es de $5{,}036\cdot10^{-19}$J

a) Explique el fenómeno descrito en términos energéticos y determine el valor de la constante de Planck.

b) Calcule el trabajo de extracción del potasio.

$c=3\cdot10^{8}$ m s^{-1}

a) De acuerdo con la explicación de Einstein al efecto fotoeléctrico, la energía del fotón de luz se invierte en trabajo de extracción del electrón del metal y el resto en suministrarle energía cinética:

$$h\nu = E_o + Ec$$

Por tanto, según esto, resulta evidente que cuanto menor sea la longitud de onda del fotón de luz, es decir, mayor sea su frecuencia ($c=\lambda\cdot\nu$), y mayor será también su energía. Como el trabajo de extracción del electrón del potasio es el mismo sea cual sea la luz empleada, está claro que al ser mayor la energía de la luz de mercurio sobrará más energía después de arrancarlo y por eso la energía cinética del electrón arrancado es mayor.

Las frecuencias de la luz de sodio y de mercurio son:

$$\nu_{sodio} = \frac{c}{\lambda_{sodio}} = \frac{3\cdot10^{8}}{5890\cdot10^{-10}} = 5{,}093\cdot10^{14}\,Hz$$

$$\nu_{mercurio} = \frac{c}{\lambda_{mercurio}} = \frac{3\cdot10^{8}}{2537\cdot10^{-10}} = 11{,}825\cdot10^{14}\,Hz$$

Aplicando la ecuación de Einstein ($h\nu = E_o + Ec$) al sodio y al mercurio tenemos un sistema de dos ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned} h\cdot5{,}093\cdot10^{14} &= E_o + 0{,}577\cdot10^{-19} \\ h\cdot11{,}825\cdot10^{14} &= E_o + 5{,}036\cdot10^{-19} \end{aligned}\right\} \qquad \begin{aligned} h &= 6{,}624\cdot10^{-34}\,J.s \\ E_o &= 2{,}797\cdot10^{-19}\,Julios \end{aligned}$$

b) El trabajo de extracción del potasio es $E_o = 2{,}797\cdot10^{-19}\,Julios$. La frecuencia umbral del potasio sería:

$$E_o = h\nu_o \qquad \Rightarrow \qquad \nu_o = \frac{E_o}{h} = \frac{2{,}797\cdot10^{-19}}{6{,}624\cdot10^{-34}} = 4{,}222\cdot10^{14}\,Hz$$

Naturalmente la frecuencia umbral es menor que las frecuencias de la luz de sodio y de la luz de mercurio, ya que de lo contrario no habría tenido lugar efecto fotoeléctrico.

E6B.S2010

a) Explique la teoría de Einstein del efecto fotoeléctrico.

b) Razone cómo cambiarían el trabajo de extracción y la velocidad máxima de los electrones emitidos si se disminuyera la longitud de onda de la luz incidente.

a) Teoría

b) El trabajo de extracción es el mismo puesto que corresponde a la energía necesaria para arrancar un electrón al metal, así que solo depende del metal en cuestión.

La energía cinética de los electrones emitidos sí que depende de la frecuencia de la luz y por tanto su velocidad. Como la longitud de onda es inversamente proporcional a la frecuencia de la luz ($c = \lambda \cdot \nu$) una disminución de la longitud de onda significa que aumenta su frecuencia (y la energía del fotón E=hν) en consecuencia aumentará la energía cinética de los fotoelectrones y por tanto su velocidad, ya que:

$$h\nu = E_o + \frac{1}{2}mv^2$$

E1B.S2009
a) Explique qué se entiende por frecuencia umbral en el efecto fotoeléctrico
b) Razone si al aumentar la intensidad de la luz con que se ilumina el metal aumenta la energía cinética máxima de los electrones emitidos.

a) Teoría
b) Teoría

ÁTOMO DE BOHR

E5B.S2009
Razone si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:
a) Cuando un electrón de un átomo pasa de un estado más energético a otro menos energético emite energía y esta energía puede tomar cualquier valor en un rango continuo.
b) La longitud de onda asociada a un partícula es inversamente proporcional a su masa

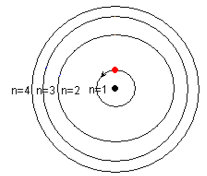
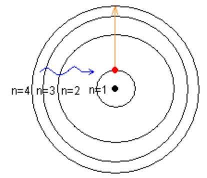
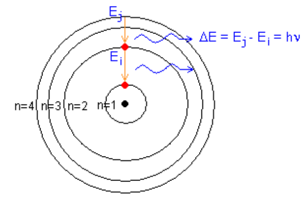
a) Teoría
b) Teoría

E6A.S2007
a) Explique, en términos de energía, el proceso de emisión de fotones por los átomos en un estado excitado.
b) Razone por qué un átomo sólo absorbe y emite fotones de ciertas frecuencias.

a) De acuerdo con el modelo de Bohr, los electrones pueden estar girando en órbitas circulares alrededor del núcleo (orbitales en el modelo actual, que son zonas de probabilidad de encontrar al electrón), pero no en cualquiera, sino solamente en aquellas cuyo radio sea un múltiplo entero del momento angular del electrón:

$$l = rmv = n\frac{h}{2\pi}$$

donde *n* es un número entero que toma valores 1, 2, 3 ... e indica la órbita y se llama número cuántico principal.

Evidentemente, cuando el átomo se encuentre en su estado normal los electrones se encontrarán en los niveles más bajos de energía posible o estado fundamental, en el caso del hidrógeno su electrón estará en el nivel *n=1*.	
Si ahora se excita de alguna manera ese átomo (calentándolo, o simplemente iluminándolo) el electrón absorberá esa energía y saltará a un nivel superior (tanto más cuanto mayor sea la energía suministrada e incluso puede arrancarse si es igual o mayor a la energía de ionización)	
Posteriormente, como hay niveles vacíos con menor energía, el electrón salta a ellos emitiendo la diferencia de energía en forma de un fotón, dando lugar a lo que sería una raya espectral. Como desde el nivel superior puede saltar al nivel más bajo de energía de un salto o en varios saltos se explica que haya varias rayas espectrales	

Resumiendo, las transiciones electrónicas se producen absorbiendo y luego emitiendo un fotón de energía igual a la diferencia de energía entre los niveles y dan lugar a los espectros discontinuos.

La energía de los fotones es igual a la diferencia de energía entre los niveles entres los que salta:

$$\Delta E = E_j - E_i = h\nu = h\frac{c}{\lambda}$$

teniendo en cuenta la fórmula empírica encontrada por Rydberg, que relaciona la longitud de onda de cada raya del espectro con los números cuánticos que definen los niveles entre los que se produce el salto:

$$\frac{1}{\lambda} = R_H\left(\frac{1}{n_i^2} - \frac{1}{n_j^2}\right)$$

sustituyendo *1/λ*

$$\Delta E = E_j - E_i = h\nu = h\frac{c}{\lambda} = hcR_H\left(\frac{1}{n_i^2} - \frac{1}{n_j^2}\right) = R'\left(\frac{1}{n_i^2} - \frac{1}{n_j^2}\right)$$

$$R' = hcR_H = 2{,}16 \cdot 10^{-18}\,J$$

de esta manera podemos calcular la diferencia de energía entre dos niveles y por tanto la longitud de onda o frecuencia del fotón emitido en el salto.

b) Ya se ha contestado a esta cuestión al indicar que solamente son posibles las órbitas para las que el momento angular del electrón sea múltiplo entero de $h/2\pi$, por tanto es evidente que si los saltos están cuantificados, también lo estarán las frecuencias de los fotones que emitirá.

HIPÓTESIS DE DE BROGLIE

E5A.S2010
a) Explique la hipótesis de de Broglie.
b) Considere un haz de protones y un haz de electrones de igual energía cinética. Razone cuál de ellos tiene mayor longitud de onda.

a) Teoría.
b) Igual al E4B.2008 en teoría.

E6A.S2010
a) Calcule la energía cinética de un electrón cuya longitud de onda de de Broglie es $5 \cdot 10^{-10}$ m
b) Razone si un protón con la misma longitud de onda asociada tendría la misma energía cinética.
$h = 6{,}63 \cdot 10^{-34}$ J s ; $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C ; $m_e = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ kg ; $m_p = 1{,}67 \cdot 10^{-27}$ kg

a) $$\lambda = \frac{h}{mv} \quad \rightarrow \quad v = \frac{h}{m\lambda} = \frac{6{,}63 \cdot 10^{-34}}{9{,}1 \cdot 10^{-31} \cdot 5 \cdot 10^{-10}} = 1{,}46 \cdot 10^6\,m/s$$

$$Ec = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}9{,}1 \cdot 10^{-31} \cdot (1{,}46 \cdot 10^6)^2 = 9{,}69 \cdot 10^{-19}\,\text{Julios} = 6{,}06\,eV$$

b) Podríamos calcular el valor de la Ec del protón a partir de los datos, pero también teniendo en cuenta que $Ec = \frac{1}{2}mv^2$ podemos poner que $2mEc = m^2v^2$ por tanto:

$$\left.\begin{aligned}
\lambda_e &= \frac{h}{m_e v_e} = \frac{h}{\sqrt{2m_e Ec_e}} \\
\lambda_p &= \frac{h}{m_p v_p} = \frac{h}{\sqrt{2m_p Ec_p}}
\end{aligned}\right\} \quad \lambda_e = \lambda_p \quad \rightarrow \quad \frac{h}{\sqrt{2m_e Ec_e}} = \frac{h}{\sqrt{2m_p Ec_p}} \quad \rightarrow \quad Ec_p = Ec_e \frac{m_e}{m_p}$$

Como vemos la energía cinética del protón es mucho menor que la del electrón. Sustituyendo tenemos que:

$$Ec_p = Ec_e \frac{m_e}{m_p} = 6{,}06 \frac{9{,}1 \cdot 10^{-31}}{1{,}67 \cdot 10^{-27}} = 0{,}0033\,eV$$

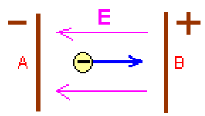
E4A.S2009
Un haz de electrones se acelera desde el reposo mediante una diferencia de potencial. Tras ese proceso, la longitud de onda asociada a los electrones es de $8\cdot 10^{-11}$ m.
a) Haga un análisis energético de proceso y determine la diferencia de potencial aplicada.
b) Si un haz de protones se acelera con esa diferencia de potencial, determine la longitud de onda asociada a los protones.
$h=6{,}6\cdot 10^{-34}$ J s ; $c=3\cdot 10^{8}$ m s^{-1} ; $e=1{,}6\cdot 10^{-19}$ C ; $m_e=9{,}1\cdot 10^{-31}$ Kg ; $m_p=1840m_e$

a) Al establecer una ddp entre dos puntos separados una distancia *d* se origina un campo eléctrico entre ellos, que supuesto constante sería:

$$V_A - V_B = \int_{A,\text{campo}}^{B} \vec{E} \bullet d\vec{r} = E(r_B - r_A) = E \cdot d$$

Por tanto una carga *q´* que se encuentre en el punto A tendrá una energía potencial respecto del punto B.

$$Ep_A - Ep_B = W_{Campo,A\to B} = q´(V_A - V_B)$$



Como vemos, al ser *q´* la carga de un electrón, que es negativa, para que *W*>0 el potencial del punto B debe ser mayor que el del A, es decir que las cargas negativas se mueven hacia potenciales crecientes, tal como se muestra en la figura.

Ese trabajo que realiza el campo eléctrico, de acuerdo con el teorema de las fuerzas vivas será igual a la variación de energía cinética, así que:

$$Ep_A - Ep_B = W_{Campo,A\to B} = q´(V_A - V_B) = \Delta Ec = Ec_B - Ec_A$$

Fíjate que al final hemos llegado a la conservación de la energía mecánica. Claro, como que el campo eléctrico es un campo de fuerzas conservativo. Resumiendo

$$q´(V_A - V_B) = Ec_B - \cancel{Ec_A} \qquad \Rightarrow \qquad -1{,}6\cdot 10^{-19}(V_A - V_B) = \frac{1}{2}9{,}1\cdot 10^{-31} v_B^2$$

Para poder calcular la diferencia de potencial entre los puntos A y B necesitamos saber la velocidad que adquiere el electrón. Para ello tendremos en cuenta que según la hipótesis de De Broglie la longitud de onda asociada a una partícula es:

$$\lambda = \frac{h}{mv} \qquad \Rightarrow \qquad 8\cdot 10^{-11} = \frac{6{,}6\cdot 10^{-34}}{9{,}1\cdot 10^{-31}\cdot v} \qquad \Rightarrow \qquad v = 9{,}07\cdot 10^{6}\,m/s$$

Así que:

$$-1{,}6\cdot 10^{-19}(V_A - V_B) = \frac{1}{2}9{,}1\cdot 10^{-31}(9{,}07\cdot 10^{6})^2$$

de donde:

$$(V_A - V_B) = -234\,Volt \quad \text{o bien que} \quad \Delta V = V_B - V_A = 234\,Volt$$

Como vemos en el resultado y ya habíamos indicado el potencial del punto B es mayor que el del A, por eso el electrón que es una carga negativa se mueve del A al B.

b) Como hemos visto antes, si el protón se acelera con la misma ddp, al tener la misma carga, aunque positiva, adquirirá la misma energía cinética. (aunque claro, los protones como cargas positivas, se mueven hacia potenciales decrecientes).

$$q´V = Ec = \frac{1}{2}m_e v_e^2 = \frac{1}{2}m_p v_p^2$$

de donde podríamos calcular fácilmente la velocidad del protón, pero parece más elegante relacionar la longitud de ondas de ambas partículas y calcularlo a partir de la relación entre las masas de las partículas. Como:

$$\frac{v_p^2}{v_e^2} = \frac{m_e}{m_p} \qquad \Rightarrow \qquad v_p = v_e\sqrt{\frac{m_e}{m_p}}$$

y según la hipótesis de De Broglie la longitud de onda asociada al protón es:

$$\lambda_p = \frac{h}{m_p v_p} = \frac{h}{m_p v_e\sqrt{\frac{m_e}{m_p}}} = \frac{h}{v_e\sqrt{m_e m_p}} = \frac{h}{m_e v_e\sqrt{\frac{m_p}{m_e}}} = \frac{h}{m_e v_e}\sqrt{\frac{m_e}{m_p}} = \lambda_e\sqrt{\frac{m_e}{m_p}}$$

Como vemos, la longitud de onda asociada al protón es menor que la que tiene asociada el electrón.

$$\lambda_p = \lambda_e\sqrt{\frac{m_e}{m_p}} = 8\cdot 10^{-11}\sqrt{\frac{1}{1940}} = 1{,}87\cdot 10^{-12}\,m$$

E6B.S2009

a) Enuncie la hipótesis de De Broglie. ¿Depende la longitud de onda asociada a una partícula de su masa?

b) Enuncie el principio de incertidumbre y explique su origen.

a) Teoría.

b) Teoría

E3B.S2008

a) Un haz de electrones se acelera bajo la acción de un campo eléctrico hasta una velocidad de $6\cdot 10^5$ m s^{-1}. Haciendo uso de la hipótesis de De Broglie calcule la longitud de onda asociada a los electrones.

b) La masa del protón es aproximadamente 1800 veces la del electrón. Calcule la relación entre las longitudes de onda de De Broglie de protones y electrones suponiendo que se mueven con la misma energía cinética.

h = 6,63·10^{-34} J s ; me = 9,1·10^{-31} kg.

a) Un campo eléctrico puede utilizarse para acelerar cargas, como el caso del un electrón, debido a que el trabajo eléctrico se transformaría en *Ec* según $qE = \frac{1}{2}mv^2$.

Haciendo uso de la hipótesis de De Broglie:

$$\lambda = \frac{h}{mv} = \frac{6{,}63\cdot 10^{-34}}{9{,}1\cdot 10^{-31}\cdot 6\cdot 10^{5}} = 1{,}2\cdot 10^{9}\,\mathrm{m}$$

b) En uno de los ejemplos resueltos ya hemos deducido que:

$$\lambda_p = \lambda_e\sqrt{\frac{m_e}{m_p}} \qquad \text{por tanto si } m_p = 1800 m_e \qquad \Rightarrow \quad \lambda_p = \frac{\lambda_e}{\sqrt{1800}}$$

DESINTEGRACIÓN RADIACTIVA. LEYES DE SODDY Y FAJANS

E5A.S2009

a) Describa los procesos de desintegración radiactiva alfa, beta y gamma y justifique las leyes de desplazamiento.

b) Complete las reacciones nucleares siguientes especificando el tipo de nucleón o átomo representado por la letra X y el tipo de emisión radiactiva de que se trata:

$$^{210}_{83}\mathrm{Bi} \rightarrow ^{206}_{81}\mathrm{Tl} + \mathrm{X}$$
$$^{24}_{11}\mathrm{Na} \rightarrow \mathrm{X} + \beta$$
$$\mathrm{X} \rightarrow ^{234}_{91}\mathrm{Pa} + \beta$$

a) Teoría.

b) Teniendo en cuenta en todas las reacciones nucleares se conserva la carga y el número de nucleones, (además del momento lineal, angular, el spín y la energía relativista), simplemente tenemos que igualar los exponentes (que indican el número de nucleones) y además igualar los subíndices (que indican la carga), por tanto:

$$^{210}_{83}\mathrm{Bi} \rightarrow ^{206}_{81}\mathrm{Tl} + ^{4}_{2}\mathrm{X}$$
$$^{24}_{11}\mathrm{Na} \rightarrow ^{24}_{12}\mathrm{X} + ^{0}_{-1}\beta$$
$$^{234}_{90}\mathrm{X} \rightarrow ^{234}_{91}\mathrm{Pa} + ^{0}_{-1}\beta$$

En el primer caso se forma un núcleo de helio (partícula alfa), en el segundo caso el elemento que se forma es Magnesio y en la tercera reacción es el Torio quien emite una partícula beta y se transforma en Protactinio.

A la misma conclusión habríamos llegado si aplicamos los enunciados de las leyes radiactivas:

- Si un elemento emite una partícula alfa se transforma en otro elemento cuyo número atómico es dos unidades menor y tiene una masa 4 unidades menor, que es obviamente lo que ocurre en la primera reacción.
- En la segunda y tercera reacción se emite una partícula beta y por tanto el núcleo que se forma tiene la misma masa y un número atómico aumenta en 1 unidad.

E4A.S2010

a) Explique qué es la radiactividad y describa en qué consisten los procesos alfa, beta y gamma.

b) Razone cuál es el número total de emisiones alfa y beta que permiten completar la siguiente transmutación:

$$^{235}_{92}\mathrm{U} \rightarrow ^{207}_{82}\mathrm{Pb}$$

a) Teoría

b) En una reacción nuclear además de la energía y el momento lineal y cinético debe conservarse el número de nucleones y la carga. La conservación de los nucleones exige que aparezcan 235–207=28. Como cada partícula α tiene 4 nucleones, significa que se producen 7 de ellas, así la reacción es:

$$^{235}_{92}\mathrm{U} \rightarrow ^{207}_{82}\mathrm{Pb} + 7\,^{4}_{2}\alpha + x\,^{0}_{-1}\beta$$

la conservación de la carga exige que 92=82+7·2+x.(–1), de donde x=4. Por tanto la transmutación referida se produce tras la emisión sucesiva de 7 partículas alfa y 4 beta.

LEY DE LA DESINTEGRACIÓN RADIACTIVA

E4A.S2009

a) Enuncie la ley que rige la desintegración radiactiva, identificando cada una de las magnitudes que intervienen en la misma, y defina periodo de semidesintegración y actividad de un isótopo radiactivo.

b) La antigüedad de una muestra de madera se puede determinar a partir de la actividad del ${}^{14}_{6}C$ presente en ella. Explique el procedimiento.

a) Teoría

b) Teoría

E1B.S2009

El ${}^{210}_{83}\mathrm{Bi}$ emite una partícula beta y se transforma en polonio que, a su vez, emite una partícula alfa y se transforma en plomo.

a) Escribe las reacciones de desintegración descritas

b) Si el periodo de semidesintegración del ${}^{210}_{83}\mathrm{Bi}$ es de 5 días, calcule cuantos núcleos se han desintegrado al cabo de 10 días si inicialmente se tenía un mol de átomos de ese elemento.

$N_a=6{,}02\cdot10^{23}\ \mathrm{mol}^{-1}$

a) De acuerdo con las leyes de las transformaciones radiactivas de Soddy y Fajans, si un núcleo emite una partícula β (electrón) el núcleo se transformará en otro con la misma masa pero su número atómico aumentará en una unidad (es el siguiente en la tabla periódica):

$${}^{210}_{83}\mathrm{Bi} \rightarrow {}^{210}_{84}\mathrm{Po} + {}^{0}_{-1}\beta$$

Si ahora el polonio emite una partícula α (núcleo de helio) se transforma en otro núcleo de masa 4 unidades menor y de número atómico 2 unidades menor (dos lugares antes en la tabla periódica):

$${}^{210}_{84}\mathrm{Po} \rightarrow {}^{206}_{82}\mathrm{Pb} + {}^{4}_{2}\alpha$$

b) De acuerdo con la ley de las desintegraciones radiactivas, y teniendo en cuenta que un mol de cualquier sustancia, este caso de Bi, contienen un número de Avogadro de partículas:

$$N = N_o e^{-\lambda t} = N_o e^{-\frac{\ln 2}{T}t}$$

sustituyendo:

$$N = 6{,}02\cdot10^{23} e^{-\frac{\ln 2}{5}10} = 1{,}51\cdot10^{23}\,\text{át}$$

que es la cuarta parte de los átomos iniciales, tal como es de esperar, ya que de acuerdo con la definición de periodo de semidesintegración (tiempo para que el número de átomos de la muestra se reduzca a la mitad) a los 5 días quedarían la mitad de los iniciales, es decir $N_{Av}/2$ y de nuevo a los 5días volverán a quedar la mitad de esos, es decir que quedarían $N_{Av}/4$

E2B.S2008

Una sustancia radiactiva se desintegra según la ecuación:

$$N = N_o\, e^{-0{,}005\,t} \qquad \text{(S. I.)}$$

a) Explique el significado de las magnitudes que intervienen en la ecuación y determine razonadamente el periodo de semidesintegración.

b) Si una muestra contiene en un momento dado 10^{26} núcleos de dicha sustancia, ¿cuál será la actividad de la muestra al cabo de 3 horas?

a) Teoría. En la segunda parte de la cuestión debes, partiendo de la ecuación $N = N_o\, e^{-\lambda t}$ deducir razonadamente la expresión del periodo de semidesintegración a partir de su definición como el tiempo que el número de átomos de la muestra tarda en reducirse a la mitad, debiendo obtener que:

$$T = \frac{\ln 2}{\lambda} = \frac{\ln 2}{0{,}005} = 138{,}63\mathrm{seg}$$

b) Puesto que la actividad es proporcional al número de átomos ($A = \lambda N$) primero debemos conocer el número de átomos radiactivos que quedarán después de 3 horas:

$$N = N_o\, e^{-\lambda t} \qquad \Rightarrow \qquad N = 10^{26}\, e^{-0{,}005\cdot 3\cdot 3600} = 353{,}26\text{átmos}$$

y ahora:

$$A = \lambda N = 0{,}005\cdot 353{,}26 = 1{,}77\text{át}/\mathrm{seg}$$

E6B.S2008

El ${}^{126}_{55}Cs$ tiene un periodo de semidesintegración de 1,64 minutos.

a) ¿Cuántos núcleos hay en una muestra de $0,7\cdot10^{-6}$ g?

b) Explique qué se entiende por actividad de una muestra y calcule su valor para la muestra del apartado a) al cabo de 2 minutos.

$N_A = 6,023\cdot10^{23}\ mol^{-1}$; m(Cs) = 132,905 u

a) Como 1 mol de átomos de cesio (o de cualquier otro elemento) contiene un número de Avogadro de átomos y tiene una masa en gramos igual a su peso atómico en umas, podemos poner que:

1 mol de át.de Cs ––– tiene una masa de 132,905 gr –––– contiene $6,023\cdot10^{23}$ át.de Cs

$0,7\cdot10^{-6}$ gr ––––––––––––––––– N át.de Cs

de donde:

$$N = \frac{0,7\cdot10^{-6}\cdot 6,023\cdot10^{23}}{132,905} = 3,17\cdot10^{15}\,\text{át}$$

como cada átomo tiene un núcleo, obviamente el número de núcleos es igual al de átomos.

b) La Actividad (A) de una sustancia se define como el valor absoluto de la velocidad de desintegración:

$$A = \left|\frac{dN}{dt}\right| = \lambda N$$

Igual que en el ejercicio anterior, primero debes calcular el número de átomos radiactivos que quedarán después de 2 minutos y luego calcular la actividad. En este caso como en lugar de la constante de desintegración conocemos el periodo de semidesintegración, tendremos en cuenta que están relacionados: $\lambda = \ln 2 / T$

$$N = N_o\, e^{-\lambda t} \qquad \Rightarrow \qquad N = 3,17\cdot10^{15}\, e^{-\frac{\ln 2}{1,64}2} = 1,36\cdot10^{15}\,\text{átmos}$$

y ahora:

$$A = \lambda N = \frac{\ln 2}{T} N = \frac{\ln 2}{1,64}\cdot 1,36\cdot10^{15} = 5,75\cdot10^{14}\,\text{át / min}$$

observa que los tiempos los hemos medido en minutos porque no ha sido necesario convertirlos a segundos, pero las unidades naturalmente han resultado también en minutos.

E5A.S2007

La actividad de ${}^{14}C$ de un resto arqueológico es de 60 desintegraciones por segundo. Una muestra actual de idéntica composición e igual masa posee una actividad de 360 desintegraciones por segundo. El periodo de semidesintegración del ${}^{14}C$ es 5700 años.

a) Explique a qué se debe dicha diferencia y calcule la antigüedad de la muestra arqueológica.

b) ¿Cuántos núcleos ${}^{14}C$ tiene la muestra arqueológica en la actualidad? ¿Tienen las dos muestras el mismo número de átomos de carbono? Razone las respuestas.

a) La explicación está en la teoría y para calcular la antigüedad de la muestra solo tenemos que despejar el tiempo de la ley de desintegración radiactiva:

$$N = N_o\, e^{-\lambda t}$$

Tomando logaritmos neperianos:

$$\ln\frac{N}{N_o} = -\lambda t \qquad \Rightarrow \qquad t = -\frac{1}{\lambda}\ln\frac{N}{N_o} = \frac{1}{\lambda}\ln\frac{N_o}{N}$$

y como $\lambda = \ln 2 / T$ nos queda finalmente que:

$$t = \frac{T}{\ln 2}\cdot\ln\frac{N_o}{N}$$

Teniendo en cuenta que el número de átomos en la muestra es directamente proporcional a la actividad de la muestra, recuerda que A=λN, podemos poner que:

$$t = \frac{T}{\ln 2}\cdot\ln\frac{A_o}{A} = \frac{5700}{\ln 2}\cdot\ln\frac{360}{60} = 14734\,\text{años}$$

b) Como la actividad es A=λN , el número de átomos que la muestra arqueológica tiene en la actualidad es:

$$N = \frac{A}{\lambda} = \frac{A\cdot T}{\ln 2} = \frac{60\cdot(5700*365*24*3600)}{\ln 2} = 1,55\cdot10^{13}\,\text{átomos}$$

A la vista de la expresión anterior y teniendo en cuenta que el periodo de semidesintegración es una constante para una muestra dada, es evidente que la muestra originariamente y en la actualidad tienen distinto número de átomos. La diferencia corresponde a los átomos de C^{14} que se han desintegrado convirtiéndose en nitrógeno según $C^{14} \rightarrow N^{14} + \beta + \nu$

Inicialmente $N_i = \dfrac{A_i}{\lambda}$ en la actualidad $N_f = \dfrac{A_f}{\lambda}$ de donde: $N_f = \dfrac{A_f}{A_i} N_i$

E1A.S2007

a) Comente la siguiente frase: “debido a la desintegración del ${}^{14}C$, cuando un ser

vivo muere se pone en marcha un reloj…" ¿En qué consiste la determinación de la antigüedad de los yacimientos arqueológicos mediante el ^{14}C?
b) ¿Qué es la actividad de una muestra radiactiva? ¿De qué depende?

Teoría

E3A.S2010
Un núcleo de tritio $^{3}_{1}H$ se desintegra por emisión β dando lugar a un núcleo
a) Escriba la reacción de desintegración nuclear y explique en qué consiste la emisión β.
b) Determine razonadamente la cantidad de $^{3}_{1}H$ que quedará de una muestra inicial de 0,1g al cabo de tres años sabiendo que el periodo de semidesintegración del $^{3}_{1}H$ es 12,3 años.

a) Cuando un núcleo emite una partícula β se transforma en otro de la misma masa (son isóbaros) y cuyo número atómico es 1 unidad mayor (es el siguiente en la tabla periódica):

$$^{3}_{1}H \rightarrow ^{3}_{2}He + ^{0}_{-1}\beta + \text{Energía}$$

Las emisiones β tienen lugar en los núcleos con demasiados neutrones en relación al número de protones, como es el caso del tritio. Lo que realmente ocurre es que se cambia un neutrón por un protón ya que la reacción que tiene lugar es: $n \rightarrow p^+ + e^- + \overline{\nu}$

b) Como el número de átomos es proporcional a la masa, podríamos escribir la ley de desintegración radiactiva como:

$$N = N_o\, e^{-\lambda t} \qquad \Rightarrow \qquad m = m_o\, e^{-\lambda t} = m_o\, e^{-\frac{\ln 2}{T}t}$$

sustituyendo:

$$m = 0{,}1 e^{-\frac{\ln 2}{12{,}3}3} = 0{,}075\text{gr}$$

Cuida las unidades. *m* se obtiene en las mismas unidades de m_o. Por otro lado, no es necesario poner el tiempo en segundos pero sí que tenga las mismas unidades en que se mida el periodo de semidesintegración.

REACCIONES NUCLEARES

E2A.S2010
a) Explique qué se entiende por defecto de masa y por energía de enlace.
b) Considere los núclidos $^{232}_{90}Th$ y $^{232}_{92}U$. Si el $^{232}_{90}Th$ tiene mayor energía de enlace, razone cuál de ellos es más estable.

a) Teoría
b) A la energía que, de acuerdo con la expresión $E=mc^2$, le corresponde al defecto de masa se llama energía de enlace y corresponde a la energía que se desprende cuando se forma el núcleo a partir de sus componentes o bien la que se necesita para romperlo. En consecuencia, cuanto mayor es la energía de enlace más estable es.

No obstante, la energía de enlace (ΔE) es proporcional al número de nucleones y por eso para poder comparar la estabilidad de dos núcleos se define la energía de enlace por nucleón (ΔE/A). Puesto que en este caso ambos elementos tienen el mismo número de nucleones (A=232), será más estable el torio por tener mayor energía de enlace. (Sin embargo entre otros isótopos de los mismos elementos que no tuviesen el mismo número de nucleones no podríamos saber quien es más estable con los datos aportados.)

E4B.S2009
Considere los nucleidos $^{3}_{1}H$ y $^{4}_{2}He$
a) Defina defecto de masa y calcule la energía de enlace de cada uno.
b) Indique cual de ellos es más estable y justifique la respuesta.
$c=3\cdot10^8\ m\ s^{-1}$; $u=1{,}66\cdot10^{-27}Kg$; $m(^{3}_{1}H)=3{,}01600494u$; $m(^{4}_{2}He)=4{,}00260u$
$m_p=1{,}007825u$; $m_n=1{,}008665u$

a) La energía de enlace o de cohesión es igual a la energía, que de acuerdo con la relación de Einstein $E = mc^2$, corresponde a la pérdida de masa que experimenta un núcleo cuando se forma a partir de sus componentes. y por tanto sería igual a la energía mínima que tendríamos que aportar para romperlo, lo que nos da una medida de la estabilidad del núcleo.

$$\Delta E = \Delta m \cdot c^2 = (m_{\text{teórica}} - m_{\text{exp erimental}}) \cdot c^2$$

Como el tritio tiene 1 protón y 2 neutrones y el helio tienen 2 protones y 2 neutrones, la energía de enlace para cada uno sería:

$$\Delta E_H = \Delta m \cdot c^2 = (1{,}007825 + 2\cdot 1{,}008665 - 3{,}01600494)1{,}66\cdot10^{-27}\cdot(3\cdot10^8)^2$$
$$\Delta E_H = 1{,}37\cdot10^{-12}\,J = 8{,}54MeV$$

$$\Delta E_{He} = \Delta m \cdot c^2 = (2\cdot1{,}007825 + 2\cdot 1{,}008665 - 4{,}00260)1{,}66\cdot10^{-27}\cdot(3\cdot10^8)^2$$
$$\Delta E_{He} = 4{,}54\cdot10^{-12}\,J = 28{,}37MeV$$

b) Puesto que ambos núcleos tienen distinto número de nucleones, la energía de enlace no sirve para comparar su estabilidad, puesto que la energía de enlace es mayor cuanto mayor es el número de nucleones. Por eso para poder comparar la estabilidad de los núcleos entre sí se recurre al concepto de energía de enlace por nucleón, así que se divide la energía de enlace por el número de nucleones:

$$\frac{\Delta E_H}{A} = \frac{8{,}54}{3} = 2{,}85\text{MeV}$$

$$\frac{\Delta E_{He}}{A} = \frac{28{,}37}{4} = 7{,}09\text{MeV}$$

Como vemos, es mucho más estable el núcleo de helio porque tiene una energía de enlace por nucleón mucho mayor.

E2A.S2009
El isótopo radiactivo ${}^{12}_{5}B$ se desintegra en carbono emitiendo radiación beta.
a) Escriba la ecuación de la reacción
b) Sabiendo que las masas atómicas del boro y del carbono con 12,01435 y 12 u, respectivamente, calcule la energía que se desprendería si un mol de boro se transformara íntegramente en carbono.
$C=3\cdot10^8$ m s^{-1} ; $m_e=9{,}1\cdot10^{-31}$ Kg ; $N_a=6{,}02\cdot10^{23}$ mol^{-1}

a) De acuerdo con las leyes de las transformaciones radiactivas de Soddy y Fajans, si un núcleo emite una partícula β (electrón) el núcleo se transformará en otro con la misma masa pero su número atómico aumentará en una unidad (es el siguiente en la tabla periódica):

$${}^{12}_{5}B \rightarrow {}^{12}_{6}C + {}^{0}_{-1}\beta$$

b) La energía desprendida en la reacción como consecuencia de la transformación en energía, debida a pérdida de masa, llamado también factor de reacción (Q) es:

$$E = \left(\sum m_{reactivos} - \sum m_{productos}\right)\cdot c^2$$

Hay que tener cuidado de sustituir las masas en unidades del SI, es decir en Kg, y por eso debemos multiplicar los valores en umas por el factor de conversión. Aunque en este caso no es un dato puede calcularse fácilmente teniendo en cuenta la definición de uma (la doceava parte de la masa del carbono 12) y que 1 mol de átomos de ${}^{12}C$ contiene un número de Avogadro de átomos:

1 mol de át.de C^{12} −−− tiene una masa de 12 gr −−−− contiene $6{,}023\cdot10^{23}$ át.de C^{12}

por tanto, la masa de 1 solo átomo de carbono será:

$$C^{12} = \frac{0{,}012}{6{,}02\cdot10^{23}} = 1{,}99\cdot10^{-26}\,\text{Kg}$$

y la uma, que es la doceava parte del C^{12} sería:

$$1\text{uma} = \frac{C^{12}}{12} = 1{,}66\cdot10^{-27}\,\text{Kg}$$

Ahora ya podemos calcular la energía desprendida en la reacción por cada átomo:

$$E = (\,12{,}01435\cdot1{,}66\cdot10^{-27} - 12\cdot1{,}66\cdot10^{-27} - 9{,}1\cdot10^{-31}\,).\,(3\cdot10^8)^2 = 2{,}06\cdot10^{-12}\ \text{J/átomo}$$

$$E = 2{,}06\cdot10^{-12} * 6{,}02\cdot10^{23} = 1{,}24\cdot10^{12}\,\text{Julios / mol}$$

E5B.S2010
Para controlar la fusión nuclear se está construyendo en Cadarache (Francia) el ITER (Reactor Internacional de Fusión Termonuclear). Se pretende fusionar deuterio, ${}^{2}_{1}H$, y tritio, ${}^{3}_{1}H$, para dar lugar a helio ${}^{4}_{2}He$.
a) Escriba la reacción nuclear.
b) Determine la energía liberada en la formación de 0,1 g de ${}^{4}_{2}He$.
$c = 3\cdot10^8$ m s^{-1}; m (${}^{2}_{1}H$) = 2,01474 u ; m (${}^{3}_{1}H$) = 3,01700 u ; m (${}^{4}_{2}He$) = 4,00388 u ; m (${}^{1}_{0}n$) = 1,0087 u ; 1u = $1{,}67\cdot10^{-27}$ kg

a) La conservación de la carga y la conservación del número de nucleones exige que en la reacción se produzca un neutrón:

$${}^{2}_{1}H + {}^{3}_{1}H \rightarrow {}^{4}_{2}He + {}^{1}_{0}n$$

b) La energía desprendida en la reacción como consecuencia de la pérdida de masa es llamada factor de reacción (Q) es:

$$Q = \Delta m\cdot c^2 = \left(\sum m_{reactivos} - \sum m_{productos}\right)\cdot c^2$$

$$Q = (2{,}01474+3{,}01700-4{,}00388-1{,}0087)\cdot1{,}67.10^{-27}\cdot(3\cdot10^8)^2 = 2{,}88.10^{-12}\ \text{Julios}$$

(recuerda que la diferencia de masas se obtiene en umas y hemos de pasarla a Kg, por eso se ha multiplicado por $1{,}67\cdot10^{-27}$ kg/uma)

$$Q = 2{,}88.10^{-12}\ \text{Julios} / 1{,}6.10^{-19}\ \text{Julios/eV} = 18\ \text{MeV}$$

Esta es la energía que corresponde a la reacción de 1 átomo de deuterio con 1 átomo de tritio y a la formación de 1 átomo de helio.

1 mol He −−− 4 gr He −−− contiene $6{,}023\cdot10^{23}$ átomos de He −−− producen $6{,}023\cdot10^{23} * 2{,}88\cdot10^{-12}$ J
0,1 gr He −−− x

de donde x = $4{,}34\cdot10^{10}$ Julios (teniendo en cuenta que la totalidad de la energía, por todos lo conceptos, consumida en España en el 2009 han sido sobre 10^{18} J, resulta que de poderse realizar esta reacción habría sido suficiente con poco más de una tonelada de deuterio para abastecernos.)

E3B.S2009

a) Explique el origen de la energía liberada en una reacción nuclear basándose en el balance masa−energía.
b) Dibuje aproximadamente la gráfica que relaciona la energía de enlace por nucleón con el número másico y a partir de ella, justifique porqué en una reacción de fisión se desprende energía.

a) Teoría. Debes indicar que en una reacción nuclear se considera como un choque elástico entre partículas y que por tanto además del momento lineal se conserva la energía y escribirla en términos relativistas, deducir el factor de reacción ...

$$(Ec_A + m_A c^2) + (Ec_a + m_a c^2) = (Ec_B + m_B c^2) + (Ec_b + m_b c^2)$$

b) Teoría

E3B.S2007

Imagine una central nuclear en la que se produjera energía a partir de la siguiente reacción nuclear:

$$4\,{}^4_2He \rightarrow {}^{16}_8O$$

a) Determine la energía que se produciría por cada kilogramo de helio que se fusionase.
b) Razone en cuál de los dos núcleos anteriores es mayor la energía de enlace por nucleón.
$c = 3 \cdot 10^8\ m\ s^{-1}$; 1 u = $1{,}66 \cdot 10^{-27}$ kg ; m (${}^4_2He$) = 4,0026 u ; m(${}^{16}_8O$) = 15,9950 u ;
m_p = 1,007825 u ; m_n = 1,008665 u

a) Primero veamos la energía que se desprende en la reacción, que se debe a la pérdida de masa que se transforma en energía conforme a la ecuación de Einstein:

$$E = \Delta m \cdot c^2 = (m_{reactivos} - m_{productos})c^2 = (4 \cdot 4{,}0026 - 15{,}9950) \cdot 1{,}66 \cdot 10^{-27} (3 \cdot 10^8)^2 = 2{,}30 \cdot 10^{-12}\ J$$

La energía desprendida en la reacción es debida, como puede verse, al gasto de 4 átomo de helio. Quiere decir que una masa de helio de $4 \cdot 4{,}0026 \cdot 1{,}66.10^{-27}\ Kg$ han producido una cantidad de energía de $2{,}30 \cdot 10^{-12}\ J$. Por tanto 1 Kg de helio producirá:

$$E = \frac{1 \cdot 2{,}30 \cdot 10^{-12}}{4 \cdot 4{,}0026 \cdot 1{,}66.10^{-27}} = 8{,}65 \cdot 10^{13}\ Julios = \frac{8{,}65 \cdot 10^{13}}{3600.000} = 2{,}4 \cdot 10^7\ Kwh$$

b) Puesto que el factor de reacción es positivo, eso quiere decir que en la reacción se desprende energía, y por tanto los productos finales son más estables que los iniciales y esa diferencia de energía es justamente la que se ha desprendido. En consecuencia, es evidente que la energía de enlace por nucleón del oxígeno debe ser mayor que la del

helio. Lo que puede comprobarse fácilmente y además concuerda con la gráfica en la que se representa $\Delta E / A$ frente al número de nucleones (A). Vamos a comprobarlo:

$$E_{He} = \Delta m \cdot c^2 = (2 \cdot 1{,}007825 + 2 \cdot 1{,}008665 - 4{,}0026) \cdot 1{,}6610^{-27} (3 \cdot 10^8)^2 = 4{,}54 \cdot 10^{-12}\ J = 28{,}37 MeV$$

$$E_O = \Delta m \cdot c^2 = (8 \cdot 1{,}007825 + 8 \cdot 1{,}008665 - 15{,}9950) \cdot 1{,}6610^{-27} (3 \cdot 10^8)^2 = 2{,}05 \cdot 10^{-11}\ J = 127{,}85 MeV$$

y la energía de enlace por nucleón de cada átomo será:

$$\frac{\Delta E_{He}}{A_{He}} = \frac{28{,}37}{4} = 7{,}09 MeV \qquad \text{y para el oxígeno} \qquad \frac{\Delta E_O}{A_O} = \frac{127{,}85}{16} = 7{,}99 MeV$$

Como ya se suponía, la energía de enlace por nucleón del oxígeno es mayor y por tanto es más estable que el helio.

E2A.S2007

a) Calcule el defecto de masa de los núclidos ${}^{11}_{5}B$ y ${}^{222}_{86}Rn$ y razone cuál de ellos es más estable.

b) En la desintegración del núcleo ${}^{222}_{86}Rn$ se emiten dos partículas alfa y una beta, obteniéndose un nuevo núcleo. Indique las características del núcleo resultante.

m_B = 11,009305 u ; m_{Rn} = 222,017574 u ; m_p = 1,007825 u ; m_n = 1,008665 u

a) El boro tiene 5p+6n y el radón tiene 86p+136n. El defecto de masa para cada uno es:

$$E_B = \Delta m \cdot c^2 = (5 \cdot 1{,}007825 + 6 \cdot 1{,}008665 - 11{,}009305) \cdot 1{,}66\,10^{-27}(3 \cdot 10^8)^2 = 1{,}22 \cdot 10^{-11}\,J = 76{,}39MeV$$

$$E_{Rn} = \Delta m \cdot c^2 = (86 \cdot 1{,}007825 + 222 \cdot 1{,}008665 - 222{,}017574) \cdot 1{,}66\,10^{-27}(3 \cdot 10^8)^2 = 2{,}74 \cdot 10^{-10}\,J = 1712{,}33MeV$$

A primera vista parece que el Rn es más estable puesto que la energía de enlace es mayor, pero este valor no sirve para compararlos puesto que tienen distinto número de nucleones, así que para poder compararlos hay que dividirlos por el numero de nucleones de cada átomo, es decir hay que calcular s energía de enlace por nucleón:

$$\frac{\Delta E_B}{A_B} = \frac{76{,}39}{11} = 6{,}94MeV \quad \text{y para el radón} \quad \frac{\Delta E_{Rn}}{A_{Rn}} = \frac{1712{,}33}{222} = 7{,}71MeV$$

Ahora sí que podemos decir que el Radón es más estable puesto que tiene mayor energía de enlace por nucleón que el boro.

b) Teniendo en cuenta que en cualquier reacción nuclear debe conservarse la carga y el número de nucleones:

$$_{86}Rn^{222} \rightarrow {}_{a}X^{b} + 2\,{}_{2}\alpha^{4} + {}_{-1}\beta^{0}$$

Como podemos ver el número atómico (Z) del átomo resultante en la desintegración es 83 (*86=a+2·2−1*) y su número másico (A) es 214 (*222=b+2·4+0*), por tanto es el que ocupa tres lugares antes en la tabla periódica, concretamente el Bismuto $_{83}Bi^{214}$.

A la misma conclusión habríamos llegado recurriendo a las leyes de Soddy y Fajans: si el Rn(222) emite una partícula α se transformará en el que ocupa dos lugares antes en la tabla y tendrá una masa 4 veces menor: Polonio(218) que a su vez emite otra partícula α transformándose, de igual forma, en Plomo(214) y éste emite una partícula β dando lugar al siguiente en la tabla y con la misma masa: Bismuto(214)

EJERCICIOS SEMIRESUELTOS Y CON SOLUCIONES

E6B.S2008

a) Enuncie y comente el principio de incertidumbre de Heisenberg.

b) Explique los conceptos de estado fundamental y estados excitados de un átomo y razone la relación que tienen con los espectros atómicos.

Teoría

E1B.S2010

a) Estabilidad nuclear.

b) Explique el origen de la energía liberada en los procesos de fisión y fusión nucleares.

Teoría

E6A.S2009

a) Defina energía de enlace por nucleón

b) Analice energéticamente las reacciones de fusión y fisión nucleares

Teoría

E2A.S2008

a) Explique en qué consisten las reacciones de fusión y fisión nucleares. ¿En qué se diferencian?

b) Comente el origen de la energía que producen.

a) Teoría. No olvides justificar cada una de las reacciones en términos de energía de enlace por nucleón a partir de la curva en la que se representa ésta en función del número de masa (A)

b) Teoría.

E4A.S2008

a) Explique qué se entiende por defecto de masa y por energía de enlace de un núcleo y cómo están relacionados ambos conceptos.

b) Relacione la energía de enlace por nucleón con la estabilidad nuclear y, ayudándose de una gráfica, explique cómo varía la estabilidad nuclear con el número másico.

Teoría

E6B.S2007

a) La masa de un núcleo atómico no coincide con la suma de las masas de las partículas que los constituyen. ¿Es mayor o menor? ¿Cómo justifica esa diferencia?

b) ¿Qué se entiende por estabilidad nuclear? Explique, cualitativamente, la dependencia de la estabilidad nuclear con el número másico.

Teoría

E4A.S2007

Todas las fuerzas que existen en la naturaleza se explican como manifestaciones de cuatro interacciones básicas: gravitatoria, electromagnética, nuclear fuerte y nuclear débil.

a) Explique las características de cada una de ellas.

b) Razone por qué los núcleos son estables a pesar de la repulsión eléctrica entre sus protones.

Teoría

EJERCICIOS PROPUESTOS EN SELECTIVIDAD CADA CURSO

FÍSICA MODERNA. CURSO 2010/2011

E1A.S2011
El espectro de luz visible (luz blanca) incluye longitudes de onda comprendidas entre $3{,}8\cdot10^{-7}$ m (violeta) y $7{,}8\cdot10^{-7}$ m (rojo).
a) Enuncie la hipótesis de Planck y calcule la energía de los fotones que corresponden a las luces violeta y roja indicadas.
b) ¿Cuántos fotones de luz roja son necesarios para acumular una energía de 3 J?
$c = 3\cdot10^{8}$ m s^{-1} ; $h = 6{,}6\cdot10^{-34}$ J s

E2A.S2011
a) Hipótesis de De Broglie.
b) Razone qué longitud de onda es mayor, la asociada a protones o a electrones de la misma energía cinética

E5B.S2011
Una lámina metálica comienza a emitir electrones al incidir sobre ella luz de longitud de onda menor que $5\cdot10^{-7}$ m.
a) Analice los cambios energéticos que tienen lugar en el proceso de emisión y calcule con qué velocidad máxima saldrán emitidos los electrones si la luz que incide sobre la lámina tiene una longitud de onda de $2\cdot10^{-7}$ m.
b) Razone qué sucedería si la frecuencia de la radiación incidente fuera de $5\cdot10^{14}$ s^{-1}.
$h = 6{,}6\cdot10^{-34}$J s ; $c = 3\cdot10^{8}$ m s^{-1} ; $m_e = 9{,}1\cdot10^{-31}$ kg

E6B.S2011
a) Explique la teoría de Einstein del efecto fotoeléctrico.
b) Razone si es posible extraer electrones de un metal al iluminarlo con luz amarilla, sabiendo que al iluminarlo con luz violeta de cierta intensidad no se produce el efecto fotoeléctrico, ¿Y si aumentáramos la intensidad de la luz?.

a) Teoría
b) Como habrás dejado claro en el apartado anterior, para que se produzca efecto fotoeléctrico es necesario que la luz tenga una frecuencia mínima o umbral y por debajo de esa frecuencia no salen electrones por muy intensa que sea la luz.

En el espectro electromagnético, la frecuencia aumenta desde el rojo al violeta, por tanto si con luz violeta (independientemente de la intensidad que tenga la luz) no es posible extraer electrones del metal, mucho menos lo será si iluminamos con luz amarilla que tiene una frecuencia menor. Y da igual la intensidad de la luz, no conseguiremos arrancar un solo electrón.

Por el contrario, si empleamos luz ultravioleta sí conseguiremos efecto fotoeléctrico y una vez conseguido para una frecuencia dada (umbral), el aumento de la intensidad de la luz hará que aumente el número de electrones que se extraen, o lo que es lo mismo la intensidad de la corriente.

DESINTEGRACIÓN NUCLEAR. CURSO 2010/2011

E1B.S2011
a) Ley de desintegración radiactiva; magnitudes.
b) Defina actividad de un isótopo radiactivo. Razone si puede asegurarse que dos muestras radiactivas de igual masa tienen igual actividad

E3A.S2011
La actividad de ^{14}C de un resto arqueológico es de 150 desintegraciones por segundo. La misma masa de una muestra actual de idéntico tipo posee una actividad de 450 desintegraciones por segundo. El periodo de semidesintegración del ^{14}C es de 5730 años.
a) Explique qué se entiende por actividad de una muestra radiactiva y calcule la antigüedad de la muestra arqueológica.
b) ¿Cuántos átomos de ^{14}C tiene la muestra arqueológica indicada en la actualidad? Explique por qué ha cambiado con el tiempo el número de átomos de ^{14}C de la muestra.

E5A.S2011
a) Describa los procesos radiactivos alfa, beta y gamma.
b) Razone el número de desintegraciones alfa y beta necesarias para que el $^{226}_{88}\mathrm{Ra}$ se transforme en $^{206}_{82}\mathrm{Pb}$

DEFECTO DE MASA. CURSO 2010/2011

E4A.S2011
a) Explique qué se entiende por defecto de masa y por energía de enlace de un núcleo y cómo están relacionados.
b) Relacione la energía de enlace por nucleón con la estabilidad nuclear y, ayudándose de una gráfica, explique cómo varía la estabilidad nuclear con el número másico.

E6A.S2011
La fisión de un átomo de $^{235}_{92}\mathrm{U}$ se produce por captura de un neutrón, siendo los productos principales de este proceso $^{144}_{56}\mathrm{Ba}$ y $^{90}_{36}\mathrm{Kr}$.
a) Escriba y ajuste la reacción nuclear correspondiente y calcule la energía desprendida por cada átomo que se fisiona.
b) En una determinada central nuclear se liberan mediante fisión $45\cdot10^{8}$ W. Determine la masa de material fisionable que se consume cada día.
$c=3\cdot10^{8}$ m/s; m_U=235,12 u; m_{Ba}=143,92 u; m_{Kr}=89,94 u; m_n=1,008665 u;
1 u = $1{,}7\cdot10^{-27}$ Kg.

a) La reacción sería: $^{235}_{92}\mathrm{U} + {}^{1}_{0}\mathrm{n} \rightarrow {}^{144}_{56}\mathrm{Ba} + {}^{90}_{36}\mathrm{Kr} + {}^{y}_{x}\mathrm{X}$
Teniendo en cuenta que en toda reacción nuclear debe conservarse la carga y el número de nucleones (además de la energía total, los momentos angular y lineal y el spín).

- Conservación de la carga: $92 + 0 = 56 + 36 + x \Rightarrow x = 0$
- Conservación nº nucleones: $235 + 1 = 144 + 90 + y \Rightarrow y = 2$

Con carga 0 y 2 nucleones no puede ser otra cosa que 2 neutrones, así que la reacción nuclear que tiene lugar es:

$$^{235}_{92}U + {}^{1}_{0}n \rightarrow {}^{144}_{56}Ba + {}^{90}_{36}Kr + 2\,{}^{1}_{0}n$$

(La reacción corresponde a una reacción en cadena puesto que por cada neutrón necesario para activarla se producen dos). La energía desprendida por cada átomo corresponde a la transformación en energía de la pérdida de masa que tiene lugar, de acuerdo con la ecuación de Einstein:

$$E = \Delta m \cdot c^2 = [(m_U + m_n) - (m_{Ba} + m_{Kr} + 2\,m_n)] * c^2 =$$

$$E = [(235{,}12 + 1{,}008665) - (143{,}92 + 89{,}94 + 2 \cdot 1{,}008665)] \cdot 1{,}7 \cdot 10^{-27} * (3 \cdot 10^8)^2 =$$

$$E = 0{,}251335 \cdot 1{,}7 \cdot 10^{-27} * (3 \cdot 10^8)^2 = 3{,}845 \cdot 10^{-11} \text{ Julios}$$

Observaciones: Como ves, el defecto de masa que se obtiene en umas hay que pasarlo a Kg, por eso se ha multiplicado por $1{,}7 \cdot 10^{-27}$ Kg/uma
El resultado en Julios, podría dividirse por la carga del electrón para expresarlo en eV. Incluso luego dividirlo entre 10^6 y expresarlo en MeV.

b) Teniendo en cuenta que P=W/t, si la potencia de la central es de $45 \cdot 10^8$ Watios, quiere decir que en 1 día se libera una cantidad de energía igual a:

$$W = P \cdot t = 45 \cdot 10^8 * 24 \cdot 3600 = 3{,}888 \cdot 10^{14} \text{ Julios}$$

Como por cada átomo de $^{235}_{92}U$, que tiene una masa de 235,12 umas, se produce una energía de $3{,}845 \cdot 10^{-11}$ Julios. Estableciendo una simple proporción se deduce que la cantidad necesaria para obtener una energía de $3{,}888 \cdot 10^{14}$ Julios será:

$$m_U = \frac{235{,}12u \cdot 3{,}888 \cdot 10^{14}\,J}{3{,}845 \cdot 10^{-11}\,J} = 2{,}377 \cdot 10^{27} \text{ umas de } ^{235}_{92}U$$

en Kg:

$$m_U = 2{,}377 \cdot 10^{27} \text{ umas} \cdot 1{,}7 \cdot 10^{-27} \text{ kg/uma} = 3{,}041\text{Kg de } ^{235}_{92}U$$

FÍSICA MODERNA. CURSO 2011/2012

E1B.S2012
2. a) Analice la insuficiencia de la física clásica para explicar el efecto fotoeléctrico.
b) Si tenemos luz monocromática verde de débil intensidad y luz monocromática roja intensa, capaces ambas de extraer electrones de un determinado metal, ¿cuál de ellas produciría electrones con mayor energía? ¿Cuál de las dos extraería mayor número de electrones? Justifique las respuestas.

DESINTEGRACIÓN NUCLEAR. CURSO 2011/2012

E1A.S2012
Un núcleo de $^{226}_{88}Ra$ emite una partícula alfa y se convierte en un núcleo de $^{A}_{Z}Rn$.
a) Escriba la reacción nuclear correspondiente y calcule la energía liberada en el proceso.
b) Si la constante de desintegración del $^{226}_{88}Ra$ es de $1{,}37 \cdot 10^{-11}\ s^{-1}$, calcule el tiempo que debe transcurrir para que una muestra reduzca su actividad a la quinta parte.
$c = 3 \cdot 10^8\ m\ s^{-1}$; $1\ u = 1{,}67 \cdot 10^{-27}$ kg ; m Ra = 226,025406 u ; m Rn = 222,017574 u ;
m He= 4,002603 u

E2A.S2012
a) Describa los procesos radiactivos alfa, beta y gamma.
b) Una muestra contiene $^{226}_{88}Ra$. Razone el número de desintegraciones alfa y beta necesarias para que el producto final sea $^{206}_{82}Ra$.

DEFECTO DE MASA. CURSO 2011/2012

E3A.S2012
En la explosión de una bomba de hidrógeno se produce la reacción:

$$^{2}_{1}H + {}^{3}_{1}H \rightarrow {}^{4}_{2}He + {}^{1}_{0}n$$

a) Defina defecto de masa y calcule la energía de enlace por nucleón del $^{4}_{2}He$.
b) Determine la energía liberada en la formación de un átomo de helio.
$c = 3 \cdot 10^8 m\ s^{-1}$; $1\ u = 1{,}67 \cdot 10^{-27}$ kg ; m($^{2}_{1}H$) = 2,01474 u ; m($^{3}_{1}H$) = 3,01700 u;
m($^{4}_{2}He$) = 4,002603 u ; m($^{1}_{0}n$) =1,008665 u ; m($^{1}_{1}p$) =1,007825 u

a) $\Delta m_{He} = masa_{teórica\ He} - masa_{experimental\ He} = (2*1{,}008665+2*1{,}007825) - 4{,}002603 = 0{,}030377$ u
$= 5{,}073 \cdot 10^{-29}$Kg
$\Delta E = \Delta m \cdot c^2 = 4{,}5656 \cdot 10^{-12}$ J (energía de enlace)
eepn = $\Delta E/A = 1{,}1414 \cdot 10^{-12}$ J/nucleón = $7{,}13 \cdot 10^6$ eV/nucleón = 7,13 MeV/nucleón
b) $\Delta m_{reaccion} = \Sigma masa_{reactivos} - \Sigma masa_{productos} = (2{,}01474+3{,}01700) - (4{,}002603+1{,}008665) =$
$= 0{,}020472\ u = 3{,}4188 \cdot 10^{-29}$ Kg
$\Delta E = \Delta m \cdot c^2 = 3{,}0769 \cdot 10^{-12}$ J = 19,23 MeV (Energía reacción por cada átomo de $^{4}_{2}He$ formado)

FÍSICA MODERNA. CURSO 2012/2013

E4A.S2013
a) Razone por qué la teoría ondulatoria de la luz no permite explicar la existencia de una frecuencia umbral para el efecto fotoeléctrico.
b) Si una superficie metálica emite fotoelectrones cuando se ilumina con luz verde, razone si emitirá al ser iluminada con luz azul.

a) Según la física clásica la energía de una onda es proporcional al cuadrado de la amplitud, ⇒ se puede tener ondas de gran energía aunque su frecuencia sea pequeña b) Si al iluminar un metal con luz verde emite fotoelectrones ⇒ que su frecuencia umbral del metal es menor o igual a la frecuencia de la luz verde. Como la luz azul tiene mayor frecuencia que la verde también emitirá fotoelectrones. (En igual número si las luces tienen la misma intensidad, pero de mayor energía cinética cuando se extraigan con la luz azul.)

E5A.S2013
a) Enuncie la hipótesis de De Broglie.
b) Un protón y un electrón se mueven con la misma velocidad. ¿Cuál de los dos tiene mayor longitud de onda asociada? ¿Y si ambas partículas tuvieran la misma energía cinética? Razone las respuestas.
a) Teoría b) igual a E4B.S2007 / E4B.S2008 insertados en la teoría

DESINTEGRACIÓN NUCLEAR. CURSO 2012/2013

E6B.S2013
a) Enuncie la ley de desintegración radiactiva y enumere las magnitudes que intervienen en su expresión.
b) Considere dos muestras de dos isótopos radiactivos. Si el periodo de semidesintegración de una es el doble que el de la otra, razone cómo cambia la relación entre las actividades de ambas muestras en función del tiempo.

b) $A = \left|\frac{dN}{dt}\right| = \lambda N = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} N \Rightarrow$ Si A_1 tiene $T_{1/2}$ y A_2 tiene $2T_{1/2} \Rightarrow A_1=2A_2$

E2A.S2013
2. a) Describa las características de los procesos de desintegración α, β y γ.
b) Un isótopo ${}^{A}_{Z}X$ sufre una desintegración α y una desintegración γ. Justifique el número másico y el número atómico del nuevo núcleo. ¿Qué cambiaría si en lugar de emitir una partícula α emitiera una partícula β?
Teoría

E3A.S2013
El isótopo ${}^{235}_{92}U$ tras diversas desintegraciones α y β, da lugar al isótopo ${}^{207}_{82}Pb$
a) Describa las características de esas dos emisiones radiactivas y calcule cuántas partículas α y cuántas β se emiten por cada átomo de ${}^{207}_{82}Pb$ formado.
b) Determine la actividad inicial de una muestra de 1 g de ${}^{235}_{92}U$, sabiendo que su periodo de semidesintegración es $7 \cdot 10^8$ años. ¿Cuál será la actividad de la muestra ${}^{235}_{92}U$ transcurrido un tiempo igual al periodo de semidesintegración? Justifique la respuesta.
$N_A = 6{,}02 \cdot 10^{23}\ mol^{-1}$; $m({}^{235}_{92}U) = 235{,}07$ u

a) ${}^{235}_{92}U - x\,{}^{4}_{2}\alpha - y\,{}^{0}_{-1}\beta \rightarrow {}^{207}_{82}Pb \Rightarrow 235-4x=207;\ 92-2x+y=82 \Rightarrow x=7$ part.α; y=4 part.β
b) N = El nº de átomos de uranio en 1gr = $N_A/235{,}07 = 2{,}56 \cdot 10^{21}$átm.U

$$A = \left|\frac{dN}{dt}\right| = \lambda N = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} N = \frac{\ln 2}{7 \cdot 10^8} 2{,}56 \cdot 10^{21} = 1{,}54 \cdot 10^{12} \text{ desintegrac/año}$$

Transcurrido un tiempo igual a $T_{1/2}$, por definición, quedarán la mitad de los núcleos iniciales de uranio, por tanto la actividad será la mitad.

DEFECTO DE MASA. CURSO 2012/2013

E1A.S2013
Considere los isótopos ${}^{12}_{6}C$ y ${}^{13}_{6}C$, de masas 12,0000 u y 13,0034 u, respectivamente.
a) Explique qué es el defecto de masa y determine su valor para ambos isótopos.
b) Calcule la energía de enlace por nucleón y razone cuál es más estable.
$c = 3 \cdot 10^8\ m\ s^{-1}$; $m_p = 1{,}0078$ u ; $m_n = 1{,}0087$ u ; $u = 1{,}7 \cdot 10^{-27}$ kg

	Isótopo ${}^{12}_{6}C$	Isótopo ${}^{13}_{6}C$
$\Delta m = m_{teórica} - m_{exp\,erimental}$	$\Delta m = 0{,}099\ u = 1{,}68 \cdot 10^{-28}$Kg	$\Delta m = 0{,}1043\ u = 1{,}77 \cdot 10^{-28}$Kg
$\Delta E = \Delta m \cdot c^2$	$\Delta E = 1{,}51 \cdot 10^{-11}$J	$\Delta E = 1{,}60 \cdot 10^{-11}$J
$eepn = \frac{\Delta E}{A}$	$\frac{\Delta E}{A} = 1{,}26 \cdot 10^{-12}\,J = 7{,}87MeV$	$\frac{\Delta E}{A} = 1{,}23 \cdot 10^{-12}\,J = 7{,}67MeV$

El isótopo más estable es aquel que tiene mayor energía de enlace por nucleón, puesto que es la energía que (por nucleón) debemos aportar para descomponerlo. El más estable es ${}^{12}_{6}C$

E1B.S2013
a) La masa de un núcleo atómico no coincide con la suma de las masas de las partículas que lo constituyen. ¿Es mayor o menor? ¿Cómo justifica esta diferencia?
b) ¿Qué se entiende por estabilidad nuclear? Explique cualitativamente la dependencia de la estabilidad nuclear con el número másico.
Teoría

E6A.S2013
En las estrellas de núcleos calientes predominan las fusiones del denominado ciclo de carbono, cuyo último paso consiste en la fusión de un protón con nitrógeno ${}^{15}_{7}N$ para dar ${}^{12}_{6}C$ y un núcleo de helio.
a) Escriba la reacción nuclear.
b) Determine la energía necesaria para formar 1 kg de ${}^{12}_{6}C$.
$c = 3 \cdot 10^8\ m\ s^{-1}$; $m({}^{1}_{1}H) = 1{,}007825$ u ; $m({}^{15}_{7}N) = 15{,}000108$ u ; $m({}^{12}_{6}C) = 12{,}000000$ u ; $m({}^{4}_{2}He) = 4{,}002603$ u ; $u = 1{,}7 \cdot 10^{-27}$ kg

a) ${}^{15}_{7}N + {}^{1}_{1}p \rightarrow {}^{12}_{6}C + {}^{4}_{2}\alpha$
b) $\Delta m = 0{,}005330\ u = 9{,}06 \cdot 10^{-30}$Kg
$E = \Delta m \cdot c^2 = 8{,}15 \cdot 10^{-13}$J por cada átomo de ${}^{12}_{6}C$ formado
en 1kg de ${}^{12}_{6}C$ hay un nº de átomos igual a $1000 \cdot N_{Av}/12 = 5{,}02 \cdot 10^{25}$ átomos de ${}^{12}_{6}C$
La energía para 1kg de ${}^{12}_{6}C$ es $8{,}15 \cdot 10^{-13} * 5{,}02 \cdot 10^{25} = 4{,}09 \cdot 10^{13}$ J

FÍSICA MODERNA. CURSO 2013/2014

E1A.S2014

Al iluminar un fotocátodo de sodio con haces de luz monocromáticas de longitudes de onda 300 nm y 400 nm, se observa que la energía cinética máxima de los fotoelectrones emitidos es de 1,85 eV y 0,82 eV, respectivamente.
a) Determine el valor máximo de la velocidad de los electrones emitidos con la primera radiación.
b) A partir de los datos del problema determine la constante de Planck y la energía de extracción del metal.
$c = 3\cdot10^{8}$ m s^{-1} ; $e = 1,6\cdot10^{-19}$ C ; $m_e = 9,1\cdot10^{-31}$ kg

a) $E_c = 1,85\text{eV} = 2,96\cdot10^{-19}\text{J} = ½mv^2 \Rightarrow v = 8,07\cdot10^{5}$ m/s
b) $E_{fotón} = E_o + E_c \Rightarrow h\cdot\nu_{fotón} = E_o + E_c \Rightarrow h\cdot10^{15} = E_o + 2,96\cdot10^{-19}$ } $h = 6,6\cdot10^{-34}$ J·s
$h\cdot7,5\cdot10^{14} = E_o + 1,31\cdot10^{-19}$ $E_o = 3,63\cdot10^{-19}$ J

E3A.S2014 J
Sobre una superficie de potasio, cuyo trabajo de extracción es 2,29 eV, incide una radiación de $0,2\cdot10^{-6}$ m de longitud de onda.
a) Razone si se produce efecto fotoeléctrico y, en caso afirmativo, calcule la velocidad de los electrones emitidos y la frecuencia umbral del material.
b) Se coloca una placa metálica frente al cátodo. ¿Cuál debe ser la diferencia de potencial entre ella y el cátodo para que no lleguen electrones a la placa?
$h = 6,6\cdot10^{-34}$ J s ; $c = 3\cdot10^{8}$ m s^{-1} ; $e = 1,6\cdot10^{-19}$ C ; $m_e = 9,1\cdot10^{-31}$ kg

a) $E_o=2,29\cdot1,6\cdot10^{-19}=3,66\cdot10^{-19}$J; $E_{fotón}=h\cdot\nu_{fot}=h\cdot(c/\lambda_{fot})=9,90\cdot10^{-19}$J.
Como $E_{fotón} > E_o \Rightarrow$ hay efecto fotoeléctrico porque $E_{fotón} \geq E_{extracción}$
$E_{fot} = E_o + E_c \Rightarrow E_c = 6,24\cdot10^{-19}\text{J} = ½m_ev^2 \Rightarrow v=1,17\cdot10^{6}$m/s
La frecuencia umbral es la tiene un fotón de energía igual a trabajo de extracción $\Rightarrow$
$E_o=h\cdot\nu_o \Rightarrow \nu_o=5,55\cdot10^{14}$Hz
b) $q_eV = E_c \Rightarrow V=3,9$Volt

E3A.S2014 J
a) Teoría de Einstein del efecto fotoeléctrico.
b) Una superficie metálica emite fotoelectrones cuando se ilumina con luz verde pero no emite con luz amarilla. Razone qué ocurrirá cuando se ilumine con luz azul o con luz roja.
a) Teoria; b) similar a E4A.S2013

E4A.S2014
a) Hipótesis de De Broglie.
b) Un protón y un electrón tienen igual energía cinética. Razone cuál de los dos tiene mayor longitud de onda.
a) Teoria; b) igual a E5A.S2013 y a E4B.S2007 / E4B.S2008 insertados en la teoría

DESINTEGRACIÓN NUCLEAR. CURSO 2013/2014

E1B.S2014
a) Estabilidad nuclear.
b) Explique cuál es el origen de la energía que se produce en los procesos de fusión y fisión nucleares.

Teoría

E2A.S2014
a) Describa los procesos de desintegración radiactiva, explicando las características de los diferentes tipos de emisión.
b) Justifique las leyes de desplazamiento.
Teoría

E5A.S2014
En el accidente de la central nuclear de Fukushima I se produjeron emisiones de yodo y cesio radiactivos a la atmósfera. El periodo de semidesintegración del $^{137}_{55}Cs$ es 30,23 años.
a) Explique qué es la constante de desintegración de un isótopo radiactivo y calcule su valor para el $^{137}_{55}Cs$
b) Calcule el tiempo, medido en años, que debe transcurrir para que la actividad del $^{137}_{55}Cs$ se reduzca a un 1 % del valor inicial.

a) $\lambda = \ln2/T_{1/2} = 2,29\cdot10^{-2}$ años^{-1}
b) $A = \left|\frac{dN}{dt}\right| = \lambda N$ como la actividad es proporcional al nº de átomos podemos escribir la ley de la desintegración radiactiva en términos de actividad en lugar de en términos de núcleos:
$N = N_o e^{-\lambda t} \Rightarrow A = A_o e^{-\lambda t} \Rightarrow 0,01A_o = A_o e^{-\frac{\ln 2}{30,23}t} \Rightarrow \ln 0,01 = -\frac{\ln 2}{30,23}t \Rightarrow$ t=200,8 años

E6A.S2014
a) Ley de desintegración radiactiva; magnitudes.
b) Defina actividad de una muestra radiactiva. Dos muestras de dos isótopos radiactivos tienen igual masa, ¿tendrán la misma actividad? Razone la respuesta.
b) $A = \left|\frac{dN}{dt}\right| = \lambda N = \lambda\frac{m\cdot N_{Av}}{Pat}$ Para una misma masa, la actividad depende de la constante de desintegración y de la masa atómica del elemento radiactivo.

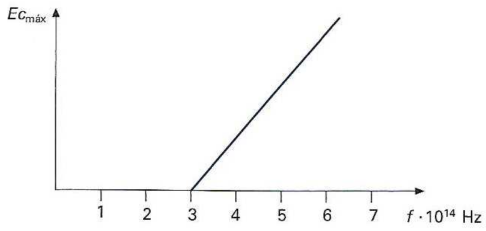
DEFECTO DE MASA. CURSO 2013/2014

E2B.S2014
Las masas de los isótopos $^{12}_{6}C$ y $^{13}_{6}C$ son 12,0000 u y 13,0034 u, respectivamente.
a) Explique qué es el defecto de masa de un núcleo y calcule el de ambos isótopos.
b) Calcule la energía de enlace por nucleón de los dos isótopos. Razone cual de los dos es más estable.
$m_p=1,0073$u; $m_n=1,0087$u; $u=1,66\cdot10^{-27}$Kg; $c=3\cdot10^{8}$m/s.
igual que E1A.S2013

FÍSICA MODERNA. CURSO 2014/2015

E1A.S2015
Un electrón que parte del reposo es acelerado por una diferencia de potencial de 50 V.
a) Calcule la energía cinética y la longitud de onda de De Broglie asociada al electrón después de ser acelerado.
b) Si la diferencia de potencial aceleradora se redujera a la mitad, ¿cómo cambiaría la longitud de onda asociada al electrón? Razone la respuesta.
$h = 6{,}62{\cdot}10^{-34}$ J s ; $e = 1{,}6{\cdot}10^{-19}$ C ; $me = 9{,}1{\cdot}10^{-31}$ kg

E1B.S2015
a) Explique en qué consiste el efecto fotoeléctrico.
b) En una experiencia del efecto fotoeléctrico con un metal se obtiene la gráfica adjunta. Analice qué ocurre para valores de la frecuencia: i) $f < 3{\cdot}10^{14}$ Hz; ii) $f = 3{\cdot}10^{14}$ Hz; iii) $f > 3{\cdot}10^{14}$ Hz; y razone cómo cambiaría la gráfica para otro metal que requiriese el doble de energía para extraer los electrones.



E2A.S2015
a) Enuncie la hipótesis de De Broglie e indique de qué depende la longitud de onda asociada a una partícula.
b) ¿Se podría determinar simultáneamente, con total exactitud, la posición y la cantidad de movimiento de una partícula? Razone la respuesta.

E3A.S2015
Al iluminar mercurio con radiación electromagnética de $\lambda=185{\cdot}10^{-9}$ m se liberan electrones cuyo potencial de frenado es 4,7 V.
a) Determine el potencial de frenado si se iluminara con radiación de $\lambda= 254{\cdot}10^{-9}$ m, razonando el procedimiento utilizado.
b) Calcule el trabajo de extracción del mercurio.
$e = 1{,}6{\cdot}10^{-19}$ C ; $c = 3{\cdot}10^{8}$ m s^{-1} ; $h = 6{,}62{\cdot}10^{-34}$ J s

E4B.S2015
a) Explique la hipótesis de De Broglie.
b) Un protón y un electrón tienen energías cinéticas iguales, ¿cuál de ellos tiene mayor longitud de onda de De Broglie? ¿Y si ambos se desplazaran a la misma velocidad? Razone las respuestas.

E5B.S2015
a) Calcule la longitud de onda asociada a un electrón que se acelera desde el reposo mediante una diferencia de potencial de 20000 V.
b) Calcule la longitud de onda de De Broglie que correspondería a una bala de 10 g que se moviera a 1000 m s^{-1} y discuta el resultado.
$h = 6{,}62{\cdot}10^{-34}$ J·s ; $m_e = 9{,}1{\cdot}10^{-31}$ kg ; 1 eV = $1{,}6{\cdot}10^{-19}$ J

E6A.S2015

a) Teoría de Einstein del efecto fotoeléctrico: concepto de fotón.
b) Razone si, al triplicar la frecuencia de la radiación incidente sobre un metal, se triplica la energía cinética de los fotoelectrones**.**
b) $h\nu = Eo + Ec$. El triplicar la frecuencia tenemos: $3h\nu = Eo + Ec´$
Dividiendo miembro a miembro: $Ec´= 2Eo + 3Ec$

DESINTEGRACIÓN NUCLEAR, CURSO 2014/2015

E4A.S2015
Disponemos de una muestra de 3 mg de 226Ra. Sabiendo que dicho núclido tiene un periodo de semidesintegración de 1600 años y una masa atómica de 226,025 u, determine razonadamente:
a) el tiempo necesario para que la masa de dicho isótopo se reduzca a 1 mg.
b) los valores de la actividad inicial y de la actividad final de la muestra.
$u = 1{,}67{\cdot}10^{-27}$ kg
a) t = 2535,94 años
b)

E5A.S2015
a) Escriba las características de los procesos de emisión radiactiva y explique las leyes de desplazamiento.
b) La figura ilustra las trayectorias que siguen los haces de partículas alfa, beta y gamma emitidos por una fuente radiactiva en una región en la que existe un campo magnético uniforme, perpendicular al plano del papel y sentido hacia dentro. Identifique, razonadamente, cuál de las trayectorias corresponde a cada una de las emisiones.